J I H O Č E S K Á   U N I V E R Z I T A
Z e m ě d ě l s k á   f a k u l t a
České Budějovice

M A T E M A T I K A

Část 1 – Matematické struktury

Doc. RNDr. Václav NÝDL, CSc.
Mgr. Renata LEXOVÁ

České Budějovice

1996

JIHOČESKÁ UNIVERZITA ČESKÉ BUDĚJOVICE

ZEMĚDĚLSKÁ FAKULTA

MATEMATIKA

Část 1 - Matematické struktury

Doc. RNDr. Václav Nýdl, CSc.

Mgr. Renata Lexová

1996

Recenzent: Doc. RNDr. Jan COUFAL, CSc.

katedra matematiky

VŠE Praha

ISBN 80-7040-193-1

Obsah

*Ivanu Bičíkovi a Zdeňku Hedrlínovi,
pedagogům Karlovy univerzity,
našim skvělým učitelům.*

věnují autorka a autor

Místo předmluvy

„… Tenkrát (v roce 1870) tam měli jenom dvacet mil daleko; naši otcové mohli o půlnoci na patnáctý listopad vyrazit z Jeffersonu v bryčkách a žebřiňácích (jezdec na koni to dokázal ještě rychleji) a za úsvitu už byli na číhané na jelena nebo medvěda. Dokonce ještě v roce 1905 ustoupila divočina jenom o dalších dvacet mil; žebřiňákům s nákladem pušek, jídla a věcí na spaní stačilo vyrazit až při západu slunce; a pak nějaká severní dřevařská společnost postavila úzkokolejnou dráhu na dopravu klád, která se napojovala na hlavní trať a probíhala ani ne míli od nového tábora majora De Spaina, kde mu ze zdvořilosti zřídili zastávku, aby major De Spain mohl se svými hosty vystoupit a setkat se s žebřiňáky, které tam odjely předchozího dne. Ale kolem roku 1925 jsme už viděli, jak všechno zaniká. Major De Spain a ostatní ze staré skupiny, až na našeho bratrance Ika a Boona, už zemřeli a (teď byla celá silnice k Jeffersonu k De Spainově zastávce dráhy posypaná štěrkem) jejich dědicové vypínali motory svých aut při zvuku sekyr a pil v místech, kde ještě před rokem slýchali jenom štěkot běžících loveckých psů. Protože Manfred De Spain byl bankéř, ne lovec jako jeho otec; obchodoval v pachtovních smlouvách, prodával půdu a stavební dřevo a kolem roku 1940 lidé – my – všechno naložili na dodávková auta a jeli dvě stě mil po dlážděných silnicích, aby našli aspoň tolik divočiny, kde by mohli rozbít stany; ale kolem roku 1980 bude už auto zastaralý prostředek, jak se dostat někam do divočiny, protože by auto muselo tu hledanou divočinu samo vyrobit. Ale snad lidé – ty sám – najdou divočinu na zadní straně Marsu nebo Měsíce, kde se snad ještě dají lovit medvědi a jeleni. …“

William Faulkner, The Reivers, 1962

Úvod

Svět se vyvíjí stále rychleji. Díky tomuto překotnému a nepředvídatelnému vývoji se může stát, že znalosti a dovednosti, které člověk získal, ztratí svoji hodnotu – prostě jsou překonány. Matematické znalosti a dovednosti patří mezi hodnotově trvalejší. Navíc matematika přináší každému, kdo se jí, třeba i z donucení, určitou dobu zabývá, trvalý užitek v podobě zkultivování jeho schopnosti logicky, abstraktně a tvořivě myslet.

Matematika je živoucí těleso, které je v neustálém vývoji a přerodu, kde více než 40 tisíc tvůrčích výzkumníků na celém světě produkuje stále nové poznatky, teorie, ale i otázky. Typickým rysem výsledků tohoto vědního oboru je jejich univerzalita , tj. aplikovatelnost do mnoha oblastí a na nejrůznější, stále nové a nové problémy života společnosti.

Cílem těchto dvoudílných skript je podat ucelený masív základů vysokoškolské matematiky potřebných ke studiu ekonomických oborů na ZF JU a odpovídá předmětu vyučovanému po dobu dvou semestrů. Rozsah látky byl zejména konfrontován s odpovídajícím předmětem vyučovaným na VŠE Praha. Při konečném koncipování jsme dále vycházeli výsledků mezinárodní evaluace, které byla naše fakulta podrobena na jaře 1996 v rámci projektu „TEMPUS“. Reagovali jsme tedy na připomínky evaluantů z institucí: L'Institut des Hautes Etudes de Droit Rural et d'Economie Agricole, Ihedrea - Paris (Francie), CAH Dronten (Holandsko), Amsterdam School of Business (Holandsko), The University of Azores (Portugalsko), The University of Reading (Velká Británie).

V prvním dílu po nadhledové kapitole o výstavbě matematiky následuje blok 4 kapitol (Kap. 2 – 5) věnovaných lineární algebře. V Kapitolách 6 a 7 je pak podán výklad tématických celků zaměřených na zobrazení, posloupnosti a řady, a úvod do problematiky reálných funkcí.

Základním stavebním kamenem textu je podkapitola. Je vždy věnována určitému konkrétnímu tématickému elementu – obsahuje základní definice pojmů a vymezení nových vztahů. Výklad je okamžitě konkretizován na řešených příkladech a posléze na řešených příkladech aplikačních. Každá podkapitola obsahuje blok úloh a aplikačních úloh k samostatnému řešení. Vřazujeme též úsek úloh a otázek kreativních, jež obsahují i určité rozšiřující momenty a jsou určeny studentům s větším zájmem. Bloky kontrolních otázek a česko-anglický terminologický slovník uzavírají větší logické celky - kapitoly.

Samozřejmě, že skripta jsou pomůckou předpokládající další studentovy aktivity – účast na přednáškách a cvičeních. Přesto jsme se snažili o takové podání, abychom se nejvíce přiblížili i potřebám studentů studujících distančně.

Ani matematika se nevyhýbá vlivu technologického pokroku. Je tedy přirozené, že i v našem předmětu předpokládáme využití takových prostředků jako kapesních kalkulátorů či počítačů. Od roku 1995 je na všech fakultách Jihočeské univerzity studentům k dispozici výkonný počítačový produkt „MAPLE“. Jeho používání je již pro studenty naší fakulty samozřejmostí. Jeho využití pro zpracování úloh v rámci našeho kurzu budeme ovšem věnovat samostatný text a z tohoto důvodu jsme ve skriptech vynechali všechny odkazy a vysvětlení týkající se využívání výpočetní techniky.

Č. Budějovice, září 1996

doc. RNDr. Václav Nýdl, CSc. (nydl@zf.jcu.cz)
Mgr. Renata Lexová (lexova@zf.jcu.cz)
Katedra aplikované matematiky a informatiky, ZF JU

Kapitola 1
Logická výstavba matematiky

Chystáte se studovat matematický text. Jako každý jiný materiál tohoto druhu má i tento určitá specifika. Proto jsme předřadili vysvětlující, chcete-li nadhledovou, kapitolu. Jejím cílem je ovšem i připomenout nejobecnější pojmy a matematickou symboliku.

Matematika je vysoce abstraktní a exaktní věda. Je členěna do jednotlivých disciplín, v nichž se budují a rozvíjejí ucelené útvary – teorie. Základem takové matematické teorie jsou výchozí pojmy a vztahy mezi nimi – axiómy. Podle zákonů formální logiky se pak vyvozují další pojmy a vlastnosti, přitom se zavádějí další pojmenování (vnitřní pojmy teorie).

V našem textu prezentujeme výseky z několika matematických disciplín s cílem podat základy inženýrské matematiky. Výklad každého výseku zahajujeme vymezením nejdůležitějších pojmů a pojmenováním nejdůležitějších vztahů, o něž se budeme zajímat. K tomu slouží *definice*. Typicky následují po definici ukázky osvětlující na konkrétních příkladech její obsah a smysl.

Protože naším cílem není budování samotných teorií (k tomu slouží specializované knihy), věnujeme se pouze prezentaci užitečných výsledků a to většinou v podobě sekvence *vět*. U nich jen vyjímečně uvádíme krátkou logickou argumentaci pro jejich platnost (tj. *důkaz*). Nejčastější podobou věty je obecný vztah mezi výroky.

Ve větě typu „jestliže V_1, potom V_2" (někdy též nazývané *kritérium*) podáváme výsledek teorie kdy pravdivost výroku V_2 (to je vlastnost nebo vztah, který nás zajímá) zaručuje pravdivost výroku V_1, která je např. snadněji prověřitelná. V dalších situacích pak jde o to, že pravdivost výroku V_1 má za následek („vynucuje") pravdivost výroku V_2. Proto také říkáme, že výrok (nebo vlastnost) V_2 je *nutnou podmínkou* pro výrok V_1. To má velký význam v situacích, kdy hledáme objekty vyhovující výroku V_1 – tyto musí **nutně** nejdříve vyhovět výroku V_2, aby pak byly podrobeny další analýze.

Druhý typ vět „V_1 právě když V_2" staví vedle sebe dva rovnocenné výroky. Jejich význam je v tom, že prověření pravdivosti výroku V_1 (např. vlastnost nějakého objektu) plně převádí na zkoumání výroku V_2, jež může mít mnohem snadněji realizováno. Říkáme též, že platnost výroku V_2 je *nutnou a postačující podmínkou* pro platnost výroku V_1.

Obsah a význam podaných matematických vět je bezprostředně vysvětlena na *ukázkách* a *příkladech*. Skupiny vět jsou pak často přípravou k podání konkrétních výpočetních postupů – algoritmů (též mluvíme o *strategii výpočtu* apod). Ve všech kapitolách jsou zařazeny *řešené příklady*, které tyto postupy ozřejmují. Ke skutečnému osvojení dojde student ovšem aktivní prací na *úlohách k řešení*. Jsou to baterie standardních problémů podrobně představených v řešených příkladech.

Hlavním cílem studia matematiky by ovšem mělo být praktické použití - *aplikace*. Širší pojetí tohoto rysu sahá ovšem za hranice našeho kurzu. V *řešených aplikačních příkladech* stavíme „mosty" mezi jednotlivými stavebními kameny kurzu (kapitolami), ale i mimo matematiku. Student pak bude řešit samostatně *aplikační úlohy k řešení* a *kreativní úlohy.*

Na závěr této části připomeňme, že hlavním posláním kurzu matematiky je poskytnout studentovi vybavenost matematickým aparátem nezbytným pro studium odborných disciplín, včetně dovednosti čtení každého odborného textu (např. ekonomického) užívajícího exaktních matematických prostředků.

Nyní krátce pojednáme o logických a pojmových základech matematické práce. Nejdříve připomeňme pravidla a symboliku formální logiky. Základními prvky, s nimiž v logice pracujeme, jsou *výroky* a *výrokové formy*. Každý výrok má právě jednu z pravdivostních hodnot, je tedy buď *pravdivý* nebo *nepravdivý* (1 nebo 0, p nebo n, *true* nebo *false* apod).

Z jednotlivých výroků můžeme pomocí *logických operací* a *logických spojek* vytvářet složitější výroky (jakási logická souvětí). Rozlišujeme pět základních logických operací:

logická operace	**zápis**	**čteme**	**význam**
negace	$\neg A$	non A	neplatí A
disjunkce	$A \vee B$	A vel B	A nebo B
konjunkce	$A \wedge B$	A et B	A a B (a zároveň)
implikace	$A \Rightarrow B$	A implikuje B	jeslže A, potom B
ekvivalence	$A \Leftrightarrow B$	A je ekvivalentní B	A právě tehdy a jen tehdy, jestliže B

Negace je *unární* operace, tj. vytváří z daného výroku nový výrok, ostatní operace jsou *binární*, tj. ze dvou výroků vzniká jeden nový výrok. Pravdivostní hodnoty výsledků uvedených operací popisují následující tabulky:

A	$\neg A$
0	1
1	0

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1

Výrokové formy závisí na jedné nebo více *výrokových proměnných* (např x, y apod), jejichž konkrétní hodnoty ovlivňují pravdivost; zapisujeme je jako $V(x), W(x,y)$ a podobně. Pro výrokové formy zavádíme dvě další operace – užívání tzv. *kvantifikátorů*.

Obecný (velký) kvantifikátor $\forall$ - vyjadřujeme jej slovy „pro všechny prvky...",

Existenční (malý) kvantifikátor $\exists$ - vyjadřujeme slovy „existuje alespoň jeden prvek...".

Je-li $V(x)$ výroková forma, pak $(\forall x)\ V(x)$ je výrok, který je pravdivý jedině tehdy, jestliže je pravdivá výroková forma $V(x)$ pro libovolnou volbu proměnné x.

Analogicky $(\exists x) V(x)$ je výrok, k jehož pravdivosti postačuje, aby existovala jedna konkrétní hodnota proměnné, řekněme x_0, tak, aby $V(x_0)$ byl pravdivý výrok.

Vysoká rigoróznost matematického textu je dosahována používáním množinové terminologie a symboliky. *Množina* představuje fundamentální pojem. Je charakterizována svými prvky – zápis $x \in M$ čteme „x je prvkem množiny M", „x patří do množiny M", a podobně zápis $x \notin M$ znamená opak.

Je-li $V(x)$ výroková forma, pak zápis $M = \{x;\ V(x)\}$ vymezuje množinu M jako množinu všech prvků x, pro něž je výrok $V(x)$ pravdivý. Je to způsob charakterizace množiny pomocí výběru. Dvě množiny jsou si rovny mají-li stejné prvky. Speciální označení $\emptyset$ je rezervováno pro *prázdnou množinu* nemající žádné prvky.

Důležitý je vztah $A \subset B$ („A je částí B", „A je podmnožinou B"), který znamená, že všechny prvky množiny A jsou též prvky množiny B – sama množina B ještě může (ale **nemusí**) mít i další prvky.

Následující binární operace s množinami jsou univerzálně používány ve všech matematických disciplínách:

Sjednocením množin A a B nazýváme množinu všech prvků, které patří alespoň do jedné z těchto množin. Označujeme jej $A \cup B = \{x;\ x \in A \vee x \in B\}$

Průnikem množin A, B nazýváme množinu všech prvků, které patří zároveň do množiny A i do množiny B. Označujeme jej $A \cap B = \{x;\ x \in A \wedge x \in B\}$

Rozdílem množin A, B nazýváme množinu všech prvků, které patří do A, ale nepatří do B. Označujeme jej $A - B$ nebo $A \setminus B = \{x;\ x \in A \wedge x \notin B\}$

Nejfrekventovanějšími množinami jsou množiny číselné:

přirozená čísla	**N**	$1, 2, 3, 4, \ldots$
celá čísla	**Z**	$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots$
racionální čísla	**Q**	zlomky $\pm\frac{p}{q}$
reálná čísla	**R**	korespondují **všem** bodům číselné osy
iracionální čísla	**Ir**	**Ir** = **R** − **Q**, např. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, e, \ldots$
komplexní čísla	**C**	jsou tvaru $a + ib$, $a, b \in R$, i je imaginární jednotka

Připomeňme též užívání značek při práci s číselnými *intervaly* na reálné ose:

otevřený interval $(a, b) = \{x \in R, a < x < b\}$

uzavřený interval $\langle a, b\rangle = \{x \in R, a \le x \le b\}$

zleva (resp. zprava) uzavřený interval $\langle a, b) = \{x \in R, a \le x < b\}$
(resp. $(a, b\rangle = \{x \in R, a < x \le b\}$)

neohraničený interval $(-\infty, +\infty)$... celá číselná osa

zleva neohraničený, zprava uzavřený interval $(-\infty, a\rangle = \{x \in R, x \le a\}$
atd.

Významné vztahy a označení při práci s nezápornými celými čísly:

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ čteme „n *faktoriál*“; speciálně se definuje $0! = 1$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ *kombinační číslo* „n nad k“, definované pro $n \ge k$; speciálně $\binom{n}{0} = 1$.

Má-li konečná množina n prvků, pak počet **všech** jejích podmnožin udává číslo 2^n a navíc pro každé $k \le n$ udává číslo $\binom{n}{k}$ počet **všech** jejích k-prvkových podmnožin.

TERMINOLOGICKÝ SLOVNÍČEK KE KAPITOLE 1

výrok	proposition	$\forall$	universal quantifier
výrok. proměnná	propositional variable	$\exists$	existencial quantifier
výrok. forma	propositional form	množina	set
logická operace	logical operation	podmnožina	subset
pravdivostní hodnota	truth value	prvek	element
pravdivostní tabulka	truth table	průnik	intersection
negace	negation	sjednocení	union
konjunkce	conjunction	doplněk	complement
disjunkce	disjunction	číslo	number
implikace	implication	kladné, záporné č.	positive, negative n.
ekvivalence	equivalence	přirozené č.	natural n.
otevřený interval	open interval	celé č.	integer
uzavřený interval	closed interval	racionální č.	rational n.
polootevřený int.	half-open int.	reálné číslo	real number
polouzavřený int.	half-closed int.	nekonečno	infinity
$n!$	n factorial	$\binom{n}{k}$	binomial coefficient („čti n choose k“)

Kapitola 2
Základní pojmy lineární algebry

V druhé kapitole se seznámíme se základními pojmy lineární algebry, to znamená s aritmetickými vektory, maticemi a soustavami lineárních rovnic a nerovnic. Zejména jsou postiženy:

- □ základní aritmetické operace s vektory včetně skalárního a vektorového součinu a normy vektoru
- □ aplikace vektorů v analytické geometrii a příprava k jednoduchým ekonomickým úvahám
- □ vymezení pojmu matice, základní aritmetické operace s maticemi, zejména násobení matice maticí; transponování
- □ role matic při práci s informacemi
- □ typické užívání matic v ekonomických úvahách nejrůznějšího charakteru včetně řešení reálných situací a problémů
- □ zavedení pojmu lineární rovnice a nerovnice
- □ geometrická reprezentace lineárních rovnic a nerovnic
- □ možné aplikace lineárních rovnic a nerovnic v rozhodovacích a optimalizačních modelech
- □ objasnění vztahů a souvislostí mezi pojmy vektor, matice a soustava lineárních rovnic nebo nerovnic

2.1. Aritmetické vektory

Definice. *Aritmetický vektor* je uspořádaná n-tice reálných čísel. Jednotlivé *složky* vektoru $\vec{v}$ se označí jako $v_1, v_2, \ldots v_n$ a přitom $\vec{v}$ se nazve *n-složkový vektor* (též *vektor dimenze n*). *Nulový* n-složkový vektor má všechny složky rovny nule a označí se $\vec{o}$.

Řekneme, že dva n-složkové vektory $\vec{v}, \vec{w}$ jsou si *rovny* a zapíšeme $\vec{v} = \vec{w}$, jestliže platí $v_i = w_i$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$. To znamená, že pro rovnost dvou vektorů požadujeme stejnou dimenzi a rovnost všech jejich příslušných složek.

Pro zápis vektoru pomocí výčtu jeho složek jsou dva užívané způsoby zápisu. Uvádíme to na příkladě 3-složkového vektoru $\vec{v}$, jehož složky jsou $v_1 = 51,\ v_2 = -1.3\,,\ v_3 = 0$.

řádková forma: $\vec{v} = (51,\ -1.3\,,\ 0)$

sloupcová forma: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 51 \\ -1.3 \\ 0 \end{pmatrix}$

V našem textu použijeme většinou řádkový zápis, ale tam, kde se bude hodit druhá forma, využijeme ji s náležitým upozorněním.

Definice. Jsou dány dva n-složkové vektory $\vec{v}, \vec{w}$ a reálné číslo r. Definujeme následující početní *operace* (úkony) s vektory:

součet vektorů	$\vec{v} + \vec{w}$	složky výsledku se vypočtou jako $v_i + w_i$
rozdíl vektorů	$\vec{v} - \vec{w}$	složky výsledku se vypočtou jako $v_i - w_i$
r-násobek vektoru	$r \cdot \vec{v}$	složky výsledku se vypočtou jako $r \cdot v_i$
skalární součin vektorů	$\vec{v} \cdot \vec{w}$	výsledek je číslo $v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + \ldots + v_n \cdot w_n$
norma vektoru	$\lVert\vec{v}\rVert$	výsledek je číslo $\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}$
dělení vektorů	- - -	**není definováno**

Ukázky: Pro čtyřsložkové vektory $\vec{v} = (1, 2, 6, -1)$, $\vec{w} = (0, 4, -3, 0)$ bude $\vec{v} + \vec{w} =$ $= (1, 6, 3, -1)$, $\quad 2\vec{v} - \vec{w} = (2, 0, 15, -2)$, $\quad \vec{v} \cdot \vec{w} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 4 + 6 \cdot (-3) + (-1) \cdot 0 = -10$, $\lVert\vec{w}\rVert = \sqrt{0^2 + 4^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$

Poznámka: Sčítání a odčítání vektorů a násobení vektoru číslem (případně dělení vektoru číslem) se provádí „po složkách" a výsledek je opět vektor. Platí analogie s běžnými algebraickými „radovánkami", které jsme zvyklí používat u čísel. Např. vynechání znaménka násobení při $2\vec{v}$ (správně by mělo být $2 \cdot \vec{v}$), nebo rovnost $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-1)\vec{v}$ a podobně. Zřejmá je i platnost komutativního zákona, tj. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, zákona distributivního, např. $3(\vec{u} + \vec{v}) = 3\vec{u} + 3\vec{v}$, a dalších. Vektor *opačný* k vektoru $\vec{v}$ je vektor $-\vec{v} = (-1)\vec{v}$; součet vektoru a jeho opačného vektoru je vektor nulový $\vec{o}$.

Zvláštní pozornost je třeba věnovat skalárnímu součinu. Jde také o násobení po složkách, ale **výsledky se musí sečíst** a tak dostaneme jediné číslo. Opět platí takové zákony jako komutativní, tj. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$, a distributivní, tj. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$, a podobně, či lze provést následující úpravu „smíšeného" výrazu $\vec{u} \cdot (7\vec{v}) = 7(\vec{u} \cdot \vec{v})$.

Připomeňme též použití sumačního znaménka[1] pro zápis skalárního součinu:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

Vztah mezi normou (též *absolutní hodnotou, velikostí*) vektoru a skalárním součinem: pro každý vektor $\vec{v}$ platí $\lVert\vec{v}\rVert = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$. Nulový vektor je **jediný** vektor s nulovou normou.

[1] čteme „suma $u_i v_i$ pro i od 1 do n"

Definice. Dva nenulové n-složkové vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ nazveme navzájem *rovnoběžné (kolineární, paralelní)*, když existuje reálné číslo r tak, že $\vec{u} = r\vec{v}$. Dva n-složkové vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ nazveme navzájem *kolmé (ortogonální)*, když $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Vektor $\vec{v}$ se nazývá *jednotkový*, jestliže $\|\vec{v}\| = 1$. Každý nenulový vektor $\vec{v}$ je možno *znormovat*, tj. vytvořit nový vektor $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v}$, který je zároveň jednotkový a s původním rovnoběžný.

Ukázky: Uvažme vektory $\vec{s} = (0.6,\ 0, -0.8)$, $\vec{t} = (-6, 0, 8)$, $\vec{u} = (4, 0, 3)$. Potom platí, že vektory $\vec{s}$, $\vec{t}$ jsou rovnoběžné ($\vec{t} = -10\vec{s}$), a že vektory $\vec{t}$, $\vec{u}$ jsou ortogonální ($\vec{t} \cdot \vec{u} = 0$). Vektor $\vec{s}$ je jednotkový, zatímco vektor $\vec{u}$ má normu rovnu $\sqrt{25} = 5$. Jestliže vektor $\vec{u}$ znormujeme, dostaneme jednotkový vektor s ním rovnoběžný $\frac{\vec{u}}{5} = (\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}) = (0.8, 0, 0.6)$.

Speciálním případem jednotkových vektorů jsou tzv. *základní jednotkové vektory*, jejichž jedna složka je rovna 1 a ostatní složky rovny 0 (např. $(0,0,0,1,0)$); rezervujeme pro ně symbol $\vec{e}$.

ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Řešený příklad 2.1.1. Dány vektory $\vec{a} = (10, 3, -5, 1)$, $\vec{b} = (1.6\,, 0, 1, 1)$, $\vec{c} = (4, 4, 2)$.

(a) Určete vektor $2\vec{a} - 5\vec{b} + 7\vec{o}$. (b) Najděte skalární součin každých dvou z nich.

(c) Znormujte vektor $\vec{c}$ (d) Řešte rovnici $3\vec{a} + 2\vec{x} = \vec{b}$.

Řešení. (a) $2\vec{a} - 5\vec{b} + 7\vec{o} = (20, 6, -10, 2) - (8, 0, 5, 5) + (0, 0, 0, 0) = (12, 6, -15, -3)$ (provedení ovšem vyžaduje, aby $\vec{o}$ byl 4-složkový).

(b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 16 + 0 - 5 + 1 = 12$; další skalární součiny nelze provést, neboť vektory nemají stejný počet složek.

(c) Nejdříve $\|\vec{c}\| = \sqrt{16 + 16 + 4} = \sqrt{36} = 6$. Nyní je $\frac{\vec{c}}{\|\vec{c}\|} = (\frac{4}{6}, \frac{4}{6}, \frac{2}{6}) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

(d) Provedeme formální úpravy zadané rovnice, tj. „převedeme“ $3\vec{a}$ na pravou stranu a pak celou rovnici dělíme 2 a dostaneme $\vec{x} = \frac{1}{2}(\vec{b} - 3\vec{a}) = (-14.2\,,\ -4.5\,,\ 8, -1)$.

Řešený příklad 2.1.2. Dány vektory $\vec{u}$, $\vec{w}$, kde: $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 5$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = -14$. Z těchto údajů určete: (a) $\|\vec{v}\,\|$, (b) $\|\vec{u} - \vec{v}\|$.

Řešení. (a) Vyjdeme ze vztahu $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \|\vec{v}\|^2$

(s využitím $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$) a dostáváme $25 = 4 + 2 \cdot (-14) + \|\vec{v}\|^2$ a tedy $\|\vec{v}\| = \sqrt{49} = 7$.

(b) Počítáme $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \|\vec{v}\,\|^2 = 4 - 2 \cdot (-14) + 49 = 81$ (využili jsme výsledku $\|\vec{v}\| = 7$), tedy $\|\vec{u} - \vec{v}\,\| = \sqrt{81} = 9$.

Řešený příklad 2.1.3. Ve vektoru $\vec{v} = (8, x, 2, x)$, určete reálné číslo x tak, aby vektory $\vec{v}$ a $\vec{w} = (1, 4, 2, -1)$ byly

(a) ortogonální, (b) rovnoběžné; dále, aby (c) $\|\vec{v}\,\| = 10$, (d) $\vec{v}$ byl jednotkový vektor.

Řešení. (a) Kolmé vektory mají skalární součin roven 0, takže dospíváme k rovnici

$\vec{v} \cdot \vec{w} = 8 \cdot 1 + x \cdot 4 + 2 \cdot 2 + x \cdot (-1) = 0$, tj. $12 + 3x = 0$, a tedy $x = -4$.

(b) Pokud jsou vektory rovnoběžné, musí být nutně $\vec{v} = 8 \cdot \vec{w}$, vzhledem k hodnotě jejich prvních složek. Tento vztah však neplatí pro třetí složky, takže žádné požadované x nelze nalézt.

(c) Požaduje se $\|\vec{v}\|^2 = 100$, tj. $64 + x^2 + 4 + x^2 = 100$ a tedy $2x^2 = 32$, což je kvadratická rovnice s kořeny $x_1 = 4$, $x_2 = -4$. Požadavek splňují vektory $(8, 4, 2, 4)$ a $(8 - 4, 2, -4)$

(d) Požadavek nelze splnit, neboť vede na kvadratickou rovnici $2x^2 = -67$, která nemá v oboru reálných čísel žádné řešení.

ÚLOHY K ŘEŠENÍ

1. Dány čtyři 3-složkové vektory $\vec{p} = (2,0,8)$, $\vec{q} = (4,2,-1)$, $\vec{r} = (1,-1,2)$, $\vec{s} = (-2,2,4)$.

(a) Vypočtěte vektor $2\vec{p} - 3\vec{r}$, a vektor $\frac{1}{4}(\vec{p} + \vec{q} + \vec{r} + \vec{s})$,

(b) zjistěte, který ze zadaných vektorů má největší normu,

(c) znormujte každý ze zadaných vektorů,

(d) zjistěte, které dvojice zadaných vektorů jsou paralelní a které ortogonální.

2. Řešte (uvažované vektory $\vec{v}$ a $\vec{w}$ mají stejný počet složek):

(a) je-li $\|\vec{v}\| = 5$, $\|\vec{w}\| = 3, \vec{v} \cdot \vec{w} = -2$, určete $\|\vec{v} + \vec{w}\|$ a také $\|\vec{v} - \vec{w}\|$,

(b) je-li $\|\vec{v}\| = 10$, $\|\vec{v} - \vec{w}\| = 7\sqrt{2}$, $\vec{v} \cdot \vec{w} = 2$, určete $\|\vec{w}\|$ a také $\|\vec{v} + \vec{w}\|$,

(c) je-li $\|\vec{v} + \vec{w}\| = 3$, $\|\vec{v} - \vec{w}\| = \sqrt{5}$, určete $\vec{v} \cdot \vec{w}$,

(d) je-li $\|\vec{v}\| = 1$, $\|\vec{v} + \vec{w}\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{v} - \vec{w}\| = \sqrt{2}$, určete $\|3\vec{v} - 2\vec{w}\|$.

3. Dány vektory $\vec{k} = (2,3,2,1)$, $\vec{m} = (4,2,-1,0)$, $\vec{n} = (0,-4,-5,-2)$. Najděte řešení (tj. neznámý vektor $\vec{x}$) zadaných rovnic:

(a) $\vec{x} + \vec{m} = 2\vec{k} + 17\vec{n}$,

(b) $\vec{n} - \frac{1}{2}\vec{x} = \vec{k}$

(c) $2(\vec{n} - \vec{x}) + 3(\vec{k} + \vec{x}) = \vec{m} + \vec{x}$,

(d) $5(\vec{m} - 2\vec{x}) = \vec{o}$, kde $\vec{o}$ má dimenzi 4,

(e) $\frac{1}{4}(\vec{k} + \vec{m} + \vec{n} + \vec{x}) = \vec{x}$.

(f) $\vec{m} - 2(\vec{k} + \vec{x}) + 4\vec{x} = \vec{n} + 2\vec{x}$.

4. Určete vždy neznámé reálné číslo r tak, aby:

(a) vektor $(0,1,r,2r,2)$ měl normu 5,

(b) vektory $(1,-7)$, $(r,5)$ byly rovnoběžné,

(c) vektory $(1,2,r,6,1)$, $(4,0,5,r,2)$ byly ortogonální,

(d) vektor $(3,1,-r)$ měl větší normu než vektor $(r,2,-1)$

(e) vektor $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, r, r)$ byl jednotkový,

(f) vektor $(1,-1,0,r)$ byl jednotkový,

(g) vektory $(r,5,0)$, $(r,-r,5)$ měly skalární součin -6,

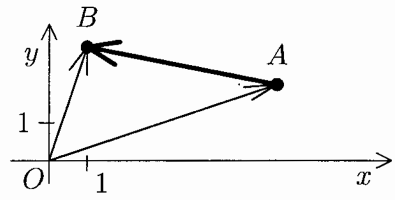
(h) vektory $(2,r,3,-1)$, $(-1,0,1,1)$ byly ortogonální.

APLIKACE

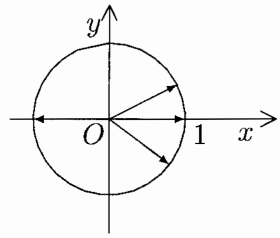
(A) Analytická geometrie. Tradiční a velice užitečné je používání vektorů v analytické geometrii v rovině a prostoru. Rozlišují se *vázané* vektory a *volné* vektory. Vázaný vektor je zadán jako uspořádaná dvojice geometrických bodů (orientovaná úsečka), např. v rovině bod $A = [6,2]$ jako počáteční a bod $B = [1,3]$ jako koncový bod. Příslušný volný vektor se pak „vypočte“ formální algebraickou operací $\vec{v} = B - A = (1-6,\ 3-2) = (-5,1)$.

Také je zvykem každý bod lokalizovat jako koncový bod tzv. *polohového vektoru*, jehož počáteční bod je vždy počátek soustavy souřadné O (v rovině je to $O = [0,0]$, v prostoru pak $O = [0,0,0]$).

Na obrázku jsme znázornili uvedené body A, B jako body v rovině opatřené katézskou soustavou souřadnou. Dále jsme jako orientované úsečky zakreslili jejich polohové vektory (slaběji) a též vektor $\vec{v} = B - A$ (silněji). Všechny takto zakreslené vektory se chápou jako vázané vektory, které jsou „reprezentacemi“ vektorů volných.



Jednoduchou ukázkou využití polohových vektorů k charakterizaci útvarů v rovině je pojetí *jednotkové kružnice* jako **množiny všech bodů**, jejichž polohový vektor má normu rovnu 1 (viz obrázek).



Analogické postupy se aplikují v případě prostorové („3-složkové“) geometrie.

Zejména úspěšné je využití vektorů k popisu tzv. *lineárních útvarů*. V této souvislosti je nutno zmínit vzorec pro *úhel α dvou vektorů $\vec{u}, \vec{v}$* (oba vektory se předpokládají nenulové):

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}}$$

Shrňme některé základní aplikace vektorů v rovině a prostoru.

Přímka v rovině: *Obecná rovnice* přímky je $ax+by+c = 0$, kde (a, b) je tzv. *normálový vektor* přímky a udává směr „kolmý“ na směr přímky, $X = [x, y]$ je libovolný bod přímky.

Pro *parametrické rovnice* přímky v rovině je $A = [a_1, a_2]$ je zvolený bod přímky, $\vec{u} = (u_1, u_2)$ je tzv. *směrový vektor* přímky, t je parametr (pro přímku je $t \in (-\infty, +\infty)$, pro úsečku je $t \in \langle t_1, t_2\rangle$, pro polopřímku je např. $t \in (-\infty, t_1\rangle$ apod.)

$$x = a_1 + t \cdot u_1$$
$$y = a_2 + t \cdot u_2$$

Přímka v prostoru: *Parametrické rovnice* jsou analogické jako v rovině; přitom $A = [a_1, a_2, a_3]$ je zvolený bod přímky, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ je tzv. směrový vektor přímky, t je parametr, $X = [x, y, z]$ je libovolný bod přímky.

$$x = a_1 + t \cdot u_1$$
$$y = a_2 + t \cdot u_2$$
$$z = a_3 + t \cdot u_3$$

Rovina v prostoru: *Obecná rovnice* roviny: $ax + by + cz + d = 0$, kde (a, b, c) je *normálový* vektor roviny udávající směr kolmý k rovině, $X = [x, y, z]$ je libovolný bod roviny.

Pro *parametrické rovnice* roviny je $A = [a_1, a_2, a_3]$ její zvolený bod, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ jsou dva (nekolineární) vektory ležící v dané rovině, $t \in (-\infty, +\infty)$, $s \in (-\infty, +\infty)$ jsou parametry.

$$x = a_1 + s \cdot u_1 + t \cdot v_1$$
$$y = a_2 + s \cdot u_2 + t \cdot v_2$$
$$z = a_3 + s \cdot u_3 + t \cdot v_3$$

Užitečným pojmem pro práci s vektory v prostoru je tzv. vektorový součin.

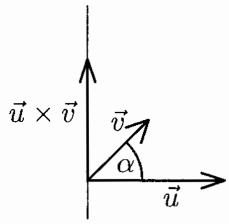
Definice. Pro každé dva 3-složkové vektory $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ je definován *vektorový součin* $\vec{u} \times \vec{v}$, což je **vektor kolmý na oba původní**, předpisem

$$\vec{u} \times \vec{v} = (\, u_2v_3 - u_3v_2 \,,\, -u_1v_3 + u_3v_1 \,,\, u_1v_2 - u_2v_1 \,)$$

Jsou-li vektory $\vec{u}, \vec{v}$ nenulové a je-li α úhel, který svírají, platí:

$$\boxed{\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\sin \alpha|}.$$

Na rozdíl od skalárního součinu je vektorový součin opět vektor. Je definován **pouze** pro 3-složkové vektory a závisí na pořadí násobených vektorů – platí totiž $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$. Trojice $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u} \times \vec{v}$ tvoří v prostoru pravotočivý systém (viz obrázek).



ŘEŠENÉ APLIKAČNÍ PŘÍKLADY

Řešený aplikační příklad 2.1.1. V rovině jsou dány body $A = [6, 2]$, $B = [1, 3]$, $C = [4, 7]$.

(a) napište rovnici přímky p určené body A, B (obecný i parametrický tvar),

(b) bodem C veďte rovnoběžku a kolmici k přímce p.

Řešení. (a) Směrový vektor vytvoříme jako $\vec{v} = B - A = (-5, 1)$, normálový vektor pak jako jakýkoliv k němu kolmý, např. $(2, 10)$. Parametrické rovnice hledané přímky mohou být tedy (s použitím bodu B): $x = 1 - 5t$, $y = 3 + t$.

Z nich je možno získat obecnou rovnici vyloučením parametru: $t = y - 3$ z druhé rovnice dosadíme do první a upravíme $x = 1 - 5(y - 3) = 16 - 5y$; výsledek je $x + 5y - 16 = 0$.

Druhá možnost je vyjít z normálového vektoru, tj. napsat „polotovar“ $2x + 10y + c = 0$ a do něj dosadit např. bod B, což dá podmínku pro c tvaru $2 \cdot 1 + 10 \cdot 3 + c = 0$. Nutně je $c = -32$ a výsledek $2x + 10y - 32 = 0$ je „dvojnásobkem“ již získané rovnice.

(b) rovnoběžka: $x = 4 - 5k$, $y = 7 + k$, kolmice: $x = 4 + 2l$, $y = 7 + 10l$.

Řešený aplikační příklad 2.1.2. V rovině jsou dány dvě přímky $p_1 : 4x - 3y + 3 = 0$, a $p_2 : x + y + 9 = 0$. Určete velikost úhlu, který svírají.

Řešení. Úhel zadaných přímek určíme jako úhel jejich normálových vektorů $(4, -3), (1, 1)$:

$$\cos \alpha = \frac{4 \cdot 1 + (-3) \cdot 1}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{2}} \doteq 0.14142 \text{ a tedy } \alpha \doteq 81.87^0.$$

Řešený aplikační příklad 2.1.3. V prostoru jsou dány dvě roviny

$\varrho_1 : x = 8 + 2s + 3t$, $y = -1 + s - t$, $z = 2 + 2s + t$, $\varrho_2 : 2x - 3y + 5z + 1 = 0$.

(a) Vyjádřete rovinu ϱ_2 v parametricky,

(b) určete velikost úhlu, který spolu svírají obě roviny,

(c) určete velikost úhlů, které svírá přímka $p : x = 2 + 3k$, $y = -2 + 2k$, $z = 1 + 9k$ s každou z rovin.

Řešení. (a) Normálový vektor roviny ϱ_2 je $\vec{v}_2 = (2, -3, 5)$. Potřebujeme dva nekolineární vektory k němu kolmé, to jsou např. $(3, 2, 0), (5, 0, -2)$ a jeden bod roviny, např. $[1, 1, 0]$. Nyní již lze napsat parametrické rovnice (e, f jsou parametry): $x = 1 + 3e + 5f$, $y = 1 + 2e$, $z = -2f$.

(b) Opět užijeme normálových vektorů. Přitom normálový vektor roviny ϱ_1 vypočteme výhodně jako vektorový součin $\vec{v}_1 = (2,1,2) \times (3,-1,1) = (3,4,-5)$. Nyní již $\cos\alpha = \dfrac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{\|\vec{v}_1\|\|\vec{v}_2\|} \doteq -0.711$ a tedy $\alpha \doteq 135.33^0$. Úhel zkoumaných rovin je $180^0 - 135.33^0 \doteq 44.67^0$.

(c) Nejdříve určíme úhly α_1, α_2 mezi směrovým vektorem přímky p a normálovými vektory rovin ϱ_1, ϱ_2 opět užitím vzorce $\cos\alpha = \ldots$. Snadno zjistíme $\cos\alpha_1 \doteq -0.408$, $\cos\alpha_2 \doteq 0.753$, tj. $\alpha_1 \doteq 144.11^0$, $\alpha_2 \doteq 41.15^0$.

Tedy hledané úhly přímky a rovin jsou po řadě doplňky do 90^0, tj. $-(90^0 - 144.11^0) \doteq 54.11^0$ pro první úhel a $(90^0 - 41.15^0) \doteq 48.85^0$ pro druhý.

(B) Ekonomické úvahy. Využití vektorů a matic v ekonomických úvahách rozebereme podrobně v následující podkapitole. Zde připomeňme na příkladě ekonomickou interpretaci vektorů a skalárního součinu.

Řešený aplikační příklad 2.1.4. Prodejce objednává od výrobce 6 druhů ložisek, jejichž katalogová čísla jsou po řadě *62052RS, 6310, 22212, 22224, NU308, NJ311.* Počty kusů dle jednotlivých druhů zapíšeme po řadě do vektoru nákupu $\vec{n} = (1000, 100, 50, 10, 40, 50)$ a dále vytvoříme vektor cen v Kč (opět zachováme pořadí cen podle druhu zboží): $\vec{c} = (56, 112, 938, 1560, 125, 156)$. Celková cena objednávky (fakturovaná částka) bude skalární součin $\vec{n} \cdot \vec{c} = 142500$ Kč.

APLIKAČNÍ ÚLOHY K ŘEŠENÍ

1. V rovině je dán trojúhelník ABC, kde $A = [3,3]$, $B = [-1,5]$, $C = [2,7]$.
(a) Napište rovnice všech stran $\triangle ABC$ (jako přímek),
(b) napište rovnice všech výšek $\triangle ABC$ (jako přímek),
(c) napište rovnice všech těžnic $\triangle ABC$ (jako přímek),
[nápověda: střed úsečky PQ se vypočte jako $S = \frac{P+Q}{2}$],
(d) zjistěte velikosti všech vnitřních úhlů $\triangle ABC$.

2. V prostoru je dán trojúhelník ABC, kde $A = [3,3,0], B = [-1,5,2], C = [2,7,6]$.
(a) Napište rovnice všech stran $\triangle ABC$ (jako přímek),
(b) napište rovnice všech výšek $\triangle ABC$ (jako přímek),
(c) napište rovnice všech těžnic $\triangle ABC$ (jako přímek),
[nápověda: střed úsečky PQ se vypočte jako $S = \frac{P+Q}{2}$],
(d) zjistěte velikosti všech vnitřních úhlů $\triangle ABC$,
(e) napište rovnici roviny určené body A, B, C.

3. V rovině je dán čtyřúhelník $ABCD$, kde $A = [-3,3]$, $B = [-1,-2]$, $C = [2,1]$, $D = [1,5]$.
(a) Zjistěte velikost délek jeho úhlopříček, (b) Zjistěte velikost úhlu jeho úhlopříček.

4. V prostoru jsou dány: bod $M = [1,2,3]$, přímka $p: x = 1 + 2t, y = 6 + 7t, z = -3 - t$ a rovina $\varrho: x = 1 + k + l,\ y = -1 + 2k + l,\ z = 3k - l$.
(a) Bodem M veďte rovnoběžku a kolmici s přímkou p,
(b) bodem M veďte rovinu rovnoběžnou s rovinou ϱ,
(c) určete úhel, který svírá přímka p s rovinou ϱ.

5. Na vektorech $\vec{u} = (1,2,3)$, $\vec{v} = (-1,5,1)$, $\vec{w} = (4,4,4)$ potvrďte výpočtem, že obecně je $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$.

6. Vraťme se k příkladu o nákupu ložisek, z něhož použijeme vektory $\vec{n}$ (nákup) a $\vec{c}$ (ceny).

(a) Jakou interpretaci má operace $\frac{1}{2}\vec{n}$?

(b) Jakou operaci provedete s vektorem cen $\vec{c}$, máte-li přičíst ke všem cenám 5%-ní DPH?

(c) Jestliže provede prodejce ještě nákup $\vec{m} = (500, 80, 10, 10, 20, 20)$, co znamená operace $\vec{n} + \vec{m}$ a co operace $(\vec{n} + \vec{m}) \cdot \vec{c}$?

KREATIVNÍ ÚLOHY

1. Proveďte soupis všech základních jednotkových vektorů dimenze 5.

2. Najděte aspoň čtyři **ne**základní vektory dimenze 4.

3. Charakterizujte v rovině množinu všech koncových bodů vektorů, jejichž počáteční bod je $[1, 3]$ a norma 5.

4. Jaký útvar v prostoru tvoří všechny body, jejichž polohový vektor je jednotkový?

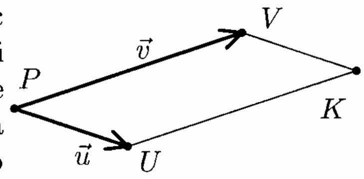
5. Jaká je potíž s výrazem $\vec{u} \cdot \vec{v} \cdot \vec{w}$?

6. Existuje vektor ortogonální sám k sobě?

7. Najděte nenulový vektor kolmý k oběma následujícím: $(1, 3, 4, 1, 5)$, $(-1, 7, 1, 3, -1)$.

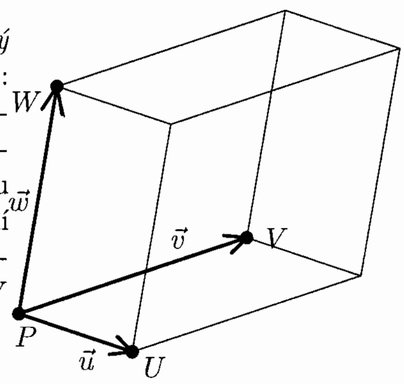
8. Pokuste se vysvětlit, co znamená zápis $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}$.

9. Při definici vektorového součinu jsme uvedli i známý vzorec pro jeho normu, tj. pro $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$. Geometrickou interpretaci tohoto vzorce jsme znázornili na obrázku: Vektory umístíme do společného počátečního bodu P a provedeme doplnění na rovnoběžník $PUKV$. Právě $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ je přímo obsah tohoto obrazce a tedy obsah $\triangle PUV$ je $\frac{1}{2}\|\vec{u} \times \vec{v}\|$



Pomocí vektorového součinu určete obsah trojúhelníku s vrcholy $A = [3, 3, 0]$, $B = [-1, 5, 2]$, $C = [2, 7, 6]$.

10Pro tři 3-složkové vektory se někdy definuje tzv. *smíšený součin* (tj. kombinace skalárního a vektorového součinu): $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$. Geometrická interpretace výsledku tohoto násobení (v absolutní hodnotě) je opět znázorněna na obrázku: vektory se umístí do společného počátečního bodu P, jejich koncové body jsou U, V, W a celý náčrt se doplní na rovnoběžnostěn – jeho objem je právě výsledkem smíšeného součinu. Z toho plyne, že objem čtyřstěnu $PUVW$ je roven $\frac{1}{6}\,|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}|$.



Pomocí smíšeného součinu určete objem čtyřstěnu s vrcholy $A = [3, 3, 0]$, $B = [-1, 5, 2]$, $C = [2, 7, 6]$, $D = [1, 1, 10]$.

11V prostoru platí zřejmě: „body A, B, C, D leží v jedné rovině, právě když čtyřstěn jimi vytvořený má nulový objem.“ Je tedy možno použít smíšený součin vektorů (viz předchozí úloha) na otestování, zda čtveřice bodů v prostoru leží v jedné rovině. Jak se to provede?

2.2. Matice

Definice: Uspořádané schéma reálných čísel $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ se nazývá *matice typu* $m \times n$ (někdy též *typu* (m,n)). Položky a_{ij} tohoto seznamu nazýváme *prvky* matice A, přitom i je *řádkový index* a j je *sloupcový index* prvku a_{ij}. *Nulová* matice typu $m \times n$ má všechny prvky rovny nule a označí se O nebo přesněji $O_{m \times n}$.

Řekneme, že dvě matice A, B typu $m \times n$ jsou si *rovny* a zapíšeme $A = B$, jestliže platí $a_{ij} = b_{ij}$ pro každé $i = 1, 2, \dots, m$ a každé $j = 1, 2, \dots, n$. To znamená, že pro rovnost dvou matic požadujeme stejný typ (rozměr) a rovnost všech příslušných prvků.

Pro zápis matice se používají různé typy závorek. Uvádíme to na příkladě matice A typu 2×3, jejíž prvky jsou $a_{11} = 0$, $a_{12} = -13$, $a_{13} = 5.5$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = 0$, $a_{23} = -2.1$.
Indexy slouží k jednoznačné lokalizaci prvků ve schématu (mluví se též o pozici prvku v matici). Je-li $m < 10$ není nutno oddělit indexy čárkou a tak je zápis $a_{1,3}$ zjednodušen na a_{13} [a čteme ho „á jedna tři“, nikoliv „á třináct“].

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -13 & 5.5 \\ 1 & 8 & -2.1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -13 & 5.5 \\ 1 & 8 & -2.1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & -13 & 5.5 \\ 1 & 8 & -2.1 \end{Vmatrix}$$

Nejčastěji použijeme pro matice hranatých závorek. Využívá se i symbolický zápis $A = (a_{ij})$ nebo $A = [a_{ij}]$.

Prvky a_{ii}, jejichž řádkový index je roven sloupcovému, tvoří *hlavní diagonálu* (úhlopříčku) matice A. V uvedeném příkladě je hlavní diagonála tvořena prvky $a_{11} = 0$, $a_{22} = 8$.

Definice. Jsou dány dvě matice A, B stejného typu $m \times n$ a reálné číslo r. Definujeme následující početní *operace* (úkony):

součet matic	$A + B$	prvky výsledku se vypočtou jako $a_{ij} + b_{ij}$
rozdíl matic	$A - B$	prvky výsledku se vypočtou jako $a_{ij} - b_{ij}$
r-násobek matice	$r \cdot A$	prvky výsledku se vypočtou jako $r \cdot a_{ij}$
matice *transponovaná*	A^{T}	výsledkem je matice typu $n \times m$, kde $a^{\mathrm{T}}{}_{ij} = a_{ji}$

Ukázky: Pro matice $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1.2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ bude

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3.2 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad A - B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0.8 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad 2A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 4 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix}, \quad A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Poznámka: Sčítání a odčítání matic a násobení matice číslem (případně dělení matice číslem) se provádí „po prvcích“ a výsledek je opět matice. Opět lze uplatnit řadu zvyklostí. Např. vynechání znaménka násobení u $2A$ (správně by mělo být $2 \cdot A$), nebo rovnost $A - B = A + (-1)B$, zavedení opačné matice k matici A jako $-A$, a podobně. Zřejmá je i platnost komutativního zákona tj. $A + B = B + A$, zákona distributivního, např. $3(A+B) = 3A+3B$, a dalších. Nulové matice působí jako „nuly" při sčítání: $A+O = O+A = O$ (ovšem mlčky předpokládáme, že A a O jsou stejného typu).

Užitečná operace je *transponování* matice. Vzniklá matice (vedle označení A^{T} též A') obsahuje stejné prvky jako původní, ale uspořádané jiným způsobem. Sloupci v nové matici se stanou řádky původní matice. Při tomto „zrcadlovém přemístění" zůstanou na místě pouze diagonální prvky. U nečtvercové (tzv. *obdélníkové*) matice se též změní typ.

Zřejmé jsou např. vztahy $(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$, $(rA)^{\mathrm{T}} = r(A^{\mathrm{T}})$, $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$.

Definice. Matici typu $n \times n$ nazýváme též *čtvercovou maticí řádu n*. Čtvercovou matici A nazveme *symetrickou*, jestliže $A = A^{\mathrm{T}}$. *Diagonální* maticí nazveme takovou čtvercovou matici, jejíž všechny prvky ležící **mimo** diagonálu jsou nulové. Zřejmě každá diagonální matice je symetrická.
Jednotková matice řádu n je diagonální matice, která má všechny prvky diagonály rovny číslu 1; označíme ji E (resp.$E_{n\times n}$) – též se užívá J nebo I.

Ukázky symetrických, diagonálních a jednotkových matic 2. a 3. řádu:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1.2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1.2 & -2 & -8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definice. V matici A typu $m \times n$ nazveme n-složkový vektor $\vec{a}_{i*} = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ jejím *i-tým řádkovým vektorem* a dále nazveme m-složkový vektor $\vec{a}_{*j} = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$ jejím *j-tým sloupcovým vektorem.*

Je-li A matice typu $m \times p$ a B matice typu $p \times n$ pak je definován *součin matic A* a B jako matice $A \cdot B = C$ (v tomto pořadí) následovně:
matice C je typu $m \times n$, pro každé $i = 1, 2, \ldots, m$ a každé $j = 1, 2, \ldots n$ je

$$c_{ij} = \vec{a}_{i*} \cdot \vec{b}_{*j}$$

neboli pomocí sumačního znaménka

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Schematicky lze tuto operaci znázornit následovně:[2]

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} \vec{a}_{1*} \\ \vec{a}_{2*} \\ \ldots \\ \vec{a}_{m*} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{b}_{*1} & \vec{b}_{*2} & \ldots & \vec{b}_{*n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a}_{1*} \cdot \vec{b}_{*1} & \vec{a}_{1*} \cdot \vec{b}_{*2} & \ldots & \vec{a}_{1*} \cdot \vec{b}_{*n} \\ \vec{a}_{2*} \cdot \vec{b}_{*1} & \vec{a}_{2*} \cdot \vec{b}_{*2} & \ldots & \vec{a}_{2*} \cdot \vec{b}_{*n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \vec{a}_{m*} \cdot \vec{b}_{*1} & \vec{a}_{m*} \cdot \vec{b}_{*2} & \ldots & \vec{a}_{m*} \cdot \vec{b}_{*n} \end{bmatrix}$$

[2] Násobení matic zavedl anglický matematik Arthur Cayley [čti „keli"], (1821 – 1895)

Z definice je patrno, že násobit lze jen matice A, B takové, že „délka“ řádků matice A je rovna „délce“ sloupců matice B. Prvky výsledné matice, která „zdědí“ řádkový rozměr po matici A a sloupcový rozměr po matici B, vznikají jako skalární součiny řádků první matice a sloupců druhé matice.

Podstatné je pořadí matic při násobení, např. v tomto ilustrativním příkladě není součin $B \cdot A$ vůbec definován.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 3.2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\vec{a}_{1*} \cdot \vec{b}_{*1} = (1,1,-3) \cdot (5,1,2) = 0$
$\vec{a}_{1*} \cdot \vec{b}_{*2} = (1,1,-3) \cdot (-4,4,1) = -3$
$\vec{a}_{1*} \cdot \vec{b}_{*3} = (1,1,-3) \cdot (0,0,0) = 0$
$\vec{a}_{1*} \cdot \vec{b}_{*4} = (1,1,-3) \cdot (0,0,0) = 0$ Dále:
$\vec{a}_{2*} \cdot \vec{b}_{*1} = 18.4, \qquad \vec{a}_{2*} \cdot \vec{b}_{*2} = 3.2,$
$\vec{a}_{2*} \cdot \vec{b}_{*3} = 0, \qquad \vec{a}_{2*} \cdot \vec{b}_{*4} = 0.$

Výsledek: $A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 18.4 & 3.2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Poznámka. Třída všech matic je opatřena řadou algebraických operací, které však nejsou vždy proveditelné, např. ne každé dvě matice lze sečíst. U násobení matic je důležité pořadí: je-li A typu 2×4 a B typu 4×2 pak, $A \cdot B$ je typu 2×2, zatímco $B \cdot A$ je typu 4×4. Ani jsou-li matice A, B čtvercové stejného řádu, **neplatí** obecně rovnost $A \cdot B = B \cdot A$. Tedy: **násobení matic nesplňuje komutativní zákon**.

Platí však řada známých algebraických zákonů, jako (pokud má jedna strana rovnosti smysl):

(1) asociativní zákon: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$,

(2) distributivní zákony: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$, $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$,

(3) násobení „jednotkou“: $A \cdot E = A$, $E \cdot A = A$, [tj. E hraje roli „jednotky“],

(4) transponování součinu: $(A \cdot B)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}}$ [pozor na výměnu pořadí matic!].

U čtvercových matic lze definovat též *mocniny*: $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A \cdot A \cdot A$ atd., (případně i $A^0 = E$). Dělení matice maticí **není definováno**.

ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Řešený příklad 2.2.1. Dány matice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1.3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

(a) Najděte matici $3A - 2B$ a matici $A - B^{\mathrm{T}}$, (b) Prověřte, že platí $(A + B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$,

(c) Řešte maticovou rovnici $A + 2X - 5O = B$, kde O je typu 2×3.

Řešení. (a) $3A - 2B = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 6 & 3 & 3.9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -15 \\ 6 & 3 & -6.1 \end{bmatrix}$;

Druhý z výrazů nelze vypočítat, neboť jde o matice nestejného typu.

(b) Skutečně je postupně $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1.3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 6.3 \end{bmatrix}$,

$$A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -3 & 1.3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 6.3 \end{bmatrix} = (A + B)^{\mathrm{T}}$$

(c) Běžnou symbolickou úpravou zadané rovnice („převedení“ některých členů na druhou stranu a pak násobení obou stran rovnice číslem $\frac{1}{2}$) dostaneme

$$X = \tfrac{1}{2}(B + 5O_{2\times 3} - A) = \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ -2 & -1 & 3.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -1 & -0.5 & 1.85 \end{bmatrix}.$$

Řešený příklad 2.2.2. Dány matice $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Vypočtěte součiny $P \cdot Q$ a $Q \cdot P$,

(b) prověřte rovnost $(P \cdot Q)^{\mathrm{T}} = Q^{\mathrm{T}} \cdot P^{\mathrm{T}}$,

(c) prověřte rovnosti $P \cdot E_{3\times3} = P$, $E_{2\times2} \cdot P = P$.

Řešení.

(a) $$P \cdot Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot0+1\cdot2+0\cdot3 & 1\cdot(-4)+1\cdot1+0\cdot0 \\ 7\cdot0+3\cdot2+2\cdot3 & 7\cdot(-4)+3\cdot1+2\cdot0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 12 & -25 \end{bmatrix}$$

$$Q \cdot P = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\cdot1+(-4)\cdot7 & 0\cdot1+(-4)\cdot3 & 0\cdot0+(-4)\cdot2 \\ 2\cdot1+1\cdot7 & 2\cdot1+1\cdot3 & 2\cdot0+1\cdot2 \\ 3\cdot1+0\cdot7 & 3\cdot1+0\cdot3 & 3\cdot0+0\cdot2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -28 & -12 & -8 \\ 9 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) $$Q^{\mathrm{T}} \cdot P^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\cdot1+2\cdot1+3\cdot0 & 0\cdot7+2\cdot3+3\cdot2 \\ (-4)\cdot1+1\cdot1+0\cdot0 & (-4)\cdot7+1\cdot3+0\cdot2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ -3 & -25 \end{bmatrix}$$

což je skutečně rovno $(P \cdot Q)^{\mathrm{T}}$.

(c) Vypočteme nejdříve $P \cdot E_{3\times3}$ a pak $E_{2\times2} \cdot P$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot1+1\cdot0+0\cdot0 & 1\cdot0+1\cdot1+0\cdot0 & 1\cdot0+1\cdot0+0\cdot1 \\ 7\cdot1+3\cdot0+2\cdot0 & 7\cdot0+3\cdot1+2\cdot0 & 7\cdot0+3\cdot0+2\cdot1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot1+0\cdot7 & 1\cdot1+0\cdot3 & 1\cdot0+0\cdot2 \\ 0\cdot1+1\cdot7 & 0\cdot1+1\cdot3 & 0\cdot0+1\cdot2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Řešený příklad 2.2.3. Dány matice $R = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Prověřte rovnosti $R \cdot O_{2\times2} = O_{2\times2} = O_{2\times2}$,

(b) prověřte $R \cdot S \neq S \cdot R$,

(c) vypočtěte matice R^2 a R^4.

Řešení.

(a) $$R \cdot O = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot0+2\cdot0 & 1\cdot0+2\cdot0 \\ 1\cdot0+3\cdot0 & 1\cdot0+3\cdot0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$O \cdot R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\cdot1+0\cdot1 & 0\cdot2+0\cdot3 \\ 0\cdot1+0\cdot1 & 0\cdot2+0\cdot3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

(b) $$R \cdot S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot2+2\cdot(-1) & 1\cdot0+2\cdot1 \\ 1\cdot2+3\cdot(-1) & 1\cdot0+3\cdot1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$S \cdot R = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot1+0\cdot1 & 2\cdot2+0\cdot3 \\ (-1)\cdot1+1\cdot1 & (-1)\cdot2+1\cdot3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

(c) $$R^2 = R \cdot R = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}, \quad R^4 = R^2 \cdot R^2 = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 & 112 \\ 56 & 143 \end{bmatrix}.$$

ÚLOHY K ŘEŠENÍ

1. O čtyřech maticích víme: A je typu 2×4, B je typu 2×2, C je typu 4×3, D je typu 4×2. Určete typ matice X v následujících rovnicích (pokud by měly řešení):

(a) $3A + X = A$ (b) $2X - 3D = A^{\mathrm{T}}$

(c) $B - X = 2D$ (d) $B \cdot X = E_{2\times 2}$

(e) $X \cdot B = D$ (f) $A \cdot X \cdot D = B$

(g) $C \cdot X = D$ (h) $C \cdot C \cdot X \cdot (A^{\mathrm{T}}) = D$

(i) $X = A \cdot D + B \cdot B$ (j) $D \cdot (X - A^{\mathrm{T}}) = O$

2. Jsou dány tři matice. Vypočtěte (pokud existují) **všechny možné** součiny tvaru $X \cdot Y$, kde za každou z matic X, Y zvolíte libovolnou z U, V, W, U^{T}, V^{T}, W^{T} (36 možností):

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 7 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

3. Ukažte, že následující matice komutují (tj. platí $A \cdot B = B \cdot A$):

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 10 & 2 & -2 \\ 10 & -2 & 6 \\ 4 & -8 & 16 \end{bmatrix},$$

4. Ukažte, že následující matice nekomutují (tj. platí $C \cdot D \neq D \cdot C$):

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -5 & 3 & 11 \\ 16 & 24 & 8 & -8 \\ 8 & 16 & 0 & -16 \end{bmatrix}.$$

5. Jsou dány dva vektory $\vec{m} = (1,1,2,2,-1)$, $\vec{n} = (0,1,2,3,4)$. Nyní vektor $\vec{m}$ chápeme jako jednořádkovou matici $M = \vec{m}$, zatímco vektor $\vec{n}$ jako jednosloupcovou matici $N = \vec{n}^{\mathrm{T}}$. Vypočtěte součiny matic $M \cdot N$ a $N \cdot M$.

6. Najděte chybu v násobení matic:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{bmatrix} 9 & 9 & 15 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

7. Jsou dány matice: $H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $K = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(a) Prověřte platnost asociativního zákona, tj. $(H \cdot K) \cdot L = H \cdot (K \cdot L)$,

(b) prověřte platnost distributivního zákona, tj. $(H + K) \cdot L = H \cdot L + K \cdot L$,

(c) vypočtěte matice: $H^3 - H^2$, $(H^2)^{\mathrm{T}} - (H^{\mathrm{T}})^2$ $L^{\mathrm{T}} \cdot H \cdot L$, H^8, $L^3 - L$.

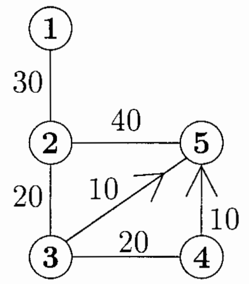
APLIKACE

(A) Matice jako informační schéma. V nejrůznějších situacích, teoretických i praktických, se setkáváme s využitím matice jako vhodného schématu pro uchování a vyhledávání infromace. Čtenář sám jistě najde celou řadu příkladů – uveďme zde dvě ukázky.

Ukázka 1. Na obrázku je znázorněn plán polního pokusu, v němž se bude testovat výnosnost 4 odrůd pšenice: a, b, c, d. Pokus bude založen na malých parcelkách a to tak, aby se jednotlivé odrůdy opakovaly a přitom prostřídaly takovým způsobem, že je zaručena stejnost podmínek. Schéma se nazývá *latinský čtverec* – je to matice, která přesně popisuje strukturu pokusu.

a	b	c	d
b	c	d	a
c	d	a	b
d	a	b	c

Ukázka 2. Komunikační síť na obrázku má 5 uzlů: **1,2,3,4,5** a dále jsou známy „délky" (ceny) možných spojení, z nichž dvě jsou jednosměrná. Sestavená *matice vzdáleností* obsahuje informaci o nejkratších spojeních mezi libovolnými dvěma uzly (na pozici (i, j) je číslo udávající délku nejkratšího spojení z uzlu i do uzlu j).



$$\begin{bmatrix} 0 & 30 & 50 & 70 & 60 \\ 30 & 0 & 20 & 40 & 30 \\ 50 & 20 & 0 & 20 & 10 \\ 70 & 40 & 20 & 0 & 10 \\ 70 & 40 & 60 & 80 & 0 \end{bmatrix}$$

(B) Násobení matic v ekonomických úvahách. Již při rozboru skalárního součinu vektorů jsme ukázali jeho možnou ekonomickou interpretaci. Násobení matic je založeno na opakování skalárního součinu a bude tedy velmi vhodné při složitějších (vícefaktorových či variantních) ekonomických úvahách.

Řešený aplikační příklad 2.2.1. Prodejce vyřizuje objednávky dvou zákazníků na dva druhy ložisek (kat. čísla *6201* a *3305*) a dvou druhů klínových řemenů (*10×1000* a *13×1120*) – toto pořadí druhů zboží v celé úvaze zachováme (!). První zákazník, pan Zajíc, objednává $\vec{n}_1 = (200, 75, 8, 13)$ kusů, druhý zákazník, pan Liška, objednává $\vec{n}_2 = (60, 60, 560, 185)$ kusů. Prodejce uvažuje tři vektory cen: základní $\vec{c}_1 = (50, 210, 28, 42)$, s částečnou výhodou (u cen ložisek) $\vec{c}_2 = (47, 200, 28, 42)$, pro stálé zákazníky $\vec{c}_3 = (47, 200, 27, 40)$.

Matice objednávek $N = \begin{bmatrix} \vec{n}_1 \\ \vec{n}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 & 75 & 8 & 13 \\ 60 & 60 & 560 & 185 \end{bmatrix}$ (1. ř. pan Zajíc, 2. ř. pan Liška),

matice cen $C = \begin{bmatrix} \vec{c}_1^{\,T} & \vec{c}_2^{\,T} & \vec{c}_3^{\,T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 47 & 47 \\ 210 & 200 & 200 \\ 28 & 28 & 27 \\ 42 & 42 & 40 \end{bmatrix}$ (sloupce jsou variantní vektory cen).

Nyní můžeme interpretovat součin těchto dvou matic $N \cdot C = \begin{bmatrix} 26520 & 25170 & 25136 \\ 39050 & 38270 & 37340 \end{bmatrix}$ takto:

První řádek obsahuje tři alternativy fakturovaných částek pro pana Zajíce pro jednotlivé vektory cen. Analogicky je druhý řádek přehledem tří alternativ fakturovaných částek pro pana Lišku.

(C) Matice přechodu. Nechť je nějaký jev popsán k-ticí proměnných (např. v čase) veličin. Tyto veličiny uspořádáme do k-složkového vektoru tak, že původní hodnoty tvoří vektor (**starých** hodnot) $\vec{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_k)$ a **nové** hodnoty (např. po určitém čase nebo události) tvoří vektor $\vec{n} = (n_1, n_2, \ldots n_k)$.

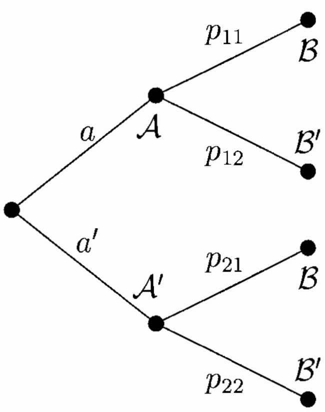
V některých případech je možno najít matici P (tzv. *matici přechodu*) typu $k \times k$ takovou, že platí:

$$\vec{n} = \vec{s} \cdot P.$$

To umožní řadu úvah i praktických závěrů o sledovaném problému.

Taková situace vzniká při aplikacích teorie pravděpodobnosti. Mějme dva jevy $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ a jevy k nim opačné $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$. Pravděpodobnosti těchto jevů označíme a, b, $a' = 1 - a$, $b' = 1 - b$. Vztahy mezi jevy $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ popisují tzv. *podmíněné pravděpodobnosti*

$$p_{11} = p\,(\mathcal{B}|\mathcal{A}),\; p_{12} = p\,(\mathcal{B}'|\mathcal{A}),\; p_{21} = p\,(\mathcal{B}|\mathcal{A}'),\; p_{22} = p\,(\mathcal{B}'|\mathcal{A}'),$$



kde $p(\mathcal{B}|\mathcal{A})$ označuje pravděpodobnost, že nastane jev $\mathcal{B}$ za „podmínky“, že nastal jev $\mathcal{A}$, atd. Platí *Bayesova formule*:

$$b = a \cdot p_{11} + a' \cdot p_{21}, \quad b' = a \cdot p_{12} + a' \cdot p_{22}.$$

Je-li $\vec{a} = (a_1, a_2) = (a, a')$, $\vec{b} = (b_1, b_2) = (b, b')$, můžeme psát

$$(b_1, b_2) = (a_1, a_2) \cdot \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \quad \text{neboli} \quad \vec{b} = \vec{a} \cdot P.$$

Toto značení zachováme v následujících dvou příkladech.

Řešený aplikační příklad 2.2.2. Kosmetická firma se rozhodla zvýšit pomocí reklamy prodej očních stínů značky *BLANKYT*. Očekává se, že působení intenzívní reklamní kampaně bude následující: 80% žen, které tyto stíny již používají, je bude používat i dál;
10% žen, které tyto stíny zatím nepoužívají, je začne používat.

Jestliže před reklamní kampaní pokrývala značka *BLANKYT* 16% poptávky na trhu, jak se zvýší její prodej vlivem reklamy?

Řešení. Nejdříve vymezíme zkoumané jevy a jejich pravděpodobnosti:
jev $\mathcal{A}$: žena používá stíny *BLANKYT* před kampaní, $a_1 = a = 0.16$, $a_2 = a' = 1 - 0.16 = 0.84$,
jev $\mathcal{B}$: žena používá stíny *BLANKYT* po kampani, $b_1 = b =?$, $b_2 = b' = 1 - b$,

Podle zadání $p_{11} = 0.80, p_{12} = 1 - 0.80 = 0.20$, $p_{21} = 0.10$, $p_{22} = 0.90$, tj. $P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$.

Bayesova formule dá $\vec{b} = \vec{a} \cdot P = (0.16,\ 0.84) \cdot \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix} = (0.212,\ 0.788)$.

Jako efekt reklamní kampaně lze očekávat ve zvýšení prodeje na 21.2% objemu trhu.

Řešený aplikační příklad 2.2.3. Nově založená pojišťovací společnost má k 1. lednu 1996 uzavřenu pojistku na havárii motorového vozidla s 825 klienty, z nichž 68 (tj. 8%) mělo v minulém roce dopravní nehodu. Obecně je známo, že 20% řidičů, kteří mají dopravní nehodu, ji bude mít do roku opět, zatímco 90% řidičů, kteří dopravní nehodu v daném roce neměli, ji nebude mít ani v roce následujícím. Jaký je výhled nehodovosti u sledované skupiny v letech 1996, 1997 a 1998?

Řešení. Nejdříve vymezíme zkoumané jevy a jejich pravděpodobnosti:
jev $\mathcal{A}$: klient měl dopravní nehodu v roce 1995, $a = 0.08$, $a' = 1 - 0.08 = 0.92$,
jev $\mathcal{B}$: klient má nehodu v roce 1996, $b =?$, $b' = 1 - b$,

Nyní dle zadání $p_{11} = 0.20, p_{12} = 1 - 0.20 = 0.80$, $p_{21} = 0.10$, $p_{22} = 0.90$, tj. $P = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$.

Označíme $\vec{b}_{1996}$ pravděpodobnostní vektor $\vec{b}$ pro nehodovost klientů v této skupině v roce 1996, analogicky pak zavedeme $\vec{b}_{1997}$ a $\vec{b}_{1998}$. Nyní dle Bayesovy formule je $\vec{b}_{1996} = \vec{a} \cdot P$ a ovšem zcela analogicky je $\vec{b}_{1997} = \vec{b}_{1996} \cdot P = \vec{a} \cdot P^2$ a též $\vec{b}_{1998} = \vec{b}_{1997} \cdot P = \vec{a} \cdot P^3$. Přechodové matice jsou

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.12 & 0.88 \\ 0.11 & 0.89 \end{bmatrix},\; P^3 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.12 & 0.88 \\ 0.11 & 0.89 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.112 & 0.888 \\ 0.111 & 0.889 \end{bmatrix},$$

$\vec{b}_{1996} = \vec{a} \cdot P = (0.108,\ 0.892)$, $\vec{b}_{1997} = \vec{a} \cdot P^2 = (0.1108,\ 0.8892)$, $\vec{b}_{1998} = \vec{a} \cdot P^3 = (0.11108,\ 0.88892)$,. V dané skupině lze v roce 1996 lze očekávat nehodu u 10.8% (tj. 89) klientů, v roce 1997 11.08% (tj. asi 91) klientů a v roce 1998 11.108% (asi 92) klientů.

(D) Matice a osobní počítač. S maticemi se můžeme setkat také při práci s osobním počítačem - v tabulkových editorech (tzv. „spreadsheetech“) či databázích (MS Excel, MS Access, Quattro Pro, Lotus, dBase a dalších). Pracovním polem takového programu je matice, do níž jsou uspořádána data, přičemž sloupce představují proměnné („variables“) a řádky jednotlivé případy („cases“). Prvky matice se nacházají v tzv. buňkách („cells“) – jejich adresování odpovídá nám známému indexování prvků v matici.

Příkladem může být použití tabulkového editoru pro vytvoření geografické databáze, vztahující se k určitému území (ukázka je výřez z takové databáze):

Obec	*PPZ*	NV	...	O1869	O1880	...	O1950	O1960	O1970	D1869	D1880	...	D1950	D1960	D1970
Třeboň	1240	434	...	5117	5819	...	4448	5082	6091	423	426	...	776	818	940
Ponědraž	1259	425	...	330	319	...	167	158	142	46	46	...	48	–	46
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
Lutová	1349	466	...	380	365	...	266	247	207	57	53	...	80	78	71
Mnich	1350	468	...	268	256	...	169	149	135	41	39	...	54	–	41
Záblatí	1358	423	...	334	311	...	172	158	115	47	46	...	51	–	39

Databáze CHKO Třeboňsko - údaje sledované za jednotlivé obce v území [Lexová, 1996]:
případy (cases): jednotlivé obce;

proměnné (variables): PPZ - první písemná zmínka (rok), NV - nadmořská výška (m), P - plocha v ha; $O_{1869}, O_{1880} \dots O_{1970}$ - počty obyvatel v obcích v daném roce, $D_{1869}, D_{1880} \dots D_{1970}$ - počty domů v daném roce, KOD_{KU} - kód katastrálního území, PSC - poštovní směrovací číslo, R - počet rekreačních objektů a další.

Obratnou manipulací s danou maticí (kterou právě tyto programy umožňují) může uživatel dovodit z primárních informací řadu dalších. Například:

1) Součty ve sloupcích O_j či D_j získáme informaci o celkovém počtu obyvatel (domů) v území za daný rok,

2) Porovnáním dvou různých sloupců O_j, O_k (resp. D_j, D_k) lze zjistit index vývoje obyvatel (domů) v daném období, určeném roky j a k např. $index = \frac{O_k}{O_j} \cdot 100\%$

3) Porovnáním počtu rekreačních zařízení a plochy, lze odhadnout zatíženost území rekreací.

APLIKAČNÍ ÚLOHY K ŘEŠENÍ [3]

1. Vysvětlete nebo si nechte vysvětlit princip zápisu polohy šachových figurek na šachovnici.

2. Uveďte praktické příklady užití matice jako informačního schématu.

3*Dva psychologové prováděli nezávislý výzkum vztahu mezi tělesnou výškou a agresívním chováním žen starších 18 let. Pokusné osoby byly rozděleny do tří kategorií;
Kategorie 1: do 153cm, Kategorie 2: 153–67cm, Kategorie 3: nad 167cm.
Výsledky výzkumu (počty osob) jsou zachyceny v následujících maticích:

Prof. Aldquist **Prof. Kelley**

$$\begin{array}{r} \\ pasivní \\ agresivní \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Kat.1} & \text{Kat.2} & \text{Kat.3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 70 & 122 & 20 \\ 30 & 118 & 80 \end{bmatrix} \end{array} = A \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Kat.1} & \text{Kat.2} & \text{Kat.3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 65 & 160 & 30 \\ 25 & 140 & 75 \end{bmatrix} \end{array} = B$$

(a) Jakou operaci provedete s maticí A (resp. B), aby údaje byly v procentech? Proveďte.

[3]Hvězdičkou jsou označeny úlohy převzaté z [Zie87]

(b) Jakou operaci s maticemi A, B je třeba provést, jestliže oba vědci chtějí vytvořit společnou zprávu? Proveďte.

4. Vraťte se znovu k řešenému aplikačnímu příkladu 2.2.1. o prodeji ložisek a klínových řemenů, přičemž zachováme pořadí a druhy zboží (4 položky). Sestavte matice N a C, vypočtěte součin $N \cdot C$ a vysvětlete, co tento součin udává, pro následující modifikace úlohy:

(a) Objednávky p. Zajíce a p. Lišky beze změny jako v původní úloze, ale vektory cen jsou pouze dva a změněné na základní $\vec{c}_1 = (52, 220, 30, 40)$, pro stálé zákazníky $\vec{c}_2 = (45, 200, 25, 35)$,

(b) Zákazníci jsou jiní. Pan Čech – objednávka $\vec{n}_1 = (200, 20, 40, 50)$ kusů, pan Polák – objednávka $\vec{n}_2 = (300, 30, 80, 8)$ kusů, Pan Němec – objednávka $\vec{n}_3 = (100, 25, 20, 20)$ kusů. Vektory cen jsou 3 a jsou stejné jako v původní úloze.

(c) Ceny jako u varianty (a) a zákazníci z varianty (b).

5* Jedna americká firma má dvě výrobní pobočky (FI a FII) v různých částech země. V matici L jsou normy práce (v hodinách na jeden finální produkt) při výrobě gumových nafukovacích člunů (pro 1 osobu, 2 osoby a 4 osoby) ve třech odděleních – stříhárně, kompletaci a expedici. Matice M uvádí mzdové podmínky v uvedených odděleních poboček FI a FII:

$$\begin{array}{l} \\ \\ \text{1 os. člun} \\ \text{2 os. člun} \\ \text{4 os. člun} \end{array}
\begin{array}{c} \textbf{pracovní normy} \\ \begin{array}{ccc} \text{stříhárna} & \text{kompletace} & \text{expedice} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.6h & 0.6h & 0.2h \\ 1.0h & 0.9h & 0.3h \\ 1.5h & 1.2h & 0.4h \end{bmatrix} \end{array} = L\,, \quad M =
\begin{array}{c} \textbf{hodinová mzda} \\ \begin{array}{cc} \text{FI} & \text{FII} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \$6 & \$7 \\ \$8 & \$10 \\ \$3 & \$4 \end{bmatrix} \end{array}
\begin{array}{l} \\ \\ \text{stříhárna} \\ \text{kompletace} \\ \text{expedice} \end{array}$$

(a) Vysvětlete, že součin 1. řádku matice L a 1. sloupce matice M dává mzdové náklady na člun pro 1 osobu v pobočce FI.

(b) Jakou interpretaci má součin matic $L \cdot M$?

6. Kosmetická firma se rozhodla zvýšit pomocí reklamy při televizních sportovních přenosech prodej pánské kosmetiky značky *SPORT*. Očekává se, že efekt intenzívní reklamní kampaně bude:

85% mužů, kteří tuto kosmetiku již používají, ji bude používat i dál;
20% mužů, kteří tuto kosmetiku zatím nepoužívají, ji začne používat.

Jestliže před reklamní kampaní pokrývala značka *SPORT* 12% poptávky na trhu, jak se zvýší její prodej vlivem reklamy?

7* Městská rada řeší zhoršující se dopravní situaci novými investicemi do výrazného zlepšení hromadné dopravy ve městě a okolí. Na základě obdobných zkušeností z jiných měst se předpokládá, že efekt těchto změn po uplynutí jednoho měsíce bude následující:

80% lidí používajících pro přepravu do zaměstnání veřejnou dopravu, ji bude používat dál;

30% lidí, kteří do zaměstnání jezdí autem, přejde na veřejnou dopravu.

(a) Jestliže před plánovanými změnami 25% lidí užívá na přepravu do zaměstnání veřejnou dopravu, jak se zvýší jejich počet měsíc po provedených změnách?

(b) Jaké změny lze očekávat po dvou a po třech měsících?

KREATIVNÍ ÚLOHY

1. Matice se nazývá *stochastická*, jestliže každý její prvek je pouze jedno z čísel 0 a 1.

(a) Najděte všechny stochastické matice 2. řádu (tj. typu 2×2),

(b) najděte všechny symetrické stochastické matice 2. řádu,

(c) najděte všechny diagonální stochastické matice 2. řádu.

2. Následující matici F sestavili dne 19.2.1982 studenti agronomické fakulty v Č. Budějovicích J. Křivka a J. Menšík. Zachycuje herní aktivitu domácích během části prvoligového hokejového utkání TJ Motor Č.B. - TJ Vítkovice. Sloupce a řádky matice F jsou nadepsány čísly hráčů, čísla náležející obráncům jsou podtržena. Prvek f_{ij} udává počet přihrávek (frekvenci) poslaných hráčem v i-tém řádku hráči v j-tém sloupci (proto jsou v diagonále pomlčky):

	$\underline{2}$	$\underline{4}$	5	6	$\underline{8}$	10	12	15	16	$\underline{17}$	19	20	21	22	23	$\underline{24}$	$\underline{26}$	$\underline{30}$
2	–	4	0	2	7	0	3	2	2	0	1	4	0	1	0	3	0	0
4	5	–	2	3	1	1	2	4	3	1	3	0	0	7	0	0	5	0
5	2	2	–	0	0	0	3	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0
6	2	2	0	–	1	1	0	0	2	0	0	2	0	3	0	0	0	0
8	3	1	0	1	–	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
10	0	1	0	0	0	–	2	0	2	1	0	2	0	1	0	1	0	0
12	3	0	4	0	0	4	–	2	8	1	0	1	0	0	0	3	0	0
15	0	4	0	0	0	0	2	–	0	4	9	1	3	3	0	3	3	0
16	1	3	0	1	1	2	4	0	–	3	2	1	0	1	0	4	0	0
17	0	6	1	1	0	3	6	1	1	–	3	3	0	10	0	7	0	0
19	1	1	0	1	0	0	1	8	1	5	–	1	3	0	0	1	1	0
20	5	4	0	2	4	1	0	0	0	8	1	–	0	7	0	3	0	0
21	0	3	0	0	0	0	0	5	0	0	4	0	–	0	0	0	1	0
22	4	5	0	2	0	0	0	2	0	8	6	5	0	–	0	3	1	0
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	–	0	0	0
24	2	0	0	2	0	2	0	0	3	8	1	1	1	3	0	–	0	0
26	0	2	0	0	0	0	0	5	0	0	2	0	2	0	0	0	–	0
30	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	–

Jakou informaci poskytují trenérovi řádkové a sloupcové součty matice F. Jaké další otázky je možno u matice F uvažovat?

3*A company with two different plants manufactures guitars and banjos. Its production costs for each instrument are given in the following matrices:

$$\begin{array}{r} \\ \\ \textit{Material} \\ \textit{Labor} \end{array}
\begin{array}{c} \textbf{Plant X} \\ \begin{array}{cc} \text{Guitar} & \text{Banjo} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \$30 & \$25 \\ \$60 & \$80 \end{bmatrix} \end{array} = A
\qquad
\begin{array}{c} \textbf{Plant Y} \\ \begin{array}{cc} \text{Guitar} & \text{Banjo} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \$36 & \$27 \\ \$54 & \$74 \end{bmatrix} \end{array} = B$$

Find $\frac{1}{2}(A + B)$, the average cost of production for the two plants.

4. Pokuste se najít řešení jednoduchých maticových rovnic:

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 8 \end{bmatrix}$, (b) $X \cdot \begin{bmatrix} 13 \end{bmatrix} = E$, (c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot X = E$

5. Najděte dvě matice U, V typu 2×2, které nemají ani jeden prvek rovný 0 a přitom platí
(a) $U \cdot V = O$ (b) je sice $U \cdot V = O$, ale přitom $V \cdot U \neq O$

6. Matice A se nazývá *nilpotentní* (speciálně *idempotentní*), jestliže existuje n tak, že $A^n = O$ (speciálně $A^2 = O$).

(a) Které z daných matic jsou nilpotentní (resp. idempotentní)?

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -8 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(b) pro která x je matice $\begin{bmatrix} 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ nilpotentní?

7*A company with manufacturing plants in California and Texas has labor-hour and wage requirements for the manufacturing of two inexpensive hand calculators as given in matrices M and N below:

Labor-Hours per Calculator

$$\begin{array}{c} \\ \\ \text{model A} \\ \text{model B} \end{array} \begin{array}{ccc} \text{Fabricating} & \text{Packaging} & \text{Assembly} \\ \text{dept.} & \text{dept.} & \text{dept.} \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{model A} \\ \text{model B} \end{array} \begin{bmatrix} 0.15hr & 0.10hr & 0.05hr \\ 0.25hr & 0.20hr & 0.05hr \end{bmatrix} = M,$$

Hourly Wages

$$N = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{California} & \text{Texas} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \$15 & \$12 \\ \$12 & \$10 \\ \$4 & \$4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Fabricating d.} \\ \text{Assembly d.} \\ \text{Packaging d.} \end{array}$$

(a) What is the labor cost for producing one "model B" calculator in California? Set up a dot product and multiply.

(b) Find $M \cdot N$ and interpret.

8. Jsou dány matice $B_1 = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$.

Řešte soustavu (X, Y jsou neznámé matice):
$$\begin{array}{rcrcl} 2X & + & Y & = & B_1 \\ X & - & Y & = & B_2 \end{array}$$

9. Vzorec $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ pro matice neplatí. Proč a jak zní správně?

10Pokuste se „odmocnit“ matici $M = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, tj. řešit rovnici $X \cdot X = M$.

11Podnikatel provozuje během sezóny v letovisku zahradní restauraci. Občas si pozve hudební skupinu, aby zvýšil návštěvnost v podniku. Z dlouhodobější časové řady údajů byly dovozeny následující charakteristiky místního počasí v letních měsících:

Jestliže v daný den prší, je pravděpodobnost deště pro den následující 40%;
Jestliže v daný den neprší, je pravděpodobnost deště pro den následující 6%.

Jestliže ve středu prší, jaká je pravděpodobnost, že bude pršet v sobotu, kdy restauratér chce objednat vystoupení hudební skupiny?

2.3. Lineární rovnice a nerovnice

Definice. Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_n$, b jsou reálná čísla a dále $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou symboly *neznámých*. Potom rovnici $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n = b$, nazýváme *lineární rovnicí* o n neznámých. Analogicky je definována *lineární nerovnice* $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n \leq b$, kde ovšem znaménko neostré nerovnosti může být i opačné, tj. $\geq$, případně lze použít i znaménka ostrých nerovností, tj. $<$ anebo $>$.

Zavádíme vektor *koeficientů* $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ a vektor neznámých $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$; číslo b nazýváme *pravou stranou* rovnice či nerovnice. *Řešením* dané lineární rovnice nebo nerovnice o n neznámých je jakákoliv n-tice reálných čísel, která ji splňuje (při dosazení za $x_1, x_2, \ldots, x_n$).

Uvažme lineární rovnici o třech neznámých x_1, x_2, x_3 a lineární nerovnici o čtyřech neznámých z_1, z_2, z_3, z_4 (není nezbytné, aby se neznámé vždy označovaly písmenem x).

$$2x_1 + x_2 + 100x_3 = 13$$

$$6z_1 - z_2 + (0.2)z_3 + z_4 \leq 5$$

Jedním z mnoha řešení uvedené rovnice je $x_1 = 4$, $x_2 = -5$, $x_3 = 0.1$, neboli vektor $\vec{x} = (4, -5,\ 0.1)$. Zkouška správnosti: $2 \cdot 4 + 1 \cdot (-5) + 100 \cdot 0.1 = 13$.
Také uvedená nerovnice má mnoho řešení, např. $\vec{z} = (1, 1, -1, 0)$.
Zkouška: $6 \cdot 1 - 1 + 0.2 \cdot (-1) + 0 = 4.8 \leq 5$.

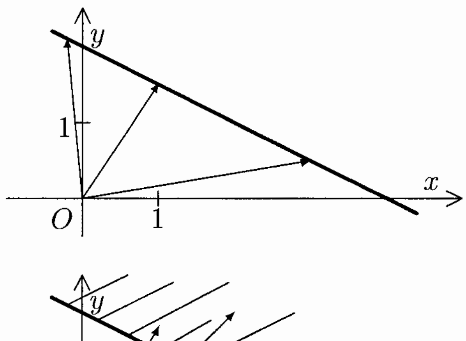
Lineární rovnice a nerovnice se vyskytují v matematice velice často. Obvyklá je situace, že je třeba řešit ne jednu rovnici či nerovnici, ale několik zároveň – mluvíme o soustavě.

V Kapitole 5 se budeme komplexně zabývat soustavou m lineárních rovnic o n neznámých. Se soustavami lineárních nerovnic pracuje např. *lineární programování*, jež je náplní specializovaných kurzů. Zde se zmíníme o případu 2 a 3 neznámých a jejich geometrických reprezentacích.

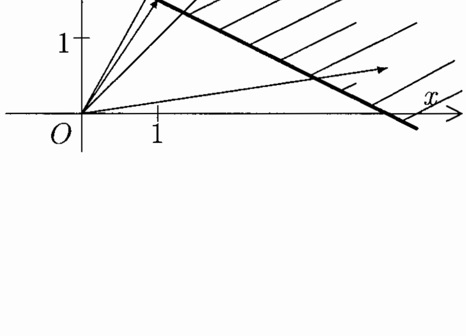
Věta 1. Každou lineární rovnici o dvou neznámých $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ je možno reprezentovat v rovině jako přímku $a_1x + a_2y - b = 0$ a každé její řešení lze chápat jako polohový vektor (x, y) jednoho bodu této přímky .

Každou lineární nerovnici $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$ je možno reprezentovat v rovině jako polorovinu s hraniční přímkou $a_1x + a_2y - b = 0$, která ovšem v případě znaménka **ostré** nerovnosti již do této poloroviny **nepatří**. Každé řešení dané nerovnice je pak polohový vektor jednoho bodu této poloroviny.

Rovnici $x_1 + 2x_2 = 4$ reprezentuje v rovině přímka $x + 2y - 4 = 0$, jejíž směrnicový tvar je $y = -\frac{1}{2}x + 2$. Na obrázku jsou též znázorněny polohové vektory tří řešení: $(1,\ 1.5)$, $(-0.2\,, 2.1)$, $(3,\ 0.5)$.



Nerovnici $x_1 + 2x_2 \geq 4$ reprezentuje vyšrafovaná polorovina s hraniční přímkou $x + 2y - 4 = 0$, která je zakreslena plnou čarou (pro případ ostrého znaménka použijeme čárkovanou čáru). „Směrnicový“ tvar $y \geq -\frac{1}{2}x + 2$ umožňuje rozhodnout, kterou ze dvou polorovin vybrat („ y “ je **rovno nebo nad** hodnotami „ $-\frac{1}{2}x + 2$ “). Polohové vektory některých řešení: $(1,\ 1.8)$, $(1,\ 1.5)$, $(2, 2)$, $(4,\ 0.6)$.



Věta 2. Každou lineární rovnici o 3 neznámých $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ reprezentujeme v prostoru jako rovinu $a_1x + a_2y + a_3z - b = 0$ a každé její řešení jako polohový vektor (x, y, z) jednoho bodu této roviny .

Každou lineární nerovnici $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \leq b$ reprezentujeme v prostoru jako poloprostor s hraniční rovinou $a_1x + a_2y + a_3z - b = 0$, který ovšem v případě znaménka **ostré** nerovnosti již do této poloroviny **nepatří**. Každé řešení dané nerovnice je pak polohový vektor jednoho bodu tohoto poloprostoru.

Věta 3. Při grafickém řešení soustavy lin. rovnic hledáme průnik geometrických útvarů – u 2 neznámých průsečík přímek v rovině a u 3 neznámých průsečík rovin v prostoru.

Při grafickém řešení soustavy lin. nerovnic hledáme průnik geometrických útvarů – u 2 neznámých průnik polorovin v rovině a u 3 neznámých průnik poloprostorů v prostoru.

Řešení soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých.[4]

K analýze užijeme geometrickou reprezentaci. Obě rovnice reprezentujeme jako přímky v rovině a vidíme, že mohou nastat 3 případy:

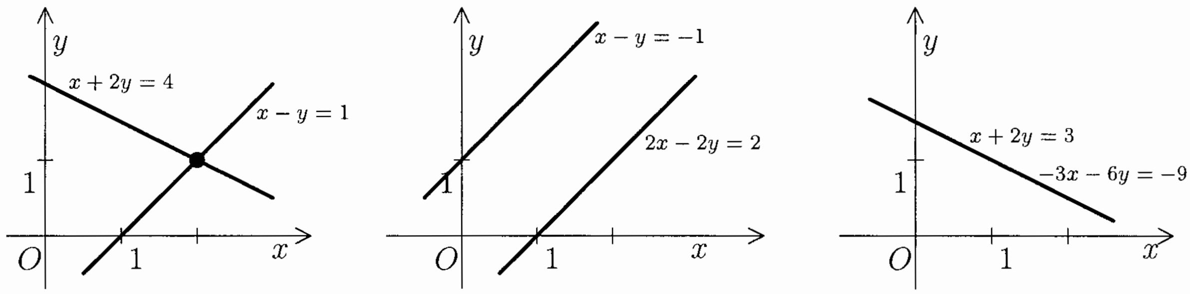
(a) Přímky jsou různoběžné – soustava má jediné řešení (průsečík); můžeme ho najít metodou *dosazovací (substituční)*, metodou *sčítací (adiční)*, ale i *graficky*;
(b) přímky jsou rovnoběžné a různé – soustava nemá řešení (neexistuje průsečík);
(c) přímky jsou totožné – soustava má nekonečně mnoho řešení (přímka je vlastně jedna).

ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Řešený příklad 2.3.1. Řešte následující tři soustavy 2 rovnic o 2 neznámých:

(a): $\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ x - y &= 1 \end{aligned}$ (b) : $\begin{aligned} x - y &= -1 \\ 2x - 2y &= 2 \end{aligned}$ (c) : $\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ -3x - 6y &= -9 \end{aligned}$

Řešení. Graficky jsme jednotlivé soustavy znázornili takto:



(a): Jde o různoběžky $x + 2y - 4 = 0$, $x - y - 1 = 0$ s normálovými vektory $(1, 2)$ a $(1, -1)$.

Metoda dosazovací: z 1. rovnice $x = 4 - 2y$ dosadíme do 2. rovnice a máme $(4 - 2y) - y = 1$, tj. $-3y = -3$ a $y = 1$, tedy $x = 4 - 2 \cdot 1 = 2$. Řešení (průsečík přímek): $(x, y) = (2, 1)$.

Metoda adiční: od 1. rovnice odečteme 2. rovnici a dostaneme $3y = 3$, tedy $y = 1$, atd.

(b): Jde o rovnoběžky $x - y + 1 = 0$, $2x - 2y - 2 = 0$ s normálovými vektory $(1, -1)$ a$(2, -2)$, které nejsou totožné, neboť jedna z rovnic není násobkem druhé.

(c): Totožné přímky $x + 2y - 3 = 0$, $-3x - 6y + 9 = 0$; druhá rovnice je 3-násobek rovnice první. Jde vlastně o jedinou rovnici $x + 2y = 3$, která má nekonečně mnoho řešení. Zvolíme $y = t$ jako parametr a počítáme: $x + 2t = 3$, tj. $x = 3 - 2t$. Řešení: všechny dvojice $(3 - 2t, t)$, kde $t \in \mathbf{R}$.

[4]Soustavy o více neznámých se řeší v Kapitole 5.

Řešený příklad 2.3.2. V následujících třech úlohách hledejte neznámou matici X:

$$\text{(a):}\quad \begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}\qquad \text{(b):}\quad \begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix}7\\14\end{bmatrix}\qquad \text{(c):}\quad \begin{bmatrix}1&-2\\-2&4\end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix}8\\16\end{bmatrix}.$$

Řešení: Zřejmě vždy hledáme matici typu 2×1, zavedeme označení $X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$.

(a) $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}$ čili $\begin{array}{r}x_1+2x_2=5\\3x_1+4x_2=6\end{array}$ řešení $x_1=-4, x_2=\frac{9}{2}$, tedy $X=\begin{bmatrix}-4\\\frac{9}{2}\end{bmatrix}$,

(b) $\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}$ čili $\begin{array}{r}x_1+2x_2=5\\2x_1+4x_2=6\end{array}$ úloha nemá řešení (rovnoběžky), matice X neexistuje;

(c) $\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\10\end{bmatrix}$ čili $\begin{array}{r}x_1+2x_2=5\\2x_1+4x_2=10\end{array}$ nekonečně mnoho řešení $x_1=5-2t, x_2=t$, tedy $X=\begin{bmatrix}5-2t\\t\end{bmatrix}, t\in\mathbf{R}$.

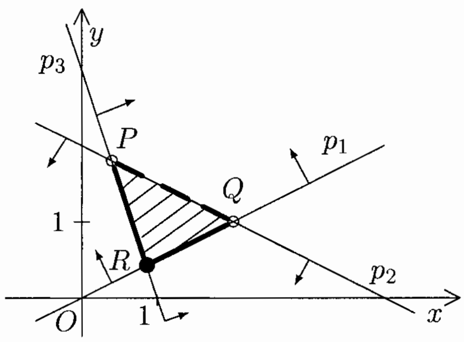
Poznámka: Maticová rovnice $X\cdot\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\,,&6\end{bmatrix}$ se řeší podobně s tím, že $X=\begin{bmatrix}x_1\,,&x_2\end{bmatrix}$.

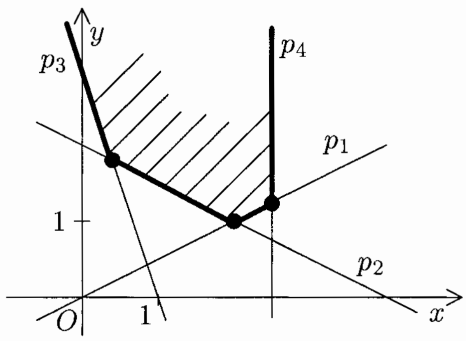
$\begin{bmatrix}x_1\,,&x_2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\,,&6\end{bmatrix}$ čili $\begin{array}{r}x_1+3x_2=5\\2x_1+4x_2=6\end{array}$ řešení $x_1=-1, x_2=2$, tedy $X=\begin{bmatrix}-1\,,&2\end{bmatrix}$.

Řešený příklad 2.3.3. Následující soustavy lineárních nerovnic řešte graficky

$$\text{(I):}\quad \begin{array}{rl}x-2y&\le 0\\x+2y&<4\\3x+y&\ge 3\end{array}\qquad\qquad \text{(II):}\quad \begin{array}{rl}x-2y&\le 0\\x+2y&\ge 4\\3x+y&\ge 3\\x&\le 2.5\end{array}$$

Řešení.





Komentář. V úloze (I) jde o průnik 3 polorovin s hraničními přímkami po řadě $p_1: x-2y=0$, $p_2: x+2y-4=0$, $p_3: 3x+y-3=0$. Pomocné šipky vymezují tyto poloroviny, což je zřejmé po úpravě zadaných nerovnic na tvary: $y\ge\frac{x}{2}$, $y<-\frac{x}{2}+2$, $y\ge -3x+3$.

Výsledkem je plocha trojúhelníku PQR, ovšem bez strany PQ (čárkovaná čára) a bez vrcholů P, Q (nevyplněné kroužky), což způsobuje druhá nerovnice svým ostrým znaménkem. Souřadnice vrcholů získáme jako průsečíky dvojic přímek: $P=[\frac{2}{5},\frac{9}{5}]$, $Q=[2,1]$, $R=[\frac{6}{7},\frac{3}{7}]$. Je zřejmé, že úlohu je možno obrátit – tedy hledat pro zadaný trojúhelník v rovině jeho vyjádření pomocí soustavy nerovnic.

V úloze (II) vystupuje ještě přímka $p_4: x=2.5$ vymezující polorovinu nalevo od ní a navíc polorovina s hraniční přímkou p_2 je opačná než v (I) (totiž $y\ge -\frac{x}{2}+2$) a tuto přímku zahrnuje (neostrá nerovnost). Průnik těchto 4 polorovin je pak uzavřená neomezená oblast (viz. šrafování).

ÚLOHY K ŘEŠENÍ

1. Jsou dány vektory $\vec{u} = (-3, 1)$, $\vec{v} = (2, 5)$, $\vec{w} = (6, -2)$. Najděte vektor $\vec{x} = (x_1, x_2)$ tak, že

(a) $\begin{matrix} \vec{u}\cdot\vec{x} = 4 \\ \vec{v}\cdot\vec{x} = 7 \end{matrix}$ (b) $\begin{matrix} \vec{u}\cdot\vec{x} = 4 \\ \vec{w}\cdot\vec{x} = -8 \end{matrix}$ (c) $\begin{matrix} \vec{u}\cdot\vec{x} = 4 \\ \vec{w}\cdot\vec{x} = 7 \end{matrix}$ (d) $\begin{matrix} \vec{u}\cdot\vec{x} \le 4 \\ \vec{v}\cdot\vec{x} \ge 7 \end{matrix}$ (e) $\begin{matrix} \vec{u}\cdot\vec{x} \le 4 \\ \vec{w}\cdot\vec{x} \ge 7 \end{matrix}$

2. Zkoumejte řešitelnost a případně řešte soustavy:

(a) $\begin{matrix} 2x_1 + 5x_2 = 7 \\ 3x_1 - x_2 = 8 \end{matrix}$ (b) $\begin{matrix} 2x_1 - 3x_2 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 = 0 \end{matrix}$ (c) $\begin{matrix} x_1 - x_2 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 = 4 \end{matrix}$ (d) $\begin{matrix} -x_1 + 4x_2 = 2 \\ 4x_1 + 16x_2 = 8 \end{matrix}$

(e) $\begin{matrix} 6x_1 - 2x_2 = 3 \\ -3x_1 + x_2 = 2 \end{matrix}$ (f) $\begin{matrix} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{matrix}$ (g) $\begin{matrix} 2x_1 - 2x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{matrix}$ (h) $\begin{matrix} 7x_1 + 8x_2 = 9 \\ 10x_1 + 11x_2 = 12 \end{matrix}$

3. Pomocí soustavy nerovnic popište:

(a) kompaktní čtverec o vrcholech [0, 0], [1, 0], [1, 1], [0, 1] (včetně stran a vrcholů),
(b) plocha obdélníku o vrcholech [−2, −1], [2, −1], [2, 1], [−2, 1] bez vodorovných stran,
(c) plocha obdélníku o vrcholech [−2, −1], [2, −1], [2, 1], [−2, 1] bez svislých stran,
(d) plocha trojúhelníku o vrcholech [0, 0], [1, 0], [0, 1] bez stran a bez vrcholů.

4. Graficky řešte vždy trojici úloh, tj. soustavu rovnic $\square_1$ a dvě soustavy nerovnic $\square_2$ a $\square_3$:

(a_1) $\begin{matrix} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{matrix}$ (a_2) $\begin{matrix} x_1 + x_2 \ge 0 \\ x_1 - x_2 \ge 0 \\ x_1 \le 3 \end{matrix}$ (a_3) $\begin{matrix} x_1 + x_2 \le 0 \\ x_1 - x_2 \ge 0 \\ x_2 \ge -3 \end{matrix}$

(b_1) $\begin{matrix} 2x_1 - 2x_2 = -4 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{matrix}$ (b_2) $\begin{matrix} 2x_1 - 2x_2 \ge -4 \\ x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 2 \end{matrix}$ (b_3) $\begin{matrix} 2x_1 - 2x_2 \le -4 \\ x_1 - x_2 \ge 2 \\ x_1 > 2 \end{matrix}$

(c_1) $\begin{matrix} 2x_1 - x_2 = 4 \\ -x_1 + 3x_2 = 3 \end{matrix}$ (c_2) $\begin{matrix} 2x_1 - x_2 \ge 4 \\ -x_1 + 3x_2 \le 3 \\ x_1 \le 2 \end{matrix}$ (c_3) $\begin{matrix} 2x_1 - x_2 \le 4 \\ -x_1 + 3x_2 \ge 3 \\ x_1 > 2 \end{matrix}$

(d_1) $\begin{matrix} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \end{matrix}$ (d_2) $\begin{matrix} x_1 - x_2 \le 0 \\ 2x_1 + 2x_2 \ge 2 \\ x_2 \le 0 \end{matrix}$ (d_3) $\begin{matrix} x_1 - x_2 \le 0 \\ 2x_1 + 2x_2 \ge 2 \\ x_1 \le 2 \end{matrix}$

5. Hledejte neznámou matici X:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

6. Hledejte neznámou matici X:

(a) $X \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1, 1 \end{bmatrix}$ (b) $X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, 1 \end{bmatrix}$ (c) $X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2, 3 \end{bmatrix}$.

APLIKACE

(A) Plánování a rozhodování. Uveďme dvě praktické úlohy.

Řešený aplikační příklad 2.3.1. Společnost těží rudu ve dvou dolech. Ruda z dolu U obsahuje 1% niklu a 3% mědi, ruda z dolu V obsahuje 2% niklu a 5% mědi. Jak je třeba naplánovat těžbu, jestliže je třeba vyprodukovat 6 tun niklu a 17 tun mědi?

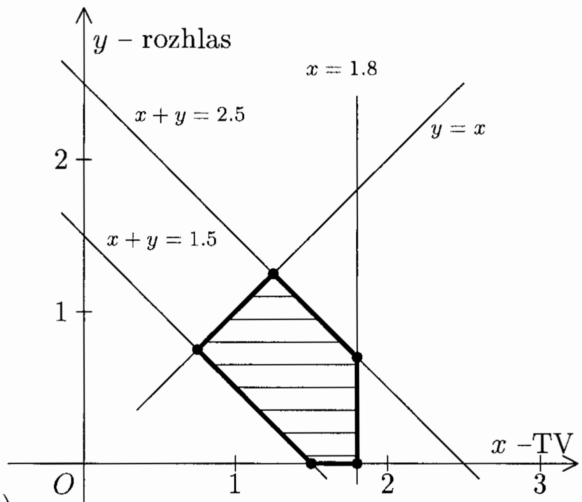
Řešení. Označíme x_1 množství rudy (v tunách) těžené v dole U a x_2 množství rudy (v tunách) těžené v dole V. Rovnice pro získání niklu je tedy $0.01x_1 + 0.02x_2 = 6$, rovnice pro získání potřebného množství mědi je $0.03x_1 + 0.05x_2 = 17$. Po vyřešení této soustavy 2 rovnic o 2 neznámých dostaneme $x_1 = 400$ tun, $x_2 = 100$ tun.

Řešený aplikační příklad 2.3.2.

Výrobce kosmetiky plánuje novou reklamní rozhlasovou a televizní kampaň na své zboží. Celkem zamýšlí věnovat k tomuto účelu částku mezi 1.5 a 2.5 mil. Kč., přičemž výdaje na reklamu v rozhlase (y) by neměly být větší než na reklamu v televizi (x), ale částka na reklamu v televizi by neměla nepřekročit 1.8 mil Kč.
Na obrázku jsme znázornili graficky oblast tvaru kompaktního pětiúhelníka, jež odpovídá všem možnostem konečného rozhodnutí. Oblast je vymezena nerovnicemi:

$x + y \geq 1.5, \quad x + y \leq 2.5, \quad x \geq y, \quad x \leq 1.8,$
$x \geq 0, \quad y \geq 0$ (podmínky nezápornosti).

Mezní hodnoty oblasti rozhodnutí jsou
(0.75, 0.75), (1.25, 1.25), (1.8, 0.7), (1.8, 0), (1.5, 0).



(B) Jednoduchý model nabídky a poptávky. V modelech nabídky a poptávky („supply and demand“) se sleduje vztah mezi množstvím daného produktu na trhu (m) a cenou za jednotkové množství produktu (c). Model pak konfrontuje dva vztahy:

• vztah mezi množstvím a cenou z hlediska chování zákazníků („demanders“) – při nižší ceně jsou schopni koupit větší množství produktu (větší **poptávka**).

• vztah mezi množstvím a cenou z hlediska chování dodavatelů („suppliers“) – při vyšší ceně jsou ochotni dodat na trh (**nabídnout**) větší množství produktu;

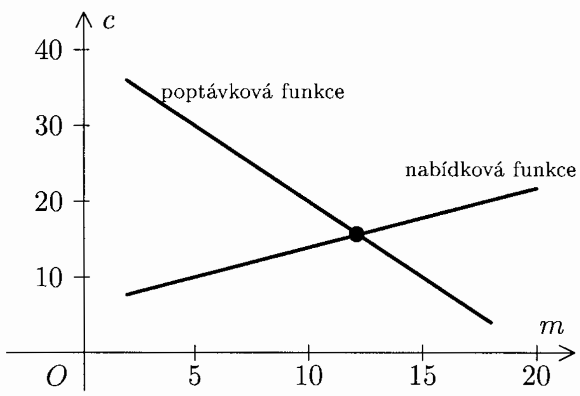
Oba tyto vztahy (mechanismy) se střetnou v rovnovážném bodě („equilibrium“), charakterizovaném rovnovážnou cenou a rovnovážným množstvím.

Řešený aplikační příklad 2.3.3. Na lokálním trhu platí v sezóně následující vztahy mezi cenou za 1 kg rajčat (c) a množstvím rajčat na trhu v tunách (m): poptávková rovnice $c = -2m + 40$, nabídková rovnice $c = 0.7m + 7.6$. Znázorněte tyto vztahy graficky a najděte rovnovážný bod.

Zkoumanou situaci jsme znázornili na obrázku jako poptávkovou a nabídkovou fukci – jsou to přímky a jejich průsečík je rovnovážný bod.
Pro nalezení rovnovážného bodu je třeba řešit soustavu 2 rovnic o 2 neznámých, kterou upravíme na tvar:

$$\begin{aligned} 2m + c &= 40 \\ -0.7m + c &= 7.6 \end{aligned} .$$

Její řešení je $m = 12$, $c = 16$. Rovnováha na trhu nastane při ceně 16 Kč/kg. Při ní je kapacita trhu 12 tun rajčat.



APLIKAČNÍ ÚLOHY K ŘEŠENÍ

1. Pan Novák chce investovat 300 tis. Kč. Má dvě možnosti – investice typu A poskytne roční zisk 10% a investice typu B, která je ovšem riskantnější, poskytne roční zisk 20%. Jak má celkovou investici rozdělit, aby měl roční zisk 13%? (označte x_1 částku věnovanou na investici typu A a x_2 částku věnovanou na investici typu B a sestavte soustavu 2 rovnic o 2 neznámých; znázorněte ji též graficky).

2. Pan Dvořák chce investovat 500 až 900 tis. Kč. Má dvě možnosti – investice typu C poskytne roční zisk 10% a investice typu D, která je ovšem riskantnější, poskytne roční zisk 25%. Jak má celkovou investici rozdělit, aby měl roční zisk alespoň 16%? (označte x_1 částku věnovanou na investici typu C a x_2 částku věnovanou na investici typu D a sestavte soustavu 2 rovnic o 2 neznámých; znázorněte ji též graficky).

3. Těžební společnost získává rudu ve dvou dolech. Ruda z dolu *Vincenc* obsahuje 1% niklu a 2% mědi, ruda z dolu *Anna* obsahuje 2% niklu a 5% mědi. Jak je třeba naplánovat těžbu, jestliže je třeba vyprodukovat
(a) 4.5 tuny niklu a 10 tun mědi? (b) aspoň 2.3 tun niklu a nejvýše 8 tun mědi?

4. Pacient dostává v nemocnici speciální výživnou dietu. Je třeba zajistit, aby jeho strava obsahovala denně aspoň 84 jednotek látky L_1 a aspoň 120 jednotek látky L_2. Jsou k dispozici dva přípravky (složky stravy): přípravek M má v 1 gramu obsah 10 jedn. L_1 a 8 jedn. L_2; přípravek N má v 1 gramu 2 jedn. L_1 a 4 jedn. L_2. Charakterizujte soustavou nerovnic potřebu uvedené diety (nezapomeňte na požadavky nezápornosti).

5. Opakujte řešený aplikační příklad 2.3.3. pro poptávkovou rovnici $c = -m+30$ a nabídkovou rovnici $c = 0.8m + 6.6$.

KREATIVNÍ ÚLOHY

1. Napište soustavu 2 rovnic o 2 neznámých x_1, x_2, která
(a) má jediné řešení $x_1 = 7, x_2 = 9$, (b) má jediné řešení, které není $x_1 = 7, x_2 = 9$,
(c) má nekonečně mnoho řešení, přičemž jedno z nich $x_1 = 7, x_2 = 9$,

2. Napište soustavu nerovnic o 2 neznámých x_1, x_2 aspoň s jedním **ostrým** znaménkem nerovnosti, která
(a) má jedno z řešení $x_1 = 7, x_2 = 9$, (b) nemá řešení $x_1 = 3, x_2 = -2$,
(c) má řešení $x_1 = 3, x_2 = -2$, a nemá řešení $x_1 = 7, x_2 = 9$, (d) nemá žádné řešení.

3. Pomocí soustavy nerovnic charakterizujte následující části roviny:
(a) třetí kvadrant, (b) kompaktní trojúhelník ABC, $A = [1,5]$, $B = [3,4]$, $C = [-2,1]$,
(c) kompaktní čtyřúhelník $ABCD$, $A = [1,1]$, $B = [8,4]$, $C = [3,5]$, $D = [2,4]$,
(d) nějaký pravoúhlý trojúhelník, jehož přepona je rovnoběžná s osou x,
(e) nějaký rovnostranný trojúhelník.

4. Charaketrizujte geometricky (v prostoru) všechny možnosti, které nastanou pro:
(a) soustavu 2 rovnic o 3 neznámých, (b) soustavu 3 rovnic o 3 neznámých.

5. Řešte maticové rovnice

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ (b) $X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

6*.(Supply and demand.) Suppose the supply and demand equations for printed T-shirts in a resort town for particular week are $p = 0.7q + 3$ (supply equation), $p = -1.7q + 15$ (demand equation), where p is price in dollars and q is the quantity in hundreds.
(a) Find the equilibrium price and quantity.
(b) Graph the two equations in the same coordinate system and identify the equilibrium point, supply curve, and demand curve.

7* Repeat the previous problem with the following supply and demand equations: $p = 0.4q+3.2$ (supply equation), $p = -1.9q + 17$ (demand equation).

8*A manufacturing plant makes two types of inflantable boats, a two-person boat and a four-person boat. Each two-person boat requires 0.9 labor-hour in the cutting department and 0.8 labour-hour in the assembly department. Each four-person boat requires 1.8 labor-hours in the cutting department and 1.2 labour-hours in the assembly department. The maximum labor-hours available each month in the cutting and assembly departments are 864 and 672, respectively.
(A) Summarize this information in a table.
(B) If x two-person boats and y four-person boats are manufactured each month, write a system of linear inequalities that reflect the conditions indicated. Find the set of feasible solutions graphically.

KONTROLNÍ OTÁZKY KE KAPITOLE 2

1. Co je to jednotkový vektor a jednotková matice a proč se tak nazývají?
2. Jak je definován úhel dvou vektorů, z nichž jeden je nulový?
3 Jak se uplatní princip matice při hledání v podrobném plánu města?
4. Jaký je výsledek násobení dvou matic, z nichž jedna je nulová?
5. Pro označení jednotkové matice se používá více symbolů. Jakých?
6. Jak byste definovali v matici vedlejší diagonálu. Uveďte konkrétní příklad.
7. Proč je druhá mocnina matice, tj. A^2, definována pouze u čtvercových matic.
8. Napište lineární rovnici, která má pouze jedno řešení.
9. Napište rovnici o dvou neznámých x_1, x_2, která není lineární.
10. Je dána lineární rovnice $2x_1 - 3x_2 = 7$. Lze tuto rovnici považovat za lineární rovnici o 5 neznámých?

TERMINOLOGICKÝ SLOVNÍČEK KE KAPITOLE 2

vektor	vector	matice	matrix [*mn.č.* matrices]
- složka v-u.	component (resolute, projection) of v.	- typ m.; m. typu $m \times n$	dimension (size) of m.; an $m \times n$ [„m by n"] m.
- nulový v.	zero (null) vector	řádek m.	row of m.
- jednotkový v.	- unit v.	sloupec of m.	column of m.
- zákl. jednot. v.	standard unit v.	prvek m.	element of m.
- volný v.	free v.	hlavní diagonála	leading diagonal
- vázaný v.	localized v.	nulová m.	zero (null) m.
- polohový v.	position v.	jednotková m.	identity (unit) m.
rovnoběžné v-y.	- parallel v-s.	čtvercová m. řádu n	square m. of order n
ortogonální v-s.	- orthogonal v-s.	- symetrická m.	symmetric m.
skalární součin	dot (scalar) product	- diagonální m.	diagonal m.
vektorový součin	cross (vector) product	- transponovaná m.	transposed m.
norma v.	norm (magnitude) of v.	součin matic	matrix product

lineární rovnice, nerovnice o n neznámých linear equation (inequality) in n unknowns (variables)

Kapitola 3
Vektorový prostor

Třetí kapitola má výrazněji teoretický charakter. Je věnována zpracování souborů vektorů a zkoumání vlastností prostorů V_n a jejich podprostorů. Jde o teoretickou a metodickou přípravu na kapitoly 4 a 5. Hlavní body problematiky jsou:

- □ definice lineární kombinace souboru vektorů, lineární závislosti a nezávislosti
- □ dokonalé zvládnutí ekvivalentních úprav a jeho využití k určení hodnosti matice
- □ aplikace techniky ekvivalentních úprav při řešení speciálních maticových rovnic
- □ zavedení pojmů lineární obal a podprostor
- □ pojem báze vektorového prostoru a souřadnic vektoru v bázi
- □ aplikace získaných poznatků na zkoumání ortogonálních doplňků ve vektorovém prostoru
- □ geometrická interpretace problematiky podprostorů
- □ využitelnost pojmu hodnosti a techniky jejího určování k efektivnímu rozhodování různých otázek a problémů v lineární algebře

3.1. Lineární závislost a nezávislost

Definice. Vektorový prostor V_n je množina **všech** n-složkových aritmetických vektorů spolu se zavedenými algebraickými operacemi[5]. *Souborem* n-složkových vektorů je libovolný seznam (skupina) $\mathcal{A}: \vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots \vec{v_k}$, vektorů z prostoru V_n, v němž mohou být některé vektory navzájem shodné. Symbolem $\mathcal{O}$ označíme *prázdný soubor*, tj. soubor neobsahující žádný vektor.

Dva soubory vektorů z prostoru V_n považujeme za *shodné* mají-li stejný počet položek a všechny jejich příslušné položky (vektory) si odpovídají.

Soubory $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ vektorů prostoru V_2 vpravo nepovažujeme za shodné (i když mají stejnou „skladbu"), neboť pořadí, v němž jsou položky (vektory) uváděny, je odlišné.

$\mathcal{A}: (1,2),\ (0,0),\ (1,2)$
$\mathcal{B}: (1,2),\ (1,2),\ (0,0)$

Definice. Ve vektorovém prostoru V_n je dán soubor vektorů $\mathcal{A}: \vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots \vec{v_k}$, a dále jsou dána reálná čísla $c_1, c_2, \dots c_k$. Vektor $\vec{v} = c_1 \cdot \vec{v_1} + c_2 \cdot \vec{v_2} + \dots + c_k \cdot \vec{v_k}$ nazveme *lineární kombinací souboru* $\mathcal{A}$ *s koeficienty* $c_1, c_2, \dots c_k$. Jsou-li **všechny** koeficienty rovny 0, nazýváme lineární kombinaci *triviální* (výsledek je nutně $\vec{o}$), v každém jiném případě pak *netriviální.*

Ukázka. Ve V_4 vezměme soubor $\mathcal{S} = (1,2,3,-2), (1,1,1,1), (1,2,3,-2)$. Potom vektor $\vec{v} = 10(1,2,3,-2) + (-2)(1,1,1,1) + 0(1,2,3,-2) = (8,18,28,-22)$ je lineární kombinací souboru $\mathcal{A}$ koeficienty $10, -2, 0$. Je zajímavé, že nulový vektor lze získat z tohoto souboru i netriviální kombinací, např. pomocí koeficientů $3, 0, -3$.

Definice. Soubor $\mathcal{A}$ vektorů prostoru V_n nazýváme *(lineárně) nezávislým*, jestliže nulový vektor $\vec{o}$ z něj vzniká **pouze** triviální kombinací. Soubory, které nejsou nezávislými nazýváme *(lineárně) závislými.* Prázdný soubor $\mathcal{O}$ je považován (definitoricky) za nezávislý soubor.

Hodností souboru $\mathcal{A}$ (označení $h(\mathcal{A})$) nazýváme velikost **maximálního nezávislého** podsouboru, který lze z $\mathcal{A}$ vybrat. Jestliže je $\mathcal{A}$ složen z k vektorů je tedy $0 \leq h(\mathcal{A}) \leq k$.

Jak jsme poznamenali v předchozí ukázce, je $\mathcal{S}$ závislý soubor, neboť z něj lze získat $\vec{o}$ netriviální kombinací. Určitě $\mathcal{S}$ obsahuje nějaký menší nezávislý soubor (možná 2 vektorů, při „nejhorším" aspoň $\mathcal{O}$). Můžeme tedy napsat $0 \leq h(\mathcal{S}) \leq 2$.

Poznámka. Závislost a nezávislost jsou velmi důležité vlastnosti souborů vektorů. Uveďme krátkou úvahu, jež názorně vysvětlí pojem závislosti: uvažme, že soubor 3 vektorů $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$, je závislý, tj. najdou se čísla c_1, c_2, c_3 (ne všechna nulová, můžeme předpokládat třeba $c_1 \neq 0$) tak, že $\vec{o} = c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} + c_3\vec{v_3}$. Pak ovšem jednoduchým výpočtem dostaneme $c_1\vec{v_1} = -c_2\vec{v_2} - c_3\vec{v_3}$ a posléze $\vec{v_1} = -\frac{c_2}{c_1}\vec{v_2} - \frac{c_3}{c_1}\vec{v_3}$. Tedy vektor $\vec{v_1}$ je lineární kombinací ostatních – je na nich „závislý".

Uvedenou úvahu lze obrátit: je-li $\vec{v_1} = d_2\vec{v_2} + d_3\vec{v_3}$, dostaneme po úpravě (od obou stran rovnice odečteme $\vec{v_1}$) $\vec{o} = -\vec{v_1} + d_2\vec{v_2} + d_3\vec{v_3}$ a tato kombinace je netriviální, neboť koeficient u $\vec{v_1}$ je -1. Toho nelze docílit u nezávislých souborů.

Pojem hodnosti vyjadřuje „míru nezávislosti" souboru. U nezávislého souboru je on sám svým maximálním nezávislým podsouborem (hodnost je rovna počtu všech vektorů souboru), u závislých souborů musíme hledat menší nezávislé podsoubory. Někdy je dokonce $\mathcal{O}$ jediný nezávislý podsoubor, který lze ze zadaného souboru vektorů vybrat (např. pro soubor $\mathcal{T}: (0,0), (0,0), (0,0)$).

[5]Pro potřeby této definice se jedná o operace sčítání vektorů a násobení vektorů reálnými čísly

Zvlášť je třeba vyšetřit soubor jediného vektoru $\vec{v}$. Má-li být $\vec{o} = c \cdot \vec{v}$, vidíme, že pro nenulový vektor je nutně $c = 0$, zatímco pro nulový vektor je c jakékoliv reálné číslo.

Věta. Nechť $\mathcal{A}$ je soubor k vektorů z V_n. Potom platí:

(i) $\mathcal{A}$ je závislý, právě když buď **některý** jeho vektor je lineární kombinací vektorů ostatních nebo se jedná o soubor **jednoho nulového** vektoru,

(ii) $\mathcal{A}$ je nezávislý, právě když buď **žádný** jeho vektor není lineární kombinací ostatních nebo se jedná o soubor **jednoho nenulového** vektoru,

(iii) $\mathcal{A}$ je závislý, právě když $h(\mathcal{A}) < k$; naopak $\mathcal{A}$ je nezávislý, právě když $h(\mathcal{A}) = k$,

Ukázky. $\mathcal{P} : (1,2),(0,0),(1,3)$, $\mathcal{Q} : (1,2),(1,1),(1,2),(1,3)$, $\mathcal{R} : (1,2,3,4),(1,1,1,2)$. První soubor je závislý, neboť obsahuje $\vec{o}$ a ten je kombinací ostatních. Stejně je závislý i druhý soubor, neboť třetí vektor je jednonásobek prvního.
Naproti tomu je soubor $\mathcal{R}$ nezávislý, neboť jinak by jeden z jeho vektorů musel být násobkem druhého. **To je typická charakteristika nezávislého souboru dvou vektorů.**

V předchozích ukázkách jsme byli schopni elegantně rozhodnout otázku závislosti a nezávislosti. U jiných souborů to nemusí být tak jednoduché. Výklad nyní směřuje k popisu standardního způsobu výpočtu hodnosti.

Definice. *Ekvivalentními úpravami* souboru vektorů $\mathcal{A}$ nazýváme následující úkony s vektory tohoto souboru:

(a) změnit pořadí vektorů,

(b) násobit kterýkoliv vektor libovolným **nenulovým** číslem,

(c) přičíst ke kterémukoliv vektoru libovolnou kombinaci zbylých (též odečíst),

(d) přidat nebo ubrat nulový vektor.

Uvedené úpravy lze opakovat. Vzniklý soubor $\mathcal{B}$ nazýváme *ekvivalentní* s původním a tento vztah zapíšeme $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$.

Věta (o hodnostech souborů). Jestliže je $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$, potom platí $h(\mathcal{A}) = h(\mathcal{B})$.

Ukázka. $(1,2),(2,3),(-2,-2) \sim (1,2),(1,1),(-2,-2) \sim (1,2),(1,1),(0,0) \sim (1,2),(1,1)$. Provedli jsme následující ekvivalentní úpravy: v prvním kroku odečetli od druhého vektoru první vektor, v druhém kroku přičetli ke třetímu vektoru dvojnásobek druhého a v posledním kroku odstranili nulový vektor. Výsledný soubor je zřejmě nezávislý, neboť žádný jeho vektor není násobkem druhého vektoru, a má tedy hodnost 2. Podle věty o hodnostech jsme tedy určili i hodnost počátečního souboru, která je také 2.

Při praktickém provádění ekvivalentních úprav (s cílem určit hodnost) se osvědčuje použití maticového zápisu. Pomocnou matici vytvoříme tak, že všechny vektory zadaného souboru zapíšeme v nějakém pořadí (nejčastěji tak, jak jsou vyjmenovány v souboru) do jejích řádků. Vyjádříme to frází:

„**vektory souboru $\mathcal{A}$ jsme uspořádali do (řádků) matice A** “.

Definice. *Hodností matice* A (označení $h(A)$) nazýváme hodnost souboru **všech** jejích řádkových vektorů. Řekneme, že matice A, B jsou ekvivalentní (zápis $A \sim B$), jestliže soubory všech jejich řádkových vektorů jsou ekvivalentní. Z věty o hodnostech souborů plyne, že ekvivalentní matice mají stejné hodnosti.

Nyní zbývá popsat postup efektivního nalezení hodnosti matice.

Definice. Nechť A je matice typu $m \times n$. Pro každé $i = 1, 2, \dots m$ definujeme „číslo" $n_A(i)$:

je-li $\vec{a_{i*}} = \vec{o}$ pak, $n_A(i) = \infty$, je-li $\vec{a_{i*}} \neq \vec{o}$, pak $n_A(i)$ je nejmenší j, pro které $a_{ij} \neq 0$.

Matice A se nazývá *matice v Gaussově* [6] *tvaru*, jestliže neobsahuje nulový řádek a posloupnost čísel $n_A(i)$ je rostoucí, tj. platí $n_A(1) < n_A(2) < \dots < n_A(m) < \infty$.

V ukázce jsme připravili dvě matice. Pro matici C je $n_C(1) = 2$, $n_C(2) = 3$, $n_C(3) = \infty$, $n_C(4) = 2$. Je vidět, že tato čísla zaznamenávají výskyt prvního „zleva" nenulového prvku v řádcích. Matice C není v Gaussově tvaru (posloupnost $2, 3, \infty, 2$ nevyhovuje).

Pro matici D dostáváme po řadě $n_D(1) = 2, n_D(2) = 4, n_D(3) = 5$, neboli $2 < 4 < 5 < \infty$, tj. D je matice v Gaussově („schodovitém, stupňovitém") tvaru.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{8} & 2 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & \boxed{2} & 3 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{5} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-9} \end{bmatrix}$$

Věta. Je-li A matice v Gaussově tvaru, pak $h(A)$ je rovna počtu jejích řádků.

Komentář. Namísto obecného (teoretického) důkazu uveďme ukázku úvahy pro výše uvedenou matici D, která je (jak víme) v Gaussově tvaru. Její řádkové vektory jsou $\vec{d_{1*}} = (0, 2, 3, 8, 2)$, $\vec{d_{2*}} = (0, 0, 0, 5, 4)$, $\vec{d_{3*}} = (0, 0, 0, 0, -9)$. Abychom ukázali, že tato skupina vektorů je nezávislá, studujme rovnici $\vec{o} = c_1\vec{d_{1*}} + c_2\vec{d_{2*}} + c_3\vec{d_{3*}}$; rozepíšeme ji po složkách (vektory jsou 5-složkové):

1. složka:	$0 = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cdot 0$		
2. složka:	$0 = c_1 \cdot 2 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cdot 0$	neboli	$0 = 2c_1$
3. složka:	$0 = c_1 \cdot 3 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cdot 0$		
4. složka:	$0 = c_1 \cdot 8 + c_2 \cdot 5 + c_3 \cdot 0$	neboli	$0 = 8c_1 + 5c_2$
5. složka:	$0 = c_1 \cdot 2 + c_2 \cdot 4 + c_3 \cdot (-9)$	neboli	$0 = 2c_1 + 4c_2 - 9c_3$

Nyní již využijeme toho, že matice byla v Gaussově tvaru – hodnoty $n_D(1) = 2$, $n_D(2) = 4$, $n_D(3) = 5$ rozhodují o použití 2., 4., a 5. rovnice pro argumentaci:

z 2. rovnice je „vynuceno" $c_1 = 0$, což vzápětí (po dosazení do 4. rovnice) „vynutí" $c_2 = 0$ a konečně dosazení obou již zjištěných hodnot do 5.rovnice dává $c_3 = 0$. Kombinace je tedy nutně triviální, čili soubor je nezávislý. Tedy $h(D) = 3 =$ počet řádků matice D.

Věta. Každou nenulovou matici lze ekvivalentními úpravami převést na Gaussův tvar.

Příklad 1. Ukažme nejdříve úpravu matice na Gaussův tvar na jednodušším příkladě.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -4 & -5 \\ 0 & 3 & 6 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 2 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & -4 & -5 \\ 0 & 0 & \mathbf{18} & 23 \end{bmatrix}$$

Matici jsme postupně upravovali ve třech krocích. V prvním kroku jsme si připravili první tzv. „klíčovou jedničku" a to výměnou 1. a 2. řádku [ekvivalentní úprava (a)]. První řádek nazveme nyní „klíčovým řádkem".

V druhém kroku jsme tuto „jedničku" využili k získání „nul" ve zbytku prvního sloupce pod ní: od druhého řádku jsme odečetli 2-násobek klíčového řádku [ekvivalentní úprava (c)] a dále jsme ke třetímu řádku přičetli klíčový řádek (ten zůstal po provedení předchozí operace nezměněn a mohl tedy být použit ještě jednou) [znovu ekvivalentní úprava (c)].

[6] Karl Friedrich Gauss (1777–1855), německý matematik

Po provedených úpravách se dokonce (šťastnou náhodou) objevila ve druhém řádku další potřebná klíčová jednička, pomocí níž již snadno dokončíme úpravu do Gaussova tvaru: od třetího řádku odečteme 3-násobek druhého řádku [ekvivalentní úprava (c)].

Příklad 2. V této ukázce demonstrujeme použití užitečné pomůcky, tzv. *kontrolního sloupce* (zde symbol „**k**"). Tento sloupec přidaný vedle matice obsahuje hodnoty součtů jednotlivých řádků. Při každé manipulaci s řádkem provádíme daný úkon též s prvkem kontrolního sloupce. „Křížová kontrola" – tj. revize řádkového součtu – může zachytit numerickou chybu či chybu při opisování.

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \mathbf{k} \\ 11 \\ 18 \\ 7 \\ 5 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \mathbf{k} \\ 4 \\ 18 \\ 7 \\ 5 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \mathbf{k} \\ 4 \\ 6 \\ -1 \\ -3 \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \mathbf{k} \\ 4 \\ 3 \\ -1 \\ -3 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \mathbf{k} \\ 4 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{-1} \end{bmatrix} \begin{array}{c} \mathbf{k} \\ 4 \\ 3 \\ -1 \end{array}$$

1. krok: získání první klíčové jedničky - od 1.ř. odečten 3.ř.,

2. krok: nuly po klíčovou jedničkou - od 2.ř. odečten 3-násobek klíč. ř., dále od 3. ř. odečten 2-násobek klíč. ř., dále od 4. ř. odečten 2-násobek klíč. ř. (všechny tyto operace lze uskutečnit bezprostředně za sebou, protože klíčový ř. se nemění),

3. krok: získání nové klíčové jedničky - dělíme 2.ř. dvěma [ekvivalentní úprava (b)],

4. krok: nuly pod klíčovou jedničkou - ke 4.ř. přičteme klíč. ř.

5. krok: odstranění 4. ř., který je nulový [ekvivalentní úprava (d)].

Poznámka. Je třeba upozornit na to, že postup úpravy dané matice na matici v Gaussově tvaru není jednoznačný. V uvedeném příkladu 2 jsme mohli již na začátku od 1. řádky odečíst 4. řádku a získat tak první klíčovou jedničku jiným způsobem. Důsledkem této nejednoznačnosti je i to, že dvěma výpočtářům mohou vyjít dva různé výsledky (matice v Gaussově tvaru). Podstatné je, že výsledné matice jsou ekvivalentní; mají stejný počet řádků a tím i stejnou hodnost.

Nyní formulujeme zásady obecného postupu (algoritmu) úpravy matice.

Strategie pro úpravu nenulové matice A na Gaussův tvar:

(1) Najdeme první nenulový sloupec (řekněme j-tý) a výměnou a úpravou řádků dosáhneme toho, aby $a_{1j} = 1$ (klíčová jednička);

(2) Pomocí klíčového řádku dosáhneme toho, aby se všechny prvky „pod" klíčovou jedničkou změnily na nuly (tzv. eliminace);

(3) Nulové řádky odstraníme;

(4) Postup (1), (2), (3) aplikujeme znovu na zbytek upravené matice bez prvného řádku, (1. řádek již jen formálně opisujeme až do ukončení postupu).

(5) Také na další řádky aplikujeme uvedený postup, dokud nebude celá matice v požadovaném tvaru.

Při tomto postupu se počet řádků upravované matice nemůže zvýšit, ale může se snížit (bod (3)).

ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Řešený příklad 3.1.1. Určete hodnost zadané matice $M = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Řešení. Ekvivalentními úpravami převedeme matici M na Gaussův tvar.

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 16 \\ 12 \\ 12 \\ 4 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 12 \\ 12 \\ 4 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -9 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ -4 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 4 \\ -4 \\ -4 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 4 \\ -4 \\ 0 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 4 \\ -4 \end{matrix}$$

Všimli jste si, že jsme „vystačili" s klíčovou **3** a klíčovou **−2** ? Výsledek: $h(M) = 3$.

Řešený příklad 3.1.2. Je dán soubor vektorů $\mathcal{S}$: $(2,2,3,2)$, $(1,1,1,1)$, $(1,3,1,1)$, $(1,3,1,3)$. Zjistěte, zda $\mathcal{S}$ je závislý soubor.

Řešení. Vektory uspořádáme (ve výhodném pořadí) do matice a určíme její hodnost.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 9 \\ 6 \\ 8 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Skupina je nezávislá, neboť hodnost je rovna počtu vektorů (tj. 4).

Řešený příklad 3.1.3. Prověřte platnost vztahu $h(A) = h(A^{\mathrm{T}})$ pro $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.

Řešení. Vypočteme obě hodnosti:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obě hodnosti jsou rovny 2.

V posledním řešeném příkladu jsme prověřili na matici A, že při transponování nezmění hodnost. Tuto vlastnost má každá matice (viz následující věta), což zdůvodňuje možnost upravovat matici i manipulací se sloupci (jsou to řádky matice transponované). My se v našem textu držíme zásadně úprav **řádkových** – máme k tomu i další důvody, o nichž se zmíníme později.

Věta. Pro každou matici A platí $h(A) = h(A^{\mathrm{T}})$.

Důsledek. Má-li soubor vektorů $\mathcal{S}$ z prostoru V_n aspoň $n+1$ vektorů, je nutně závislý.

Zdůvodnění. Vektory souboru $\mathcal{S}$ uspořádáme do řádků matice (označme ji A). Tato matice má n sloupců, neboť vektory jsou n-složkové. Matice A^{T} má tedy n řádků a po úpravě na Gaussův tvar se jejich počet nezvýší a tedy $h(A^{\mathrm{T}}) \leq n$. Soubor $\mathcal{S}$ má hodnost nejvýše n a zároveň aspoň $n+1$ vektorů, tedy je závislý.

ÚLOHY K ŘEŠENÍ

1. Rozhodněte, které z následujících matic jsou v Gaussově tvaru, a vysvětlete proč.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ (i) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (j) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (k) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (l) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

(m) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ (n) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ (o) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (p) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (q) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ (r) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 7 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

(s) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (t) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (u) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ (w) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ (z) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

2. Co se stalo s jednotlivými řádky matice? $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 10 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -19 & -9 \end{bmatrix}$

3. Vysvětlete jednotlivé kroky úpravy matice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Určete hodnosti jednotlivých matic v úloze **1.**

5. Pomocí výpočtu hodnosti rozhodněte u zadaných souborů, zda jsou závislé nebo nezávislé:

(a) $(1,2)$, $(2,1)$ (b) $(1,0)$, $(0,1)$ (c) $(1,0,1)$, $(0,1,2)$ (d) $(1,0,-1)$, $(-2,0,2)$

(e) $(1,2,3)$, $(2,1,3)$ (f) $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,1,0)$ (g) $(1,1,1)$, $(0,1,2)$, $(2,1,0)$

(h) $(1,2,3,4,5)$, (i) $(1.5,\ 0,1,0)$, $(0,0,1,1)$ (j) $(1,-1,1,1)$, $(-1,1,2,1)$, $(1,1,0,0)$

(k) $(1,2,3)$, $(2,1,3)$, $(3,1,2)$, $(2,3,1)$ (l) $(1,1,-1,1,1)$, $(-1,1,2,1,1)$, $(0,2,1,2,2)$

6. K danému souboru přidejte ještě jeden nenulový vektor takový, aby vzniklá skupina byla závislá, nebo naopak takový, aby byla nezávislá:

(a) $(1,1)$, $(2,2)$ (b) $(1,0,6)$, $(2,2,2)$ (c) $(-3,0,2,0)$, $(1.5,\ 0,-1,0)$

(d) $(1,2)$, $(2,1)$ (e) $(8,4,6)$, $(1,1,1)$ (f) $(-3,0,2,0,1.5,\ 0,-1,0)$

7. Jsou dány dvě matice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Určete hodnosti matic: A, B, $10A$, $A+B$, $2A-B$, $A\cdot B$, $B\cdot A^{\mathrm{T}}$, $A^{\mathrm{T}}\cdot B$, A^{T}, $B\cdot B$.

APLIKACE

Nejcennějším prvkem této podkapitoly je technika ekvivalentních úprav. V dalších kapitolách se ukáže její přínos ke zpracování skupin vektorů, matic i soustav rovnic. Tyto postupy jsou v matematice známy již dlouhou dobu, u soustav rovnic se mluví o eliminačních metodách, u matic též kondenzačních postupech. Ukažme zde jednu aplikaci.

Řešení maticových rovnic tvaru $A \cdot X = B$.

Motivační příklad. Máme řešit soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, která má variantně zadány tři různě pravé strany. Navržený postup ukazuje, že je možno všechny soustavy (jsou tedy vlastně 3) řešit najednou. Postup budeme přehledně zaznamenávat v matici napravo tak, že před dělící čarou jsou koeficienty levých stran, za dělící čarou jsou jednotlivé varianty pravých stran.

Zadání:
$$\begin{matrix} 5x_1+3x_2=6 & \text{nebo} = 5 & \text{anebo} = 4 \\ 4x_1+2x_2=4 & \text{nebo} = 0 & \text{anebo} = -8 \end{matrix} \quad \left[\begin{array}{cc|ccc} 5 & 3 & 6 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 0 & -8 \end{array}\right]$$

Výměna pořadí rovnic.
$$\begin{matrix} 4x_1+2x_2=4 & \text{nebo} = 0 & \text{anebo} = -8 \\ 5x_1+3x_2=6 & \text{nebo} = 5 & \text{anebo} = 4 \end{matrix} \quad \left[\begin{array}{cc|ccc} 4 & 2 & 4 & 0 & -8 \\ 5 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{array}\right]$$

První rovnici dělíme 4.
$$\begin{matrix} x_1+0.5x_2=1 & \text{nebo} = 0 & \text{anebo} = -2 \\ 5x_1+\ 3x_2=6 & \text{nebo} = 5 & \text{anebo} = 4 \end{matrix} \quad \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0.5 & 1 & 0 & -2 \\ 5 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{array}\right]$$

Od druhé rov. odečten 5-násobek první.
$$\begin{matrix} x_1+0.5x_2=1 & \text{nebo} = 0 & \text{anebo} = -2 \\ 0.5x_2=1 & \text{nebo} = 5 & \text{anebo} = 14 \end{matrix} \quad \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0.5 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0.5 & 1 & 5 & 14 \end{array}\right]$$

Druhá rov. násobena 2.
$$\begin{matrix} x_1+0.5x_2=1 & \text{nebo} = 0 & \text{anebo} = -2 \\ x_2=2 & \text{nebo} = 10 & \text{anebo} = 28 \end{matrix} \quad \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0.5 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 10 & 28 \end{array}\right]$$

Z druhé rovnice je vyloučena (eliminována) proměnná x_1, takže z ní snadno určíme x_2 a po jeho dosazení do první rovnice získáme posléze x_1. První varianta pravých stran: $x_{11} = 0, x_{21} = 2$, druhá var. pravých stran: $x_{12} = -5, x_{22} = 10$, třetí var. pravých stran: $x_{13} = -16, x_{23} = 28$.

Na závěr ukázky provedeme podstatný **myšlenkový obrat**. Jestliže sepíšeme výsledky výpočtu do matice, je vidět porovnáním s původním zadáním, že jsme řešili maticovou rovnici

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 4 & 0 & -8 \end{bmatrix} \text{ s výsledkem } X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -16 \\ 2 & 10 & 28 \end{bmatrix}$$

Věta (o řešení maticových rovnic $A \cdot X = B$). Je-li A matice typu $m \times n_1$ a B matice typu $m \times n_2$, pak symbol $[A|B]$ označuje matici typu $m \times (n_1 + n_2)$, která vznikne jejich spojením (sepsáním sloupců vedle sebe). Matici $[A|B]$ nazýváme *dělenou* maticí a rozlišujeme v ní dělící čáru mezi levou a pravou částí.

Jestliže $[A|B] \sim [A_1|B_1]$, potom rovnice $A \cdot X = B$ a rovnice $A_1 \cdot X = B_1$ s neznámou maticí X mají stejnou množinu řešení (tj. matic X, které je splňují).

V motivačním příkladě jsme ukázali jak řešit soustavu s více pravými stranami. Nyní vysvětlíme metodu řešení maticových rovnic.

Řešený aplikační příklad 3.1.1 Řešte maticové rovnice

(a) $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix}2&0\\8&6\end{bmatrix}$ (b) $Y\cdot\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\8&6\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix}4&2\\8&5\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix}3&4\\6&8\end{bmatrix}$

Řešení. (a) Hledáme matici $X=\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{bmatrix}$ takovou, že $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\8&6\end{bmatrix}$.

Aplikace věty spočívá ve „zpracování" dělené matice:

$$\left[\begin{array}{cc|cc}1&2&2&0\\3&4&8&6\end{array}\right]\begin{array}{c}5\\21\end{array}\sim\left[\begin{array}{cc|cc}1&2&2&0\\0&-2&2&6\end{array}\right]\begin{array}{c}6\\6\end{array}\sim\left[\begin{array}{cc|cc}1&2&2&0\\0&1&-1&-3\end{array}\right]\begin{array}{c}5\\-3\end{array}\quad\text{čili}\quad\begin{array}{rcrl}x_1+2x_2&=&2&\text{nebo }=0\\x_2&=&-1&\text{nebo }=-3\end{array}$$

Snadno určíme u první soustavy: $x_{21}=-1$, pak $x_{11}=4$; podobně pro druhou $x_{22}=-3, x_{12}=6$.

Tedy $X=\begin{bmatrix}4&6\\-1&-3\end{bmatrix}$ řeší rovnici $\begin{bmatrix}1&2\\0&2\end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix}2&0\\-1&-3\end{bmatrix}$ a dle věty je to i řešení rovnice zadané.

(b) Zapišme zadanou rovnici nejdříve symbolicky jako $Y\cdot C=D$. Zde nelze přímo použít uvedenou větu, neboť neznámá matice je nalevo od matice C (ve větě je požadována **napravo** !). Proto nejdříve obě strany rovnice **transponujeme** a využijeme rovnosti $(P\cdot Q)^{\mathrm T}=Q^{\mathrm T}\cdot P^{\mathrm T}$.

Dostáváme rovnici $\begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix}\cdot Y^{\mathrm T}=\begin{bmatrix}2&8\\0&6\end{bmatrix}$. Označíme $X=Y^{\mathrm T}$ a rovnici řešíme podle věty:

$$\left[\begin{array}{cc|cc}1&3&2&8\\2&4&0&6\end{array}\right]\begin{array}{c}14\\12\end{array}\sim\left[\begin{array}{cc|cc}1&3&2&8\\0&-2&-4&-10\end{array}\right]\begin{array}{c}14\\-16\end{array}\sim\left[\begin{array}{cc|cc}1&3&2&8\\0&1&2&5\end{array}\right]\begin{array}{c}5\\8\end{array}\quad\text{čili}\quad\begin{array}{rcrl}x_1+3x_2&=&2&\text{nebo }=8\\x_2&=&2&\text{nebo }=5\end{array}$$

Snadno dopočteme $X=\begin{bmatrix}-4&-7\\2&5\end{bmatrix}$ a nakonec tedy $Y=X^{\mathrm T}=\begin{bmatrix}-4&2\\-7&5\end{bmatrix}$

(c) Přejdeme hned k aplikaci věty o řešení rovnic:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc}1&2&3&4&2\\2&4&6&8&5\end{array}\right]\begin{array}{c}12\\25\end{array}\sim\left[\begin{array}{ccc|cc}1&2&3&4&2\\0&0&0&0&1\end{array}\right]\begin{array}{c}12\\1\end{array}\quad\text{čili}\quad\begin{array}{rl}x_1+2x_2+3x_3=4&\text{nebo }=2\\0x_1+0x_2+0x_3=0&\text{nebo }=1\end{array}$$

Jedna z rovnic $0x_1+0x_2+0x_3=1$ je nesplnitelná, tj. maticová rovnice proto nemá žádné řešení.

(d) Řešíme analogicky jako předchozí:

$$\left[\begin{array}{cc|cc}1&2&3&4\\2&4&6&8\end{array}\right]\begin{array}{c}10\\20\end{array}\sim\left[\begin{array}{cc|cc}1&2&3&4\\0&0&0&0\end{array}\right]\begin{array}{c}10\\0\end{array}\quad\text{čili}\quad\begin{array}{rcrcrcl}x_1&+&2x_2&=&3&\text{nebo}&=4\\0x_1&+&0x_2&=&0&\text{nebo}&=0\end{array}$$

Zřejmě druhá rovnice je formální. Řešení získáme z první rovnice tak, že x_2 je volitelný parametr. První var. pr. strany: $x_{12}=t, x_{11}=3-2t$, druhá var. pr. strany: $x_{21}=s, x_{11}=4-2s$.

Úloha má nekonečně mnoho řešení $X=\begin{bmatrix}3-2t&4-2s\\t&s\end{bmatrix}$, kde $s,t\in\mathbf{R}$ jsou libovolná čísla.

APLIKAČNÍ ÚLOHY K ŘEŠENÍ

1 Pro matice $A=\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&3\\1&3\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}1&1&3\\2&2&6\end{bmatrix}$ řešte rovnice:

(a) $A\cdot X=B$ (b) $B\cdot X=A$ (c) $A\cdot X=A$ (d) $X\cdot A=B$ (e) $X\cdot A=B^{\mathrm T}$
(f) $B\cdot X=B$ (g) $A\cdot X=C$ (h) $B\cdot X=C$ (i) $C\cdot X=C$ (j) $X\cdot C^{\mathrm T}=B^{\mathrm T}$

3.2. Podprostory prostoru V_n

Definice. Nechť $\mathcal{S}$ je neprázdný soubor vektorů z prostoru V_n. *Lineárním obalem* tohoto souboru (označení $\ll \mathcal{S} \gg$) nazveme množinu **všech** lineárních kombinací souboru $\mathcal{S}$. Podobně pro každou neprázdnou množinu V vektorů z V_n jejím *lineárním obalem* $\ll V \gg$ míníme množinu **všech** výsledků lineárních kombinací vektorů z V.

Poznámka. V obalu se vždy objeví $\vec{o}$ jako výsledek triviální kombinace. Ovšem obal i velmi malého souboru či množiny může být obrovský. Jakmile totiž máme k dispozici aspoň jeden nenulový vektor $\vec{v}$, objeví se v obalu všechny jeho násobky, tj. vektory tvaru $r \cdot \vec{v}$ a ty jsou (v případě nenulového vektoru) navzájem různé – tedy je jich nekonečně mnoho.

Základní otázkou je, jak efektivně rozpoznat, zda vektor patří do obalu daného souboru. Úplnou odpověď poskytuje jednoduchý test popsaný v následující větě.

Věta. Je-li $\vec{v} \in V_n$ a dále $\mathcal{S}$ soubor vektorů z V_n, potom $\vec{v} \in \ll \mathcal{S} \gg$ právě když hodnost souboru S se po přidání vektoru $\vec{v}$ nezmění.

Řešený příklad 3.2.1. Zjistěte, který z vektorů $\vec{v}_1 = (1,1,5)$, $\vec{v}_2 = (1,2,3)$ patří do obalu souboru $\mathcal{S} : (1,4,2), (2,5,7), (3,6,12)$.

Řešení. Nejdříve zpracujeme soubor S ekvivalentními úpravami:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -6 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vidíme, že $h(\mathcal{S}) = 2$. Je-li daný vektor z obalu skupiny $\mathcal{S}$, nesmí zvýšit její hodnost. Přidáme nyní $\vec{v}_1$ (rovnou do upraveného souboru – je to výhodnější):

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \text{ hodnost je stejná, tj. } v_1 \in \ll \mathcal{S} \gg.$$

Podobně zkusíme přidat vektor $\vec{v}_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ hodnost se zvýšila na 3, tj. } v_1 \notin \ll \mathcal{S} \gg.$$

Definice. Množina vektorů P z prostoru V_n se nazývá *podprostorem* prostoru V_n, jestliže platí $\ll P \gg = P$. Speciálně jsou podprostory všechny lineární obaly souborů a množin a také takzvaný *triviální podprostor* obsahující **pouze** nulový vektor.

Je třeba zdůraznit, že ani nekonečná množina vektorů nemusí být ještě podprostorem. Například nekonečná množina všech dvousložkových vektorů majících první složku rovnu 2 se při „obalení" ještě zvětší - v obalu se totiž objeví také součet každých takových dvou vektorů a ten má první složku rovnu 4, atd. atd.

Podprostor je užitečný abstraktní pojem. Následující věta ho charakterizuje.

Věta. Neprázdná množina vektorů V je podprostorem, právě když splňuje dvě podmínky

(i) [součet] jestliže $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$, pak $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in V$,

(ii) [násobek] jestliže $\vec{v}_1 \in V$, potom pro každé $r \in \mathbf{R}$ platí $r \cdot \vec{v}_1 \in V$.

Ukázka 1. Množina všech 4-složkových vektorů, jejichž poslední složka je nulová, je podprostorem prostoru V_4. Je to proto, že podmínky (i), (ii) z předchozí věty jsou zřejmě splněny (součet i násobek takových vektorů má opět čtvrtou složku nulovou).

Ukázka 2. Nechť V je množina všech vektorů kolmých k vektoru $\vec{a} = (1,2,3,4,3)$. Pak V je podprostorem prostoru V_5. Prověřme opět obě požadované vlastnosti.
(i) jsou-li $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ vektory kolmé na $\vec{a}$ (tj. $\vec{v_1} \cdot \vec{a} = 0$, $\vec{v_2} \cdot \vec{a} = 0$), pak $(\vec{v_1} + \vec{v_2}) \cdot \vec{a} = 0 + 0 = 0$,
(ii) je-li $\vec{v}$ kolmý na $\vec{a}$, pak ovšem $(r \cdot \vec{v}) \cdot \vec{a} = r \cdot 0 = 0$.

Definice a Věta. Je-li $P = \ll \mathcal{S} \gg$, pak $\mathcal{S}$ nazýváme souborem *generátorů* [7] tohoto podprostoru P. Nezávislý soubor generátorů nazýváme *bází.*

Pro každé dva soubory vektorů je $\mathcal{S}_1 \sim \mathcal{S}_2$, právě když $\ll \mathcal{S}_1 \gg = \ll \mathcal{S}_2 \gg$. Tedy všechny soubory generátorů daného podprostoru P mají stejnou hodnost – nazýváme ji *dimenzí* podprostoru P a značíme $\dim P$. Triviální prostor má dimenzi 0.
Všechny báze netriválního prostoru P mají stejný počet vektorů a ten je právě $\dim P$.

Řešený příklad 3.2.2. Určete dimenzi podprostoru $P = \ll (1,3,0),(2,7,0),(3,9,0) \gg$ a najděte nějakou jeho bázi.

Řešení. Zpracujeme zadaný soubor generátorů:
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.\ \text{Tedy je } \dim P = 2.$$
Původní soubor generátorů nebyl bází (byl závislý). Získali jsme však jednu z mnoha bází podprostoru P, totiž $\mathcal{B} : \vec{b}_1 = (1,3,0), \vec{b}_2 = (0,1,0)$.

Věta a Definice. Nechť soubor $\mathcal{B} : \vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_k$ generuje netriviální podprostor P.

(a) Je-li soubor $\mathcal{B}$ závislý, pak libovolný vektor $\vec{v} \in P$ je možno vyjádřit nekonečně mnoha způsoby jako lineární kombinaci vektorů $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_k$;

(b) je-li soubor $\mathcal{B}$ nezávislý – tedy báze, pak libovolný vektor $\vec{v} \in P$ je možno vyjádřit **jediným způsobem** jako lineární kombinaci $\vec{v} = c_1 \cdot \vec{b}_1 + c_2 \cdot \vec{b}_2 + \ldots + c_k \cdot \vec{b}_k$ a koeficienty $c_1, c_2, \ldots, c_k$ nazýváme (**v tomto pevném pořadí**) *souřadnicemi vektoru $\vec{v}$ v bázi $\mathcal{B}$.*

V řešeném příkladu 3.2.2. jsme získali bázi $\mathcal{B} : \vec{b}_1 = (1,3,0), \vec{b}_2 = (0,1,0)$ zadaného podprostoru. Máme určit souřadnice vektoru vektoru $(5,-1,0)$ v této bázi. Hledáme tedy čísla c_1, c_2, pro něž $(5,-1,0) = c_1 \cdot \vec{b}_1 + c_2 \cdot \vec{b}_2 = c_1 \cdot (1,3,0) + c_2 \cdot (0,1,0)$, což po složkách vede na rovnice:
rovnice pro 1. složku: $c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 5$,
rovnice pro 2. složku: $c_1 \cdot 3 + c_2 \cdot 1 = -1$,
rovnice pro 3. složku: $c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0$.
Soustava má jediné řešení (tj. souřadnice zadaného vektoru v bázi $\mathcal{B}$): $c_1 = 5, c_2 = -16$.

Nejčastěji se setkáme s bázemi prostoru V_n.

Definice a Věta. Dimenze celého vektorového prostoru V_n je rovna n. Tedy každá báze prostoru V_n je nezávislý soubor složený z n jeho vektorů.
Kanonickou bází prostoru V_n nazýváme bázi tvořenou základními jednotkovými vektory (v pevném pořadí) $\mathcal{E}_n : (1,0,\ldots,0), (0,1,\ldots,0), \ldots, (0,0,\ldots,1)$, neboli $\mathcal{E}_n : \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$.
Je-li $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in V_n$, pak souřadnice vektoru $\vec{v}$ v kanonické bázi $\mathcal{E}_n$ jsou totožné s jeho složkami, tj. jsou to $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

[7] též ho nazýváme určujícím souborem nebo říkáme, že soubor $\mathcal{S}$ generuje podprostor P

Ukázka: Uvažme ve V_2 dvě báze $\mathcal{E}_2 : (1,0)\ (0,1)$ a $\mathcal{B} : (1,2),\ (3,7)$. Zřejmě pro vektor $\vec{v} = (5,-8)$ platí $\vec{v} = 5 \cdot (1,0) + (-8) \cdot (0,1)$, tedy souřadnice vektoru $(5,-8)$ v kanonické bázi jsou $5, -8$. Určíme souřadnice vektoru $\vec{v}$ v bázi $\mathcal{B}$. Hledáme čísla c_1, c_2 tak, aby $c_1 \cdot (1,2) + c_2 \cdot (3,7) = (5,-8)$, což znamená po složkách:

rovnice pro 1. složku: $c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 3 = 5,$
rovnice pro 2. složku: $c_1 \cdot 2 + c_2 \cdot 7 = -8.$

Po vyřešení dvou rovnic o dvou neznámých máme $c_1 = 59, c_2 = -18$, což jsou hledané souřadnice vektoru $\vec{v}$ v bázi $\mathcal{B}$.

Řešený příklad 3.2.3. Jsou dány soubory $\mathcal{A} : \vec{a}_1 = (1,-3), \vec{a}_2 = (2,2)$, $\mathcal{B} : \vec{b}_1 = (4,1), \vec{b}_2 = (2,1)$.
(a) Prověřte, že jde v obou případech o bázi prostoru V_2,
(b) Jsou-li $5, 3$ souřadnice vektoru $\vec{v}$ v bázi $\mathcal{A}$, najděte souřadnice tohoto vektoru v bázi $\mathcal{B}$.

Řešení. Báze prostoru V_2 je soubor 2 nezávislých vektorů. Je třeba prověřit, že $h(\mathcal{A}) = h(\mathcal{B}) = 2$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$ Obě jsou báze.

Nyní určíme vektor $\vec{v}$ – jeho složky totiž neznáme, avšak známe jeho souřadnice v bázi $\mathcal{A}$; tedy $\vec{v} = 5(1,-3) + 3(2,2) = (11,-9)$.

Posléze určíme souřadnice vektoru $\vec{v} = (11,-9)$ v bázi $\mathcal{B}$. Hledáme čísla c_1, c_2 tak, aby $c_1 \cdot (4,1) + c_2 \cdot (2,1) = (11,-9)$, což znamená po složkách:

rovnice pro 1. složku: $c_1 \cdot 4 + c_2 \cdot 2 = 11,$
rovnice pro 2. složku: $c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 = -9.$

Souřadnice vektoru $\vec{v}$ v bázi $\mathcal{B}$ jsou $c_1 = \frac{29}{2}, c_2 = -\frac{47}{2}$.

Poznámka. Obecně vede úloha na určení souřadnic vektoru v bázi prostoru V_n na soustavu n rovnic a n neznámých. Tyto soustavy se naučíme efektivně řešit v dalších kapitolách.

ÚLOHY K ŘEŠENÍ

1. Rozhodněte, který ze zadaných dvou vektorů patří do lineárního obalu souboru $\mathcal{S}$

(a) $\vec{v}_1 = (1,5),\ \vec{v}_2 = (-6,2),\quad \mathcal{S} : (3,-1), (-3,1), (12,-4), (-24,8)$
(b) $\vec{v}_1 = (1,4,7),\ \vec{v}_2 = (0,-1,-2),\quad \mathcal{S} : (1,2,3), (1,1,1), (2,5,8), (2,2,2)$
(c) $\vec{v}_1 = (1,2,1,2),\ \vec{v}_2 = (1,1,1,1),\quad \mathcal{S} : (0,1,1,1), (0,1,-3,1), (1,2,1,-4),$
(d) $\vec{v}_1 = (1,0,0,0,1),\ \vec{v}_2 = (1,1,1,1,2),\quad \mathcal{S} : (1,0,1,0,1), (1,1,0,0,1), (0,1,1,1,1).$

2. Určete dimenzi podprostoru zadaného souborem generátorů $\mathcal{S}$ a najděte nějakou jeho bázi.

(a) $\mathcal{S} : (3,-1), (-3,1), (12,-4), (-24,8), (1,1)$
(b) $\mathcal{S} : (1,2,3), (1,1,1), (2,5,8), (2,2,2)$
(c) $\mathcal{S} : (1,-1,1), (2,-2,2), (1,2,3), (0,3,2)$
(d) $\mathcal{S} : (1,1,1,1), (0,1,1,1), (0,1,-3,1), (1,2,1,-4),$
(e) $\mathcal{S} : (1,0,2,0,1), (1,2,0,0,1), (0,1,1,1,1),$
(f) $\mathcal{S} : (0,0,1,1,1,1,1), (0,0,1,1,0,0,0), (0,0,0,0,0,1,1), (0,0,1,1,0,1,1).$

3. Rozhodněte, zda $\mathcal{B}$ je báze příslušného prostoru V_n, a jestliže ano, najděte souřadnice vektoru $\vec{v}$ v této bázi.

(a) $\vec{v} = (11,5),\quad \mathcal{B} : (3,-1), (1,1)$ (b) $\vec{v} = (10,43),\quad \mathcal{B} : (1,-1), (7,1)$
(c) $\vec{v} = (4,2,9),\ \mathcal{B} : (1,1,1), (0,1,1), (0,0,1),$ (d) $\vec{v} = (7,5,2),\ \mathcal{B} : (1,0,1), (0,1,0), (1,1,1).$

4. Vektor $\vec{v}$ má v bázi $\mathcal{A}$ souřadnice -6, 7. Určete jeho souřadnice v bázi $\mathcal{B}$.

(a) $\mathcal{A}: (3,-1),(3,1),\ \mathcal{B}: (1,2),(2,1)$ (b) $\mathcal{A}: (4,1),(1,1),\ \mathcal{B}: (1,-1),(2,1)$

(c) $\mathcal{A}: (0,-1),(0,1),\ \mathcal{B}: (1,0),(0,-1)$ (d) $\mathcal{A}: (4,4),(2,2),\ \mathcal{B}: (1,1),(0,1)$

(e) $\mathcal{A}: (4,1),(2,1),\ \mathcal{B}: (1,3),(9,1)$ (f) $\mathcal{A}: (2,1),(7,7),\ \mathcal{B}: (1,-1),(-3,3)$

5. Přidejte k souboru $\mathcal{S}$ další vektor nebo vektory, aby vznikla báze příslušného V_n.

(a) $\mathcal{S}: (3,-1)$ (b) $\mathcal{S}: (4,1,1),(1,1,4)$

(c) $\mathcal{S}: (3,-1,0,0,0),(3,-1,1,0,0)$ (d) $\mathcal{S}: (-1,1,1),(1,1,-1)$

(e) $\mathcal{S}: (0,1,0,1,-1),(1,0,1,0,1),(1,1,1,1,1)$ (f) $\mathcal{S}: (1,1,1,2),(1,1,1,1),(1,1,2,1)$

APLIKACE

(A) Ortogonální doplněk. Uveďme nejdříve další poznatky o podprostorech.

Věta (o průniku podprostorů). Jsou-li P_1, P_2 podprostory prostoru V_n, potom množinový průnik $P_1 \cap P_2$ je též podprostorem prostoru V_n. Obecněji platí: průnik libovolného systému podprostorů prostoru V_n je opět podprostor prostoru V_n.

Komentář. Stačí prověřit charakteristické vlastnosti podprostoru – průnik splňuje (i) a (ii). „Bohatost" průniku nelze předvídat. Jako příklad si vezměme tři podprostory prostoru V_3:

P_1 ... všechny vektory, jejichž 3. složka je nulová;
P_2 ... všechny vektory, jejichž 2. i 3. složka jsou nulové;
P_3 ... všechny vektory, jejichž 1. složka je nulová.

Nyní je $P_1 \cap P_2 = P_1$ (průnik je „bohatý"), ale $P_2 \cap P_3 = \{\vec{o}\}$ (průnik je triviální podprostor).

Věta a Definice. Je-li $\mathcal{S}$ soubor vektorů (resp. V množina vektorů) v prostoru V_n, pak množina všech vektorů kolmých ke **všem** vektorům souboru $\mathcal{S}$ (resp. množiny V) je podprostorem prostoru V_n. Označujeme ho $\mathcal{S}^\perp$ (resp. $V^\perp$)[8] a nazýváme *ortogonálním doplňkem* souboru $\mathcal{S}$ (resp. množiny V). Pro každý podprostor P prostoru V_n platí: $\dim P + \dim P^\perp = n$.

Řešený aplikační příklad 3.2.1. Podprostor P prostoru V_5 popsán generátory $\mathcal{S}: (1,1,2,2,0),\ (2,1,2,1,0),\ (1,0,0,-1,0)$. Zjistěte dimenzi prostoru $P^\perp$.

Řešení. Snadno určíme $h(\mathcal{S}) = 2$ čili $\dim P = 2$. Dále je $\dim P^\perp = 5 - \dim P = 5 - 2 = 3$

Poznámka. Báze ortogonálních doplňků se naučíme sestavovat v kapitole 5.

(B) Podprostory prostorů V_2 a V_3. Vektory můžeme reprezentovat geometricky – jako body roviny, přičemž bod $[x,y]$ reprezentuje vektor (x,y), a jako body prostoru, přičemž bod $[x,y,z]$ reprezentuje vektor (x,y,z) – tedy tak, že každý bod koresponduje se svým polohovým vektorem. Podprostorům pak odpovídají určité geometrické útvary.

$\boxed{V_2:}$ Kromě sebe samého a triviálního podprostoru má V_2 pouze podprostory dimenze 1 s bází o jednom vektoru; těm odpovídají přímky procházející počátkem soustavy souřadné a jejich ortogonálním doplňkům přímky na ně kolmé (opět procházející počátkem).

Řešený aplikační příklad 3.2.2. Popište geometricky podprostor prostoru V_2 určený generátorem $(3,4)$ a jeho ortogonální doplněk.

Řešení. Všechny vektory reprezentujeme dohodnutým způsobem jako body roviny. Každý vektor $(x,y) \in \ll (3,4) \gg$ je násobkem generátoru, tj. $(x,y) = t \cdot (3,4)$. Po rozepsání ve složkách dostaneme parametrické rovnice přímky, která daný podprostor reprezentuje, $p: x = 3t,\ y = 4t$ a po vyloučení parametru $y = \frac{4}{3}x$. Ortogonální doplněk pak představuje přímka na ni kolmá procházející počátkem, tedy $y = -\frac{3}{4}x$.

[8] vyslov „$\mathcal{S}$ kolmé, resp. V kolmé"

$\boxed{V_3:}$ Podprostory dimenze 1 reprezentují přímky, podprostory dimenze 2 roviny v trojrozměrném prostoru. Všechny útvary procházejí počátkem soustavy souřadné. Ortogonální doplněk přímky je na ni kolmá rovina, ortogonální doplněk roviny na ni kolmá přímka.

Řešený aplikační příklad 3.2.3. Popište geometricky podprostor určený generátory $(2,5,1),(1,1,1)$ a jeho ortogonální doplněk.

Řešení. Podprostor je zadán bází, každý jeho vektor je tedy lineární kombinací vektorů báze, tj. $(x,y,z) = t(2,5,1)+s(1,1,1)$. Rozepsáním do složek dostaneme parametrické rovnice reprezentující roviny $\varrho : x = 2t+s,\ y = 5t+s,\ z = t+s$. Důležitý je vektor kolmý na rovinu ϱ, který nejsnadněji získáme jako vektorový součin $(2,5,1) \times (1,1,1) = (4,-1,-3)$. To je generátor ortogonálního doplňku, tj. přímky s parametrickými rovnicemi $x = 4u,\ y = -u,\ z = -3u$. Obecnou rovnici roviny ϱ napíšeme také snadno: $4x - y - 3z = 0$.

Řešený aplikační příklad 3.2.4. Popište geometricky podprostor určený generátorem $(2,4,-1)$ a jeho ortogonální doplněk.

Řešení. Jde o přímku v trojrozměrném prostoru procházející počátkem o parametrických rovnicích $p : x = 2t,\ y = 4t,\ z = -t$. Ortogonálnímu doplňku odpovídá rovina na tuto přímku kolmá – její obecná rovnice je $2x + 4y - z = 0$.

APLIKAČNÍ ÚLOHY K ŘEŠENÍ

1. Podprostor P je zadán souborem generátorů $\mathcal{S}$. Určete $\dim P^{\perp}$.

(a) $\mathcal{S} : (3,-1),(0,0),(12,-4),(-24,8)$ (b) $\mathcal{S} : (1,2,3),(1,1,1),(2,1,2)$

(c) $\mathcal{S} : (1,-1,1),(1,2,3),(0,3,2)$ (d) $\mathcal{S} : (1,1,1,1),(0,1,1,1),(0,1,-3,1)$

(e) $\mathcal{S} : (1,1,1,1,1),(1,0,0,0,0),(0,1,1,1,1)$ (f) $\mathcal{S} : (1,1,1,1,1),(1,1,0,0,0)$

2. Podprostor P prostoru V_2 nebo V_3 je zadán souborem generátorů $\mathcal{S}$. Charakterizujte ho geometricky, a též popište jeho ortogonální doplněk.

(a) $\mathcal{S} : (3,-1),(-3,1)$ (b) $\mathcal{S} : (1,2),(1,1)$ (c) $\mathcal{S} : (1,-1,1)$

(d) $\mathcal{S} : (1,1,1),(0,1,1)$ (e) $\mathcal{S} : (1,0,2,),(4,0,8)$ (f) $\mathcal{S} : (1,1,1,),(1,1,0),(0,2,1)$.

3. Najděte báze podprostorů, které reprezentují následující přímky v rovině.

(a) $y = 3x$ (b) $x + y = 0$ (c) $y = -1.3x$ (d) $y = 0$ (e) $x = 0$ (f) $y = 2x - 4$

4. Najděte báze podprostorů, které reprezentují následující přímky a roviny v prostoru.

(a) $x = 2t,\ y = -4t,\ z = t$ (přímka) (b) $x = 2t,\ y = 0,\ z = 0$ (přímka)

(c) $x = 2t + s,\ y = -4t - s,\ z = t + s$ (d) $x = 2t - s,\ y = -4t + 9s,\ z = t$

(e) $2x - 4y + z = 0$ (f) $2x + 2y + 2z = 0$ (g) $x + 2y - z - 1 = 0$ (h) $z = 2x - 3y$

KREATIVNÍ ÚLOHY KE KAPITOLE 3

1. Prozkoumejte všech 8 podsouborů souboru $\mathcal{S} : (2,5,1),(3,4,3),(1,-1,2)$ a zjistěte, které z nich jsou nezávislé. Jak to souvisí s číslem $h(\mathcal{S})$?

2. V následující úpravě matice, při níž byl od 2. řádku odečten 1. řádek, je numerická chyba,kterou však kontrolní sloupec nezachytil. Jak to vysvětlíte?

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 & 7 & -2 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 7 & 7 & 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 21 \\ 25 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 & 7 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 21 \\ 4 \end{matrix}$$

3. Označme $M_{2\times 2}$ prostor všech matic typu 2×2 s běžným sčítáním a násobením čísla a matice ($O_{2\times 2}$ hraje roli nulového vektoru). Definujte lineární kombinaci souboru matic typu 2×2. Najděte nějakou bázi prostoru $M_{2\times 2}$ a určete jeho dimenzi.

4. Najděte soubor vektorů, jehož hodnost se nezmění ať k němu přidáme jakýkoliv vektor.

5. Kolik n-složkových vektorů v souboru zajišťuje jeho nezávislost a kolik jeho závislost?

6. Soubor dvou nenulových ortogonálních vektorů $\mathcal{S}: \vec{v}_1, \vec{v}_2$ je nutně nezávislý, neboť:

vezmu rovnost $\vec{o} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2$. Jestliže ji násobím skalárně vektorem $\vec{v}_1$, dostanu $0 = c_1\|v_1\|^2 + c_2 \cdot 0$ (užita ortogonalita) a protože $\vec{v}_1$ je nenulový, je nutně $c_1 = 0$. Zcela analogicky (vynásobením výchozí rovnosti vektorem $\vec{v}_2$ a využitím ortogonality) dostaneme $c_2 = 0$. Tedy výchozí kombinace je **nutně** triviální a soubor $\mathcal{S}$ je nezávislý.
Podobně zdůvodněte nezávislost souboru tří ortogonálních nenulových vektorů.

7. Proč neexistují ve V_2 tři navzájem ortogonální vektory?

8. Určete všechna $x \in \mathbf{R}$ taková, že soubor $(1,5),(5,x)$ (a) je (b) není bází prostoru V_2.

9. Co je špatného na výroku: „souřadnice vektoru $(1,-4)$ v bázi $(-1,2),(3,-6)$ jsou 1, 1 “ ?

10Najděte dvě různé báze $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ prostoru V_2 tak, že souřadnice vektoru $(4,1)$ v bázi $\mathcal{B}_1$ jsou přesně stejné jako jeho souřadnice v bázi $\mathcal{B}_2$.

11Vektor $(5,3)$ má v bázi $\mathcal{B}$ souřadnice 2, -1. Najděte bázi $\mathcal{B}$.

12Existuje ve V_3 vektor, který má ve všech bázích stejné souřadnice?

13*Ortogonální báze* podprostoru P je taková jeho báze, jejíž každé dva vektory jsou ortogonální. Není problém nalézt ortogonální bázi prostoru V_n, neboť je jí zřejmě kanonická báze.

U podprostorů lze obecně realizovat následující postup:

(a) ze souboru generátorů nejdříve získáme nějakou bázi;

(b) potom z ní postupně vytvoříme ortogonální bázi aplikací tzv. *Gramova-Schmidtova ortogonalizačního procesu*;

(c) pokud je ještě požadováno, aby výsledná báze byla *ortonormální*, jednotlivé vektory nakonec znormalizujeme (tj. každý z nich dělíme jeho normou).

Ukázka. Příklad aplikace Gramova-Schmidtova ortogonalizačního procesu na bázi $\mathcal{B}: \vec{b}_1 = (1,2,1,0,1)$, $\vec{b}_2 = (5,1,4,1,3)$, $\vec{b}_3 = (1,2,1,12,1)$ dostatečně osvětlí jeho podstatu.

Nová báze bude $\mathcal{A}: \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ a vytvoříme ji postupně v krocích.

1. krok: Nejdříve položíme přímo $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 = (1,2,1,0,1)$;

2. krok: Vektor $\vec{a}_2$ vytvoříme z vektorů $\vec{a}_1$ a $\vec{b}_2$ jako $\vec{a}_2 = c_1 \cdot \vec{a}_1 + \vec{b}_2$, kde koeficient c_1 najdeme tak, aby $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 0$, neboli $0 = c_1(\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1) + \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_2 = 7c_1 + 14$. Tedy $c_1 = -2$, tj. $a_2 = (-2)(1,2,1,0,1) + (5,1,4,1,3) = (3,-3,2,1,1)$;

3. krok: Vektor $\vec{a}_3$ vytvoříme z vektorů $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ a $\vec{b}_3$ jako $\vec{a}_3 = c_1 \cdot \vec{a}_1 + c_2 \cdot \vec{a}_2 + \vec{b}_3$, kde koeficienty c_1, c_2 najdeme tak, aby $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_3 = 0$ a zároveň $\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3 = 0$, což vede na dvě rovnice o neznámých c_1, c_2: $7c_1 + 7 = 0$, $24c_2 + 12 = 0$. Tedy $c_1 = -1, c_2 = -\frac{1}{2}$, tj. $a_3 = (-1)(1,2,1,0,1) + (-\frac{1}{2})(3,-3,2,1,1) + (1,2,1,12,1) = (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -1, \frac{23}{2}, -\frac{1}{2})$.

Získaná ortogonální báze je $(1,2,1,0,1),(3,-3,2,1,1),(-3,3,-2,23,-1)$ (poslední vektor vznikl jako 2-násobek původně získaného $\vec{a}_3$ - ortogonalita se zachová).

Poznámka: Pokud je vektorů více, budeme ve čtvrtém kroku „vyrábět“ vektor $\vec{a}_4$ pomocí $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ a $\vec{b}_4$ atd. Jestliže výchozí soubor není nezávislý, nastanou v některých krocích potíže. Před aplikací postupu je proto **nutno** výchozí soubor převést na bázi.

Pomocí Gramova-Schmidtova ortogonalizačního procesu najděte nějakou ortogonální a nějakou ortonornální bázi podprostoru zadaného souborem generárorů $\mathcal{S}$.

(a) $\mathcal{S}$: (1,1,0,0), (0,1,2,3) (b) $\mathcal{S}$: (0,1,1,0,0),(1,0,0,1,0),(1,1,0,1,1),(1,0,0,1,1)

(c) $\mathcal{S}$: (1,1,1),(2,5,3)(0,3,1) (d) $\mathcal{S}$: (1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,1,0,1).

14Pro skupinu $(x,-3,2),(x,x,1),(0,2,3x)$ najděte číslo x tak, aby tato skupina
(a) byla bází V_3 (b) nebyla bází V_3 (c) byla ortogonální bází V_3

15. Uveďte ve V_2 příklad souboru nenulových vektorů, který
(a) je nezávislý, ale není bází V_2 (b) není ortogonální, ale je bází V_2
(c) má 3 vektory a je nezávislý (d) je ortogonální a je bází V_2

KONTROLNÍ OTÁZKY KE KAPITOLE 3

1. Kdy je soubor jednoho nebo dvou vektorů závislý a kdy nezávislý?

2. Jestliže soubor S obsahuje nulový vektor, je S nutně závislý; proč? Jestliže soubor S obsahuje dva stejné vektory, je S nutně závislý; proč?

3. Jaká je hodnost nulové a jaká je hodnost jednotkové matice?

4. Jakou hodnost může mít soubor 4 vektorů prostoru V_n? Uveďte příklady. Záleží na čísle n?

5. Někdy se při určování hodnosti matic dovoluje také manipulace se sloupci (my to zde ovšem zásadně neprovádíme). Jaké máte vysvětlení proč je to přípustné?

6. Proč platí $\dim V_1 = 1$, $\dim V_2 = 2$, $\dim V_3 = 3$, $\dim V_4 = 4$?

7. Nechť $P = \ll (0,1,2),(1,2,-1) \gg$. Určete $\dim P^\perp$ a dále najděte vektor $\vec{v} \in V_3$ takový, že platí zároveň $\vec{v} \notin P$ a $\vec{v} \notin P^\perp$ a vektor $\vec{w} \in V_3$ takový, že zároveň $\vec{w} \in P$ a $\vec{w} \in P^\perp$.

8. Co je to triviální podprostor, jakou má bázi a jakou dimenzi? Jaký je jeho ortogonální doplněk?

9. Nechť S je soubor pěti vektorů ve V_3. Jakou dimenzi může mít $\ll S \gg$?

10. Jaké jsou souřadnice vektoru $\vec{v} = (10,1,-3)$ v bázi $\mathcal{B}$: $(0,1,0),(0,0,1),(1,0,0)$?

11. Co je jednodušší: určit složky vektoru $\vec{v}$, když známe jeho souřadnice v bázi $\mathcal{B}$, nebo určit souřadnice vektoru $\vec{v}$ v bázi $\mathcal{B}$, když známe jeho složky?

TERMINOLOGICKÝ SLOVNÍČEK KE KAPITOLE 3

soubor vektorů	system of vectors	klíčový prvek	pivot
lineární	linear	lineární obal	span
- kombinace	- combination	podprostor	subspace
- závislost	- dependence	generovat	to span
- nezávislost	- independence	báze	basis
hodnost	rank	kanonická b.	standard b.
řádkové úpravy	row trasformations	dimenze	dimension

souřadnice vektoru $\vec{v}$ v bázi $\mathcal{B}$ coordinates of vector $\vec{v}$ with respect to basis $\mathcal{B}$

Kapitola 4
Čtvercové matice

Čtvrtá kapitola se zabývá čtvercovými maticemi. Obsahuje problematiku determinantů, inverzních matic a řešení maticových rovnic. Jsou uvedeny důležité aplikace. Struktura kapitoly:

- definice determinantu a algebraického doplňku
- technika výpočtu větších deterninantů
- užití determinantů k řešení soustav rovnic a v analytické geometrii
- zavedení matice adjungované a matice inverzní
- osvojení si dvou technik výpočtu inverzní matice
- problematika maticových rovnic a využívání inverzních matic v jejich řešení
- vstupně-výstupní makroekonomická analýza jako příklad aplikace aparátu vybudovaného k řešení maticových rovnic

4.1. Determinanty

Definice. Pro každou čtvercovou matici A je definováno číslo $\det A$, které nazýváme *determinant* matice A. Pro matice 1. až 3. řádu se vypočte determinant následovně:

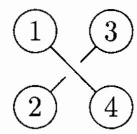
1.řád: $A = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}$, $\det A = a_{11}$ **2. řád:** $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

3. řád: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, tzv. *Sarrusovo* [9] *pravidlo:*

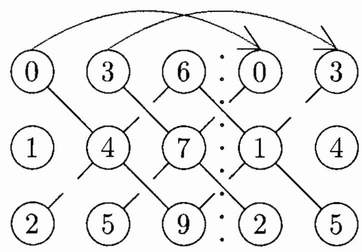
$$\det A = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}) - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32})$$

Ukázky: V prvním řádu je tedy $\det \begin{bmatrix} 13.2 \end{bmatrix} = 13.2$, $\det \begin{bmatrix} -13.2 \end{bmatrix} = -13.2$.

Tzv. *křížové pravidlo* u matic 2. řádu, znázorňuje obrázek. U dané matice je $\det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} =$ $= 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2$.



K uplatnění Sarrusova pravidla se užívá různých schémat, z nichž jedno jsme znázornili na obrázku pro konkrétní matici $Q = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}$. Podstatou je připsání kopií prvních dvou sloupečků vpravo vedle matice, což usnadní sestavení potřebných součinů trojic prvků. Je tedy $\det Q =$ $= 0 \cdot 4 \cdot 9 + 3 \cdot 7 \cdot 2 + 6 \cdot 1 \cdot 5 - (6 \cdot 4 \cdot 2 + 0 \cdot 7 \cdot 5 + 3 \cdot 1 \cdot 9) =$ $= 0 + 42 + 30 - (48 + 0 + 27) = 72 - 75 = -3$.



Poznámka. V literatuře se používá ještě jiného značení determinantů. Spočívá v tom, že se u matice změní levá a pravá závorka na jednoduché svislé čáry (jako u absolutní hodnoty čísla). V takovém značení by výsledky předchozí ukázky vypadaly následovně:

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2$, $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \end{vmatrix} = -3$. My tento způsob nebudeme používat

Výpočet determinantů matic vyšších řádů zavedeme induktivním způsobem. K tomu je třeba připravit pomocné pojmy.

Definice. Je-li A čtvercová matice řádu $n \geq 2$, pak pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ a pro každé $j = 1, 2, \ldots, n$ definujeme její *submatici (podmatici)* $A_{\#ij}$ řádu $n - 1$, která vznikne vyškrtnutím i-tého řádku a j-tého sloupce z původní matice A.

Pro každý prvek a_{ij} matice A definujeme jeho *algebraický doplněk* v matici A, který označíme symbolem A_{ij}, jako číslo dané předpisem $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det A_{\#ij}$.

Pro výše uvedenou ukázkovou matici Q tedy máme:

$Q_{\#21} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$, $Q_{\#22} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$, $Q_{\#23} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$. Algebraické doplňky jsou:

$Q_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \det Q_{\#21} = (-1)^3 \cdot (-3) = 3$, $Q_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \det Q_{\#22} = -12$,
$Q_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \det Q_{\#23} = 6$.

[9] Pierre Fréd. Sarrus [čti „sarys“], 1798 – 1858, franc. matematik

Definice a Věta (o rozvoji). Je-li A čtvercová matice řádu $n \geq 2$, pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ definujeme *rozvoj matice A podle i-tého řádku* jako výraz

$$a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in}$$

a pro každé $j = 1, 2, \ldots, n$ definujeme *rozvoj matice A podle j-tého sloupce* jako výraz

$$a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \ldots + a_{nj} \cdot A_{nj}.$$

Potom platí: hodnoty těchto výrazů (rozvojů) jsou nezávislé na tom zda byly provedeny podle řádku nebo podle sloupce ani na volbě řádku nebo sloupce a jsou **ve všech případech** rovny hodnotě *determinantu* matice A, kterou označujeme $\det A$.

Dodatek k větě o rozvoji. V předchozí větě se zkoumají skalární součiny tvaru $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \cdot (A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{in})$, resp. $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}) \cdot (A_{1j}, A_{2j}, \ldots, A_{nj})$.

Uvažme obecněji pro libovolné $p = 1, 2, \ldots, n$ a pro $q = 1, 2, \ldots, n$ skalární součiny:
$\alpha_{pq} = (a_{p1}, a_{p2}, \ldots, a_{pn}) \cdot (A_{q1}, A_{q2}, \ldots, A_{qn})$, $\beta_{pq} = (a_{1p}, a_{2p}, \ldots, a_{np}) \cdot (A_{1q}, A_{2q}, \ldots, A_{nq})$.
Potom platí: pro $p = q$ je $\alpha_{pq} = \beta_{pq} = \det A$, pro $p \neq q$ je $\alpha_{pq} = \beta_{pq} = 0$.

Pro výše uvedenou ukázkovou matici Q je rozvoj podle druhého řádku:
$(q_{21}, q_{22}, q_{23}) \cdot (Q_{21}, Q_{22}, Q_{23}) = q_{21} \cdot Q_{21} + q_{22} \cdot Q_{22} + q_{23} \cdot Q_{23} = 1 \cdot 3 + 4 \cdot (-12) + 7 \cdot 6 = -3.$
To odpovídá výše zjištěné hodnotě $\det Q$ Sarrusovým pravidlem.
Dále je ve shodě s „dodatkem“:
$(q_{11}, q_{12}, q_{13}) \cdot (Q_{21}, Q_{22}, Q_{23}) = q_{11} \cdot Q_{21} + q_{12} \cdot Q_{22} + q_{13} \cdot Q_{23} = 0 \cdot 3 + 3 \cdot (-12) + 6 \cdot 6 = 0,$
$(q_{31}, q_{32}, q_{33}) \cdot (Q_{21}, Q_{22}, Q_{23}) = q_{31} \cdot Q_{21} + q_{32} \cdot Q_{22} + q_{33} \cdot Q_{23} = 2 \cdot 3 + 5 \cdot (-12) + 9 \cdot 6 = 0.$

Poznámka. Častější zavedení determinantu je založeno na pojmu permutace. Čtenáři je v tomto směru možno doporučit řadu možností (např. [Bic79]).

Úvaha. Výpočet determinantu rozvojem vypadá velice přehledně, ale u matic vyšších je prakticky značně náročný. Jenom u matice 6. řádu je k rozvoji zapotřebí 6 algebraických doplňků, tj. prakticky 6 determinantů matic 5. řádu a při výpočtu každého z nich rozvojem opět 5 determinantů matic 4. řádu. K výpočtu každého z těchto 30 determinantů rozvojem je zapotřebí čtyřikrát použít Sarrusovo pravidlo. Shrneme-li tuto úvahu, konstatujeme, že pro výpočet determinantu matice 6. řádu budeme potřebovat 120-krát Sarrusovo pravidlo, nehledě na čas a energii potřebné na organizaci celého výpočtu a nezbytným zápisům. Opravdu „nevábná“ vyhlídka!

Výzkumy determinantů ukázaly řadu jejich zajímavých vlastností a ty jsou využitelné pro praktické výpočty. Následující věta shrnuje některé z nich.

Věta (o matici a determinantu). Každá čtvercová matice A má tyto vlastnosti

(1) při vzájemné výměně libovolných **dvou** řádků se změní znaménko $\det A$ na opačné,
(2) jestliže zvolený řádek matice násobíme (dělíme) libovolným nenulovým číslem r, pak se hodnota $\det A$ r-krát zvětší (zmenší),
(3) jestliže ke zvolenému řádku přičteme libovolnou lineární kombinaci ostatních, hodnota $\det A$ se **nezmění**,
(4) je-li v matici nulový řádek nebo dva stejné řádky, pak $\det A = 0$,
(5) vlastnosti (1) až (4) platí i pro sloupce.
(6) $\det A = \det A^{\mathrm{T}}$,

(7) je-li B libovolná matice stejného řádu jako A, pak $\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$,
(8) je-li A *trojúhelníková matice* (tj. všechny prvky pod hlavní diagonálou jsou nulové), pak $\det A$ je roven součinu prvků v hlavní diagonále.

Komentář. Vlastnost (1) si může čtenář snadno prověřit na nějaké matici 2. nebo 3. řádu. Vlastnost (2) umožňuje při výpočtu determinantu „vytýkat" před matici číslo z celého řádku (či z celého sloupce), a to i opakovaně, a tím si např. zmenšovat čísla v matici (viz též řešené příklady níže). Ukázka (nejdříve vytkneme 10 z 1. řádky, pak 8 z 2. sloupce):

$$\det \begin{bmatrix} 110 & 80 \\ 21 & 16 \end{bmatrix} = 10 \cdot \det \begin{bmatrix} 11 & 8 \\ 21 & 16 \end{bmatrix} = 10 \cdot 8 \cdot \det \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 21 & 2 \end{bmatrix} = 10 \cdot 8 \cdot (11 \cdot 2 - 1 \cdot 21) = 80.$$

Vlastnost (3) je podstatná - umožňuje podstatně zjednodušit výpočet. Zde si uveďme jen malou ukázku na již známé matici Q (nejdříve od 3. řádku odečteme 2-násobek 2. řádku a pak provedeme rozvoj podle 1. sloupce):

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -5 \end{bmatrix} = 0 \cdot \check{c}\acute{\imath}slo + 1 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} + 0 \cdot \check{c}\acute{\imath}slo =$$

$= (-1) \cdot 3 = -3$. Místo očekávaných 3 křížových pravidel bylo potřeba jen jedno (!) - výrazy tvaru „$0 \cdot \check{c}\acute{\imath}slo$" jsou rovny nule. To je princip obecného „triku" při výpočtu velkých determinantů – rozvoj se provádí podle řádku (sloupce), který obsahuje téměř samé nuly a pokud takový není, tak se nejdříve „připraví."

Nyní formulujeme zásady obecného postupu (algoritmu) pro efektivní výpočet determinatu matice:

Strategie pro výpočet determinantu matice A úpravami:

1. Je-li v matici nulový řádek či sloupec je $\det A = 0$,
2. Není-li v matici řádek nebo sloupec, jehož všechny prvky **až na jeden** jsou nulové, pak takový „připravíme" pomocí přípustných úprav (věta „o matici a determinantu").
3. Provedeme rozvoj podle řádku (sloupce), kde jsou všechny prvky až na jeden nulové.
4. **Jediný** potřebný determinant matice řádu o 1 nižšího vypočteme buď přímo nebo postupem popsaným v bodech ad 1 až ad 4.

Poznámka. Variantní strategii lze založit na vlastnosti (8) věty „o matici a determinantu". Spočívá v úpravě matice na trojúhelníkový tvar – pak již stačí vynásobit prvky hlavní diagonály, tj. $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$.

Ukázka: Pro větší názornost ukažme myšlenku výpočtu determinantu trojúhelníkové matice na malém příkladě, kde v hlavní diagonále matice A jsou prvky $a_{11} = 2$, $a_{22} = 3$, $a_{33} = 8$, $a_{44} = 5$:

$$\det A = \det \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 1 & 6 & 3 \\ 0 & \mathbf{3} & 7 & 7 \\ 0 & 0 & \mathbf{8} & 9 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{5} \end{bmatrix} = 2 \cdot (-1)^2 \cdot \det \begin{bmatrix} \mathbf{3} & 7 & 7 \\ 0 & \mathbf{8} & 9 \\ 0 & 0 & \mathbf{5} \end{bmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot (-1)^2 \cdot \det \begin{bmatrix} \mathbf{8} & 9 \\ 0 & \mathbf{5} \end{bmatrix} =$$

$= 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 5 = 240.$

Je to velice „elegantní", problém je ovšem v tom, že většinou zadaná matice nemá trojúhelníkový tvar a hlavní práce je právě ji do tohoto tvaru upravit.

ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Řešený příklad 4.1.1. Určete determinant zadané matice M.

Řešení. Klíčový prvek je m_{42}, 4. řádek je klíčovým: od 1.ř. odečten 3-násobek klíčového, od 3. ř. odečten 2-násobek klíč., od 5. ř. odečten klíčový;

$$\det M = \det \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & \boxed{1} & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & \boxed{1} & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & -4 & 2 \end{bmatrix} =$$

„výhodný“ rozvoj podle 2. sl., který se redukuje na součin $1 \cdot (-1)^{4+2} \cdot \det SUBMATICE$; nový klíč. prvek je -1, 4. sl. je klíčový: k 1. sl. a též k 2. sl. přičten 3-násobek klíč. sloupce,

$$= 1 \cdot (-1)^6 \cdot \det \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & \boxed{-1} \\ 3 & 4 & -4 & 2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 14 & 11 & 1 & 3 \\ 10 & 10 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} \\ 9 & 10 & -4 & 2 \end{bmatrix} =$$

rozvoj dle 3. řádku a zbývá det. matice třetího řádu; místo Sarrusova pravidla provedeme úpravu 3. sl. (1. řádek je klíčový);

$$= (-1) \cdot (-1)^7 \cdot \det \begin{bmatrix} 14 & 11 & \boxed{1} \\ 10 & 10 & 2 \\ 9 & 10 & -4 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 14 & 11 & \boxed{1} \\ -18 & -12 & 0 \\ 65 & 54 & 0 \end{bmatrix} =$$

rozvoj podle 3. sloupce a dál už je to jen „kreace“: vytknutí (-6) z prvního řádku a křížové pravidlo.

$$= 1 \cdot (-1)^4 \cdot \det \begin{bmatrix} -18 & -12 \\ 65 & 54 \end{bmatrix} = (-6) \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 65 & 54 \end{bmatrix} =$$

$$= (-6) \cdot (162 - 130) = -192$$

Výběr klíčových prvků v jednotlivých krocích byl nejednoznačný, tj. byly i jiné volby. To znamená, že výpočet determinantu dané matice lze provést různými způsoby (ovšem s jediným možným výsledkem).

Řešený příklad 4.1.2. Vypočtěte determinant zadané matice 4. řádu.

Řešení.

$$\det \begin{bmatrix} 3 & -5 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 6 & -3 \\ -9 & 4 & \boxed{1} & 2 \\ 5 & 7 & -3 & 6 \end{bmatrix} \underset{\text{1.krok}}{=} \det \begin{bmatrix} 66 & -33 & 7 & -6 \\ 58 & -22 & 6 & -15 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ -22 & 19 & -3 & 12 \end{bmatrix} \underset{\text{2.krok}}{=} \det \begin{bmatrix} 66 & -33 & -6 \\ 58 & -22 & -15 \\ -22 & 19 & 12 \end{bmatrix} \underset{\text{3.krok}}{=}$$

$$= 3 \cdot 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 11 & -11 & -2 \\ 29 & -22 & -15 \\ -11 & 19 & 12 \end{bmatrix} \underset{\text{4.krok}}{=} 6 \cdot \det \begin{bmatrix} 7 & -11 & -2 \\ \boxed{-1} & -22 & -15 \\ 13 & 19 & 12 \end{bmatrix} \underset{\text{5.krok}}{=} 6 \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & -165 & -107 \\ \boxed{-1} & -22 & -15 \\ 0 & -267 & -183 \end{bmatrix} =$$

$$\underset{\text{6.krok}}{=} 6 \cdot \det \begin{bmatrix} -165 & -107 \\ -267 & -183 \end{bmatrix} \underset{\text{7.krok}}{=} 6 \cdot \det \begin{bmatrix} 165 & 107 \\ 267 & 183 \end{bmatrix} \underset{\text{8.krok}}{=} 6 \cdot \det \begin{bmatrix} 58 & 107 \\ 84 & 183 \end{bmatrix} \underset{\text{9.krok}}{=} 6 \cdot \det \begin{bmatrix} 58 & -9 \\ 84 & 15 \end{bmatrix} =$$

$$\underset{\text{10.krok}}{=} 6 \cdot 2 \cdot 3 \det \begin{bmatrix} 29 & -3 \\ 42 & 5 \end{bmatrix} = 36 \cdot (145 - (-126)) = 9756$$

Na příkladu jsme chtěli ukázat nesčetné možnosti úprav matice při výpočtu determinantu. A nyní komentář k jednotlivým krokům:

1. krok: „výroba nul“ ve třetím řádku (3. sloupec je klíčový);
2. krok: rozvoj dle 3. řádku;
3. krok: vytknutí „3“ z 1. řádku a „2“ z 1. sloupce (cílem je snížit čísla v matici);
4. krok: k 1. sloupci přičten 2-násobek 3. sloupce, vzniká klíčová (-1);

5. krok: „výroba nul“ v prvním sloupci (2. řádek je klíčový);
6. krok: rozvoj dle 2. řádku;
7. - 10. krok: snižování čísel v matici (vytknutí -1 z první i druhé řádky, odečtení 2. sloupce od 1. sloupce, odečtení 2-násobku 1. sloupce od 2. sloupce, vytknutí 2 z prvního sloupce a 3 z druhého sloupce); výpočet je dokončen křížovým pravidlem.

Řešený příklad 4.1.3. V matici $P = \begin{bmatrix} 1 & x & 1 \\ -1 & 6 & 1 \\ x & -4 & 0 \end{bmatrix}$ určete číslo x tak, aby platilo $\det(A^3) = 0$.

Řešení. Podle „věty o matici a determinantu“ platí $\det(P^3) = (\det P)^3$. Určíme tedy nejdříve Sarrusovým pravidlem $\det P = x^2 - 6x + 8$ a dostáváme $\det(P^3) = (x^2 - 6x + 8)^3$.

Požadavek úlohy vede nyní na rovnici $(x^2 - 6x + 8)^3 = 0$ tj. $x^2 - 6x + 8 = 0$, což je kvadratická rovnice s kořeny $x_1 = 2, x_2 = 4$.

ÚLOHY K ŘEŠENÍ

1. Určete determinanty matic 2. řádu (i je imaginární jednotka):

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} \sin\varphi & \cos\varphi \\ -\cos\varphi & \sin\varphi \end{bmatrix}, \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} \sqrt[3]{a} & \sqrt[3]{b^2} \\ \sqrt[3]{b} & \sqrt[3]{a^2} \end{bmatrix}, \quad \text{(d)} \begin{bmatrix} 3 & 2-5\mathrm{i} \\ 2+5\mathrm{i} & 4 \end{bmatrix}.$$

2. Na maticích 3. řádu si procvičte Sarrusovo pravidlo:

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 7 & 9 & -7 \\ -4 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} -2 & 7 & 11 \\ 1 & -22 & 5 \\ 3 & 7 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\text{(d)} \begin{bmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{bmatrix}, \quad \text{(e)} \begin{bmatrix} 1+\cos\alpha & 1+\sin\alpha & 1 \\ 1-\sin\alpha & 1+\cos\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{(f)} \begin{bmatrix} n & n+1 & n-1 \\ n+1 & n-1 & n \\ n-1 & n & n+1 \end{bmatrix},$$

3. Řešte rovnice s neznámým reálným číslem x:

$$\text{(a)} \det \begin{bmatrix} 3 & 3+x \\ 1 & x-2 \end{bmatrix} = 0, \quad \text{(b)} \det \begin{bmatrix} 2^{3x-4} & 8^{-x} \\ 16 & 4^{5-x} \end{bmatrix} = 0, \quad \text{(c)} \det \begin{bmatrix} \sqrt{6x+1} & 2 \\ \sqrt{x+1} & 1 \end{bmatrix} = \sqrt{2x-15},$$

$$\text{(d)} \det \begin{bmatrix} x & 0 & 1 \\ 2 & x & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = 0, \quad \text{(e)} \det \begin{bmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0, \quad \text{(f)} \det \begin{bmatrix} x & x & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

4. Vypočtěte determinanty matic 4. řádu

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}, \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{bmatrix}, \quad \text{(d)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{(e)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 7 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad \text{(f)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{(g)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 & y \\ 1 & 1 & 2 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{bmatrix}, \quad \text{(h)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

5. Vypočtěte determinanty matic 5. řádu

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 & 1 \\ 1 & 7 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 6 & 8 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

(e) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 6 & 8 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, (f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, (g) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, (h) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 7 & 2 \\ 2 & 6 & -1 & 3 & 2 \\ 7 & 4 & -4 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

APLIKACE

(A) Cramerovo pravidlo. Jde o metodu výpočtu řešení soustavy lineárních rovnic pomocí determinantů. V plném znění ji uvedeme v 5. kapitole. Zde ji demonstrujeme na soustavě 2 rovnic o 2 neznámých.

Je-li $\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$ soustava mající jediné řešení x_1, x_2, vytvoříme pomocné matice $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix}$ a řešení soustavy lze vyjádřit přímo pomocí jejich determinantů jako zlomky: $x_1 = \dfrac{\det A_1}{\det A}$, $x_2 = \dfrac{\det A_2}{\det A}$.

Zcela analogicky platí Cramerovo pravidlo obecně pro soustavy n rovnic o n neznámých mající jediné řešení.

Řešený aplikační příklad 4.1.1. Řešte Cramerovým pravidlem soustavu $\begin{aligned} 7x_1 + 2x_2 &= 8 \\ 5x_1 + 3x_2 &= 9 \end{aligned}$.

Řešení. Vytvoříme matice $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$,

a pak již je $\det A = 11$, $\det A_1 = 6$, $\det A_2 = 23$, $x_1 = \dfrac{6}{11}$, $x_2 = \dfrac{23}{11}$.

(B) Hodnost a determinant. Výsledkem výzkumu vztahu mezi determinantem a hodností matic je následující poznatek:

Definice a Věta. *Podmaticí* matice M nazveme každou matici N, která vznikne vyškrtnutím některých řádků a některých sloupců z matice M.
Platí: $h(M) \geq k$, právě když v M existuje aspoň jedna čtvercová podmatice N řádu k, pro níž je $\det N \neq 0$.

Uvedené věty lze využít k různým teoretickým i praktickým úvahám a závěrům.

Řešený aplikační příklad 4.1.2. Máme zajistit, aby daný soubor vektorů byl nezávislý $S : (?, 1, ?, 0, 0)$, $(?, 0, ?, 1, 0)$, $(?, 0, ?, 0, 1)$.

Řešení. Sepíšeme dané vektory do matice $M = \begin{bmatrix} ? & 1 & ? & 0 & 0 \\ ? & 0 & ? & 1 & 0 \\ ? & 0 & ? & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Podle předchozí věty je ovšem $h(M) = 3$, neboť M obsahuje jako submatici matici $E_{3\times3}$ (vyškrtnout 1. a 3. sloupec z M) a její determinant je 1. To znamená, že ať za otazníky doplníme jakákoliv čísla, bude soubor S **vždy** nezávislý (hodnost této matice je maximálně 3).

(C) Vektorový součin. V Kap. 2 jsme se setkali s vektorovým součinem. Obecněji platí:

Věta (o vektorovém součinu). Ve vektorovém prostoru $V_n, n > 1$, označme $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ základní jednotkové vektory (pro každé $i = 1, 2, \dots, n$ má vektor $\vec{e}_i$ i-tou složku rovnu 1).

Pro libovolný soubor $n-1$ vektorů tohoto prostoru $\mathcal{S} : \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{n-1}$ vytvoříme následující pomocnou matici M:

(i) řádky $i = 1, 2, \dots, n-1$ tvoří přímo jednotlivé vektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{n-1}$,

(ii) poslední řádek matice M je tvořen seznamem symbolů $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$.

Nyní formálně vypočteme $\det M$ a nazveme ho *vektorovým součinem souboru* $\mathcal{S}$. Je to speciální lineární kombinace základních jednotkových vektorů, o níž platí:

(1) Je-li soubor $\mathcal{S}$ závislý, je $\det M = \vec{o}$,

(2) je-li $\mathcal{S}$ nezávislý, je $\det M$ nenulový vektor kolmý ke všem vektorům souboru $\mathcal{S}$,

(3) vektor $\det M$ má jako složky algebraické doplňky prvků posledního (n-tého) řádku matice M, tj. je roven $(M_{n1}, M_{n2}, \dots, M_{nn})$.

Speciálně pro $n = 3$ dává uvedený postup vektorový součin dvou vektorů a vysvětluje (viz bod (3)), že jeho složky jsou vlastně determinanty 2. řádu:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{bmatrix} = (M_{31}, M_{32}, M_{33}) = (\det \begin{bmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix}).$$

Řešený aplikační příklad 4.1.3.. Pomocí determinantů určete vektorový součin vektorů $\vec{u} = (1, 2, 3), \vec{v} = (-1, 8, 9)$.

Řešení. Pomocná matice je $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 8 & 9 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{bmatrix}$. Nyní podle bodu (3) předchozí věty

$$\vec{u} \times \vec{v} = (M_{31}, M_{32}, M_{33}) = (\det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}) = (-6, -12, 10).$$

(D) Determinanty v geometrii. S determinanty se setkáme v nejrůznějších partiích matematiky, kde často slouží k přehlednému zápisu formulí (viz Cramerovo pravidlo). Zde uvádíme dvě ukázky z geometrie:

Věta 1. Jsou-li $A = [a_1, a_2], B = [b_1, b_2], C = [c_1, c_2]$ tři body v rovině, potom pro obsah trojúhelníku ABC platí

$$S = \pm\frac{1}{2} \cdot \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{bmatrix}$$

.

Věta 2. Nechť A, B, C, D jsou body v prostoru. Zaveďme vektory $\vec{a} = A - D = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = B - D = (b_1, b_2, b_3), \vec{c} = C - D = (c_1, c_2, c_3)$. Potom pro objem čtyřstěnu $ABCD$ platí:

$$V = \pm\frac{1}{6} \cdot \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

Speciálně, je-li uvedený determinant roven 0, leží zadané čtyři body v rovině.

Řešený aplikační příklad 4.1.4. Řešte pomocí determinantů

(a) Určete obsah trojúhelníku ABC v rovině: $A=[1,2], B=[8,-1], C=[5,10]$,

(b) Určete objem čtyřstěnu $ABCD$, kde: $A=[1,2,1], B=[8,3,0], C=[2,1,1], D=[1,2,3]$.

Řešení. (a) $\det\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 8 & -1 & 1\\ 5 & 10 & 1\end{bmatrix}=68$. Povrch trojúhelníka je $\frac{1}{2}\cdot 68=34$.

(b) $\vec{a}=A-D=(0,0,-2), \vec{b}=B-D=(7,1,-3), \vec{c}=C-D=(1,-1,-2)$.

$$V=\pm\frac{1}{6}\det\begin{bmatrix}0 & 0 & -2\\ 7 & 1 & -3\\ 1 & -1 & -2\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\cdot 16=\frac{8}{3}$$

.

APLIKAČNÍ ÚLOHY K ŘEŠENÍ

1. Zadané soustavy rovnic řešte Cramerovým pravidlem:

(a) $\begin{matrix}7x_1-2x_2=8\\ 5x_1+3x_2=9\end{matrix}$. (b) $\begin{matrix}2x_1+2x_2=11\\ 15x_1+7x_2=1\end{matrix}$. (c) $\begin{matrix}8x_1+4x_2=3\\ 6x_1+3x_2=-9\end{matrix}$.

2. Pomocí determinantů (věta o vektorovém součinu, bod (3)) vypočtěte vektorový součin pro zadanou nezávislou skupinu vektorů a prověřte, zda výsledný vektor je kolmý na všechny původní:

(a) $(-12,3,2)$, $(-1,-7,13)$

(b) $(-1,3,-2)$, $(3,-9,6)$

(c) $(1,2,1,2)$, $(1,1,1,3)$, $(2,2,-1,0)$

(d) $(0,2,1,2)$, $(1,-1,1,0)$, $(2,0,-1,1)$

3. Následující geometrické úlohy řešte pomocí determinantů.

(a) Který ze zadaných trojúhelníků má největší a který nejmenší obsah?

$A_1,B_1,C_1:[1,1], [4,3], [-2,-5]$,
$A_2,B_2,C_2:[1,0], [-4,1], [-5,5]$,
$A_3,B_3,C_3:[2,1], [1,3], [-2,0]$.

(b) Který ze zadaných čtyřstěnů má největší a který nejmenší objem?

$A_1,B_1,C_1,D_1:[1,1,0], [0,4,3], [2,2,-5], [1,1,1]$,
$A_2,B_2,C_2,D_2:[0,1,1], [2,2,2], [1,-2,0], [1,0,2]$,
$A_3,B_3,C_3,D_3:[1,1,1], [1,1,0], [1,1,1], [0,0,0]$.

KREATIVNÍ ÚLOHY

1. Rozvojem podle 2. sloupce vypočtěte $\det\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$

2. Dána matice $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$. Za jak dlouho spočtete $\det(A^{10})$?

3. Čísla 1,2,3,4,5,6,7,8,9 uspořádejte (bez opakování) do matice 3. řádu tak, aby tato matice měla determinant větší než 300.

4. V zadané matici třetího řádu najděte číslo x tak, aby tato matice měla
(a) co největší determinant, (b) co nejmenší determinant. $\begin{bmatrix}1 & 2 & x\\ 1 & x & 1\\ 2 & x & 0\end{bmatrix}$

5. Následující úlohy řešte pomocí determinantů:

(a) Najděte číslo x tak, aby trojúhelník ABC, kde $A=[x,5]$, $B=[1,1]$, $C=[-1,7]$, měl obsah roven 5.

(b) Najděte číslo z tak, aby čtyřstěn $ABCD$, kde $A=[1,2,z]$, $B=[2,-1,1]$, $C=[5,4,7]$, $D=[1,1,1]$, měl objem roven 100.

(c) Najděte číslo y tak, aby body $A=[2,y,9]$, $B=[2,-1,1]$, $C=[5,4,7]$, $D=[1,1,1]$ ležely v jedné rovině.

6. Následující úlohy řešte pomocí determinantů:

(a) Popište rovnicí množinu všech bodů $A = [x, y]$ v rovině takových, že trojúhelník ABC, kde $B = [1, 1]$, $C = [-1, 7]$, má obsah roven 5.

(b) Popište rovnicí množinu všech bodů $A = [x, y, z]$ v prostoru takových, že čtyřstěn $ABCD$, kde $B = [2, -1, 1]$, $C = [5, 4, 7]$, $D = [1, 1, 1]$, má objem roven 100.

(c) Popište rovnicí množinu všech bodů $A[x, y, z]$ v prostoru takových, že body A, B, C, D, kde $B = [2, -1, 1]$, $C = [5, 4, 7]$, $D = [1, 1, 1]$, leží v jedné rovině.

7. Vraťme se k definici determinantu pomocí algebraických doplňků a rozvoje. Tuto definici je možno mírně modifikovat, jestliže v rozvoji namísto algebraických doplňků tvaru $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det A_{\#ij}$ použijeme tzv. *permanenty*, tj. čísla $\operatorname{per} A_{\#ij}$. Výpočet permanentu matice A rozvojem podle i-tého řádku je tedy:

$$\operatorname{per} A = a_{i1} \cdot \operatorname{per} A_{\#i1} + a_{i2} \cdot \operatorname{per} A_{\#i2} + \ldots + a_{in} \cdot \operatorname{per} A_{\#in}$$

Pro matice 1. až 3. řádu se vypočte permanent následovně:

1.řád: $A = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}$, $\operatorname{per} A = a_{11}$ **2. řád:** $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $\operatorname{per} A = a_{11} \cdot a_{22} + a_{12} \cdot a_{21}$

3. řád: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, analogie Sarrusova pravidla

$\operatorname{per} A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$

U zadaných matic vypočtěte permanenty a porovnejte je s determinanty:

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$, (d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, (e) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, (f) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

8. Vypočtěte „velký" determinant – autoři umí za méně než 25 minut (výsledek je 40). Jakou má tato matice hodnost?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

9. Dokážete za 1 minutu sestavit matici B 7. řádu takovou, že $\det B = 1230$?

10. Pro zadanou matici máme určit hodnost pomocí věty o hodnosti a determinantu (viz aplikace (B)). Zřejmě bude tato hodnost nejméně dvě, neboť snadno najdeme podmatici 2. řádu s nenulovým determinantem. Pokud by byla hodnost 3, musíme najít podmatici 3. řádu s nenulovým determinantem. Najdete ji?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

11 Jestliže pro čtvercovou matici M platí $\det M = 54$, co můžeme říci o $h\,(M)$?

4.2. Inverzní matice

Definice a Věta. Čtvercová matice A řádu n se nazývá *regulární*, jestliže $h(A) = n$. Matice A je regulární, právě když $\det A \neq 0$ (podle Aplikace 4.1.(B)). Ostatní čtvercové matice se nazývají *singulární* (mají hodnost menší než řád a jejich determinant je nulový).
Pro každou regulární matici A existuje právě jedna její tzv. *inverzní matice* označená A^{-1} tak, že platí $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$. Singulární matice nemají inverzní.

Ukázka. Ukažme zkouškou správnosti, že pro $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ je $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E, \qquad \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E.$$

Na ukázce je vidět, že vlastně vždy jde o **dvojici navzájem inverzních matic**. Prověření následující věty lze provést úvahou a bezprostředním výpočtem.

Věta (vlastnosti inverzních matic). Pro regulární čtvercové matice A, B stejného řádu platí

(1) $A \cdot B$ je též regulární matice a je $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$,

(2) je-li $A \cdot B = E$, jsou A, B navzájem inverzní (tj. není nutno prověřovat, že $B \cdot A = E$); navíc o determinantech navzájem inverzních matic platí $\det A \cdot \det B = 1$,

(3) A^{T} i A^{-1} jsou též regulární a je: $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$ $\quad (A^{-1})^{-1} = A$,

(4) pro přirozené číslo k je A^k též regulární a je $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$, což označíme A^{-k}.

(5) jednotková matice je „samoinverzní“, tj. $E^{-1} = E$.

Nejjednodušeji se určí **inverzní matice 1. řádu:**
Je-li $A = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}$, kde $a_{11} \neq 0$, pak $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} \end{bmatrix}$. Např. $\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \end{bmatrix}$.

Pro výpočet inverzních matic **2. a vyšších řádů** uvedeme dvě metody.

METODA I. - Pomocí adjungované matice

Motivační ukázka. V komentáři k větě o rozvoji a jejím dodatku (podkap. 4.1.) jsme ukázali, že pro libovolnou matici 3. řádu $Q = (q_{ij})$ platí rovnost:

$$\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{21} & Q_{31} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{32} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det Q & 0 & 0 \\ 0 & \det Q & 0 \\ 0 & 0 & \det Q \end{bmatrix}$$

Součin matice Q a transponované matice doplňků jejích prvků je roven $(\det Q) \cdot E$.

Pro $Q = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}$ bude $Q_{11} = 1$, $Q_{12} = 5$, $Q_{13} = -3$, $Q_{21} = 3$, $Q_{22} = -12$, $Q_{23} = 6$, $Q_{31} = -3$, $Q_{32} = 6$, $Q_{33} = -3$, a násobení matic dává:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 5 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

To je princip výpočtu inverzní matice pomocí matice doplňků.

Definice a Věta (o matici adjungované). Pro libovolnou čtvercovou matici aspoň druhého řádu $A = (a_{ij})$ označme $\operatorname{dopl} A$ matici tvořenou algebraickými doplňky jednotlivých prvků a_{ij} v matici A, tj. $\operatorname{dopl} A = (A_{ij})$. Maticí *adjungovanou* k matici A (ozn. adj A) nazýváme transponovanou matici doplňků, tj. $(\operatorname{dopl} A)^{\mathrm{T}}$. Platí: $A \cdot (\operatorname{adj} A) = (\operatorname{adj} A) \cdot A = \det A \cdot E$.
Je-li A regulární matice, je

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (\operatorname{adj} A)}$$

Pro ukázkovou matici Q z podkap. 4.1. máme:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}, \text{ tedy } \operatorname{dopl} Q = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 3 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}, \text{ a pak } \operatorname{adj} Q = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 5 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}.$$

Víme již, že $\det Q = -3$, takže $Q^{-1} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 5 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -1 & 1 \\ -\frac{5}{3} & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Výhodou uvedeného postupu je i to, že zlomek $\frac{1}{\det Q}$ je možno nechat „vytknutý" před maticí – toho budeme často využívat.

Velkou nevýhodou této metody je pracnost výpočtu matice doplňků. Již u 4. řádu musíme počítat 9 determinantů 3. řádu. Ovšem velmi výhodný je tento postup u matic 2. řádu.
Důsledek (výpočet inverzní matice 2. řádu). Pro regulární matici 2. řádu $A = (a_{ij})$ je

$$\boxed{A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}}$$

Příklad: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$. Výsledek jsme ponechali s „vytknutou" $-\frac{1}{2}$.

METODA II. - Eliminační postup.

Princip metody spočívá v tom, že k zadané matici A máme najít takovou matici X, aby platilo $A \cdot X = E$ (viz „vlastnosti inverzních matic" bod (2)). Na vyřešení této maticové rovnice použijeme eliminační postup (viz Aplikace Kap. 3) takto: dělenou matici $[A \mid E]$ převedeme řádkovými úpravami na tvar $[E \mid B]$ a pak platí $E \cdot X = B$, tj. $X = B$ a inverzní matice je nalezena.

Věta (o inverzi eliminací). Pro každou regulární matici A vede eliminační úprava dělené matice $[A \mid E]$ na získání matice A^{-1}, tj. schematicky

$$\boxed{[A \mid E] \sim [A_1 \mid B_1] \sim [A_2 \mid B_2] \sim \ldots \sim [E \mid A^{-1}]}$$

Příklad: $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$.

ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Řešený příklad 4.2.1. Pro $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ prověřte body (1) a (3 – 1. část) věty o „vlastnostech inverzních matic“.

Řešení. ad(1) $\det A = -2, \det B = -1, C = A \cdot B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$, $\det C = 2$; inverzní matice určíme metodou matice adjungované (viz „důsledek“), zlomky necháváme vytknuté před maticemi:

$$A^{-1} = -\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C^{-1} = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -10 & 4 \end{bmatrix}; \text{tedy je } C^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

$$\text{ad(3): Je } A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad (A^{\mathrm{T}})^{-1} = -\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ což je skutečně } (A^{-1})^{\mathrm{T}}.$$

Řešený příklad 4.2.2. Určete matici D^{-4} pro zadanou matici $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Řešení. Jsou dvě možnosti, buď určit $(D^4)^{-1}$ nebo $(D^{-1})^4$. Zvolíme druhou z nich, nejdříve tedy určíme D^{-1} a to oběma metodami.

Použití adjungované matice (Sarrusovým pravidlem si předem připravíme $\det D = 2$):

$$\operatorname{dopl} D = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \operatorname{adj} D = (\operatorname{dopl} D)^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D^{-1} = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Eliminační postup (i s kontrolním sloupcem):

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} 2 \\ 6 \\ 3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 6 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 3 \end{array} \sim$$

Příprava první klíč. $\mathbf{1}$ (přehození řádků) a pak pod ní nuly; další klíč. $\mathbf{1}$ k dispozici.

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{array}.$$

Dokončení eliminace. Obě metody daly stejný výsledek. Nyní dokončíme řešení příkladu:

$$D^{-2} = D^{-1} \cdot D^{-1} = \tfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad D^{-4} = D^{-2} \cdot D^{-2} = \tfrac{1}{16}\begin{bmatrix} 34 & 10 & 2 \\ 12 & -12 & 20 \\ 9 & 11 & -33 \end{bmatrix}$$

Řešený příklad 4.2.3. Určete F^{-1} a proveďte zkoušku; $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Řešení. U tohoto řádu se již jednoznačně vyplatí eliminační postup (i s kontrolním sloupcem):

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} \mathbf{1} & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} 6 \\ 10 \\ 9 \\ 5 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} \mathbf{1} & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} 6 \\ 4 \\ 9 \\ -1 \end{array} \sim$$

Nuly pod první klíč. $\mathbf{1}$; další klíč. $\mathbf{1}$ je (zde náhodou) hned k dispozici.

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} \mathbf{1} & 0 & -3 & -1 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} -2 \\ 4 \\ 5 \\ -1 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} \mathbf{1} & 0 & 0 & 8 & 6 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -5 & -3 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} 13 \\ -6 \\ 5 \\ -1 \end{matrix} \sim$$

Nuly nad i pod druhou klíč. $\mathbf{1}$; další klíč. $\mathbf{1}$ k dispozici a opět nuly nad i pod ní.

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} \mathbf{1} & 0 & 0 & 8 & 6 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -5 & -3 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \begin{matrix} 13 \\ -6 \\ 5 \\ 1 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & -2 & -5 & 3 & 8 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 2 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & -2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \begin{matrix} 5 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}$$

Příprava poslední klíč. $\mathbf{1}$ (4. řádek násoben -1) a dokončíme eliminaci nad klíč. $\mathbf{1}$.

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 3 & 8 \\ 2 & 3 & -2 & -5 \\ -2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{Zkouška: } F \cdot F^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -5 & 3 & 8 \\ 2 & 3 & -2 & -5 \\ -2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Podle věty o vlastnostech inverzních matic (bod (2)) již nemusíme provádět součin $F^{-1} \cdot F$.

ÚLOHY K ŘEŠENÍ

1. Určete, které z matic jsou regulární, a u těchto najděte matice inverzní oběma metodami:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 1 & 31 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (g) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ (i) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (j) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

2. Vypočtěte inverzní matice metodou eliminační:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 7 & 10 \\ 1 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (g) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

3. Přímým výpočtem prověřte pro matici $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ rovnost $A^{-2} \cdot A^{-3} = A^{-5}$.

4. Pro matici $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ určete matice C^{-2}, C^{-3}, C^{-4}.

5. Určete, pro která čísla r je matice M regulární a stanovte M^{-1}:

(a) $M = \begin{bmatrix} 6 & r \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $M = \begin{bmatrix} 4 & r \\ -r & 1 \end{bmatrix}$ (c) $M = \begin{bmatrix} 4 & r \\ -r & r \end{bmatrix}$

APLIKACE

(A) Řešení maticových rovnic. Problematikou maticových rovnic jsme se již zabývali. Zavedením inverzních matic získáváme nový nástroj – jeho využitelnost je omezena tím, že pouze regulární matice mají inverzní. Nejdříve formulujeme principy aplikace a pak na příkladech budeme demonstrovat vlastní techniku práce.

Nechť A, C jsou **regulární** matice a B je libovolná matice. Potom:

(i) Rovnici $A \cdot X = B$ lze vyřešit tak, že obě její strany násobíme **zleva** maticí A^{-1}. Dostáváme $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$, neboli $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$ a konečně $X = A^{-1} \cdot B$;

(ii) Rovnici $X \cdot C = B$ lze vyřešit tak, že obě její strany násobíme **zprava** maticí C^{-1}. Dostáváme $X \cdot C \cdot C^{-1} = B \cdot C^{-1}$, neboli $X \cdot E = B \cdot C^{-1}$ a konečně $X = B \cdot C^{-1}$;

(iii) Rovnici $A \cdot X \cdot C = B$ lze vyřešit tak, že obě její strany násobíme **zleva** maticí A^{-1} a zároveň **zprava** maticí C^{-1}. Dostáváme $A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot C \cdot C^{-1} = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$, neboli $E \cdot X \cdot E = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$ a konečně $X = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$;

Řešený aplikační příklad 4.2.1. Jsou zadány tři matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Řešte rovnice (i) $A \cdot X = B$, (ii) $X \cdot C = B$, (iii) $A \cdot X \cdot C = B$.

Řešení. Nejdříve si připravíme inverzní matice $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\text{(i) } X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix};$$

$$\text{(ii) } X = B \cdot C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & -5 \end{bmatrix};$$

$$\text{(iii) } X = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{9}{2} \end{bmatrix}.$$

Řešený aplikační příklad 4.2.2. Pro matice $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ řešte rovnice

(i) $PX + Q = RX$, (ii) $XP = X + R$ (iii) $2XP + R = 7X + Q$.

Řešení. (i) $PX + Q = RX$; „převedeme“ RX nalevo a Q napravo (přesněji řečeno – od obou stran rovnice odečteme RX a Q): $PX - RX = -Q$; vytkneme X zprava: $(P - R)X = -Q$; obě strany násobíme zleva maticí $(P - R)^{-1}$ a konečný výsledek je: $X = -(P - R)^{-1}Q$. Výpočet bude možno tímto způsobem provést pouze tehdy, je-li matice $P - R$ regulární.
Dokončení výpočtu:

$$X = -\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(b) $XP = X+R$; „převedeme“ X nalevo a nahradíme ho výrazem XE (tím si připravujeme následné vytknutí X) a máme: $XP - XE = R$; vytkneme X zleva: $X(P-E) = R$; obě strany násobíme zprava maticí $(P-E)^{-1}$ a konečný výsledek je: $X = R(P-E)^{-1}$. Postup lze takto realizovat jen v případě, že matice $P-E$ je regulární.
Dokončení výpočtu:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(iii) $2XP+R = 7X+Q$; „převedeme“ R napravo a $7X$ nalevo a nahradíme ho výrazem $X \cdot 7E$ (příprava pro vytknutí) a máme: $X \cdot 2P - X \cdot 7E = Q-R$; vytkneme X zleva: $X(2P-7E) = Q-R$; obě strany násobíme zprava maticí $(2P-7E)^{-1}$ a konečný výsledek je: $X = (Q-R)(2P-7E)^{-1}$. Výpočet lze dokončit tímto způsobem jen tehdy, je-li matice $2P-7E$ regulární.
Dokončení výpočtu:

$$X = \left(\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \left(\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{10}{3} & -\frac{19}{3} \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(B) Vstupně-výstupní makroekonomická analýza (input-output analysis). Začneme citací ze [Zie87][10]: „A very important application of matrices and their inverses is found in the relatively recently developed branch of applied mathematics called input-output analysis. Wassily Leontief, the primary force behind these new developments, was awarded the Nobel Prize in economics in 1973 because of significant impact his work had on economic planning for industrialized coutries. Among other things, he conducted a comprehensive study of how 500 sectors of the American economy interacted with each other. Of course, large-scale computers played important role in his analysis ...“

Objasníme myšlenky této aplikace na jednoduché analýze modelu dvou odvětví.

Řešený aplikační příklad 4.2.3. (modelový)

Uvažujeme dvě odvětví: odvětví E – produkuje elektřinu; odvětví W – produkuje vodu.

Do modelu zahrneme **jenom** vstupy a výstupy týkající se daných dvou produktů (ostatní opomíjíme); všechny hodnotové údaje jsou v dolarech ($). Mějme hodnotové charakteristiky:

na výrobu elektřiny v hodnotě 1 $ je v odvětví E třeba el. v hodnotě 0.1 $ a vody v hodnotě 0.3 $;
na výrobu vody v hodnotě 1 $ je v odvětví W třeba el. v hodnotě 0.4 $ a vody v hodnotě 0.2 $;
dále nechť předpokládané požadavky ostatních odvětví a spotřebitelů (na určité období) jsou:
d_1 ... el. za 12 mil. $, d_2 ... voda za 6 mil. $. Nyní přikročíme k hodnotové bilanci.

odvětví E : celková potřeba el. = el. na výrobu el. + el. na výrobu vody + d_1
odvětví W: celková potřeba vody = voda na výrobu el. + voda na výrobu vody + d_2

Jestliže označíme x_1 celkovou potřebu elektřiny a x_2 celkovou potřebu vody (obojí vyjádřené hodnotově v $), můžeme právě uvedené symbolické rovnice zapsat matematicky takto:

odvětví E : $x_1 = 0.1x_1 + 0.4x_2 + d_1$
odvětví W: $x_2 = 0.3x_1 + 0.2x_2 + d_2$
Označíme $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$

a lze přejít k maticové formulaci problému: $X = T \cdot X + D$. Tuto rovnici ovšem snadno vyřešíme: $E_{2\times 2} \cdot X = T \cdot X + D$, takže $(E_{2\times 2} - T) \cdot X = D$ a po vynásobení inverzní maticí konečně $X = (E_{2\times 2} - T)^{-1} \cdot D$. Dokončení úlohy:

$$X = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{4}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{10} \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 12\,\text{mil.} \\ 6\,\text{mil.} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{10} & -\frac{4}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{8}{10} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 12\,\text{mil.} \\ 6\,\text{mil.} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20\,\text{mil.} \\ 15\,\text{mil.} \end{bmatrix}.$$

Ke splnění uvedených požadavků je třeba vyprodukovat:
odvětví E(v mil. $) : $20 = 0.1 \cdot 20 + 0.4 \cdot 15 + 12 = 2$(el. pro E) + 6(el. pro W) + 12(d_1)
odvětví W(v mil. $): $15 = 0.3 \cdot 20 + 0.2 \cdot 15 + 6 = 6$(voda pro E) + 3(voda pro W) + 6(d_2).

[10] Z této učebnice jsou převzaty i další příklady na tuto aplikaci

Shrnutí: Při vstupně-výstupní analýze uvažujeme v modelu odvětví $O_1, O_2, \dots, O_k$ a následující hodnotové (ve zvolených peněžních jednotkách) matice:

T ... tzv. *technologická matice [technology matrix]*; je to matice (typu $k \times k$) vzájemných vztahů mezi odvětvími, tj. hodnota t_{ij} vyjadřuje hodnotu vstupu potřebného z odvětví O_i na výrobu množství produktu jednotkové peněžní hodnoty v odvětví O_j;

D ... tzv. *matice finálních požadavků [final demand matrix]*; je to matice (typu $k \times 1$) vyjadřující požadavky na produkci jednotlivých odvětví (d_i) z hlediska odběratelů mimo uvažovaný komplex odvětví (tj. ostatních odvětví a spotřebitelské sítě);

X ... tzv. *výstupní matice [total output matrix]*; je to matice (typu $k \times 1$) vyjadřující celkovou potřebu produkce jednotlivých odvětví (x_i), kterou chceme při analýze zjistit.

Při zjišťování matice X se vychází z bilanční rovnice

celkový výstup(X) = vnitřní požadavky daného komplexu odvětví$(T{\cdot}X)$ + vnější požad.(D)

čili $X = TX + D$ a její řešení je (pokud existuje inverzní matice $(E-T)^{-1}$):

$$\boxed{X = (E-T)^{-1} \cdot D}$$

Tedy odvětví O_i musí vyrobit kromě vně požadovaného objemu v hodnotě d_i ještě jednotlivé „vnitřně" požadované objemy svého produktu v hodnotách $t_{ij} \cdot x_j$ pro jednotlivá odvětví O_j včetně sebe sama. Výsledný analytický tvar je pak $x_i = t_{i1}x_1 + t_{i2}x_2 + t_{i3}x_3 + \ldots + t_{ik}x_k$.

APLIKAČNÍ ÚLOHY K ŘEŠENÍ

1. Řešte maticové rovnice a proveďte zkoušky správnosti:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & -2 & 0 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

2. Pro matice $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $W = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ řešte rovnice

(a) $UX = V$ (b) $XV = W$ (c) $UXV = W$ (d) $UX + U = W + X$
(e) $XU = W - X$ (f) $UXU = W$ (g) $2UX = W + 2X$ (h) $XU - 3XV = 2W$

3. Řešte modelový příklad se změněnými požadavky $d_1 = 18$ mil. dolarů, $d_2 = 12$ mil. dolarů.

4. Pro ekonomiku se dvěma sektory (zemědělství a energetikou) danou technologickou maticí T (v \$) proveďte vstupní-výstupní analýzu pro tři variantní zadání matice D (v miliadrách \$):

$T = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$, (i) $D = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$, (ii) $D = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}$, (iii) $D = \begin{bmatrix} 12 \\ 9 \end{bmatrix}$.

5. Pro ekonomiku se 3 sektory (zemědělství, stavebnictví, energetika) s technol. maticí T (v \$) proveďte vstupní-výstupní analýzu pro dvě variantní zadání matice D (v miliardách \$):

$T = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$, (i) $D = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix}$, (ii) $D = \begin{bmatrix} 20 \\ 15 \\ 10 \end{bmatrix}$.

6. Uvažujme dva sektory ekonomiky – dopravu a průmysl. Potřebné vstupy do dopravy na hodnotu 1 dolaru jsou z každého z obou odvětví 0.1 dolaru, a potřebné vstupy do průmyslu na hodnotu 1 dolaru jsou z každého z obou odvětví 0.4 dolaru. Najděte hodnoty celkových výstupů z obou těchto odvětví, jestliže vnější požadavky jsou (v miliardách dolarů): pro dopravu 5, pro průmysl 20.

7. Velká mezinárodní společnost produkuje elektřinu, zemní plyn a naftu. K produkci elektřiny v hodnotě 1 dolaru potřebuje tyto vstupy (v dolarech): elektřina – 0.3, plyn – 0.1, nafta – 0.2. K produkci plynu v hodnotě 1 dolaru potřebuje tyto vstupy (v dolarech): elektřina – 0.3, plyn – 0.1, nafta – 0.2. K produkci nafty v hodnotě 1 dolaru potřebuje tyto vstupy (v dolarech): elektřina – 0.1, plyn – 0.1, nafta – 0.1. Proveďte vstupně-výstupní analýzu, jsou-li vnější požadavky (v miliardách dolarů): elektřina – 25 , plyn – 15, nafta – 20.

KREATIVNÍ ÚLOHY

1. Najděte matici A jinou než E takovou, pro níž (a) adj $A = A$, (b) $A^{-1} = A$.

2. Je-li $\det A^{-3} = 8$, určete $\det A$.

3. Nechť A_1, A_2, B_1, B_2 jsou čtvercové matice 2. řádu. Jak byste řešili uvedenou soustavu dvou maticových rovnic o dvou neznámých maticích X, Y a co se může stát ?

$$A_1X + Y = B_1$$
$$A_2X - Y = B_2$$

4. An economy is based on two industrial sectors, coal and steel. Production of a dollar's worth of coal requires an input of \$0.10 from the coal sector and \$0.20 from the steel sector. Production of a dollar's worth of steel requires an input of \$0.20 from the coal sector and \$0.40 from the steel sector. Find the output for each sector that is needed to satisfy a final demand of \$20 billion for coal and \$10 billion for steel.

5. An economy is based on three sectors, agriculture, manufacturing, and energy. Production of a dollar's worth of agriculture requires inputs of \$0.20 from agriculture, \$0.20 from manufacturing, and \$0.20 from energy. Production of a dollar's worth of manufacturing requires inputs of \$0.40 from agriculture, \$0.10 from manufacturing, and \$0.10 from energy. Production of a dollar's worth of energy requires inputs of \$0.30 from agriculture, \$0.10 from manufacturing, and \$0.10 from energy. Find the output for each sector that is needed to satisfy a final demand of \$10 billion for agriculture, \$15 billion for manufacturing, and \$20 billion for steel.

KONTROLNÍ OTÁZKY KE KAPITOLE 4

1. Umíte najít matici M 7. řádu, pro níž $\det M = 208$? Jak rychle ji sestavíte?

2. Určete hodnotu $\det [-5]$.

3. Je-li A singulární matice, čemu je rovno $\det A^5$?

4. Kterých matic je více, singulárních nebo regulárních?

5. Najděte matici 2. řádu Z takovou, že neexistuje adj Z.

6. Proč rovnice $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ a rovnice $X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ nemají stejné řešení?

7. Uveďte matici 3. řádu A, pro níž je výpočet A^{-1} pomocí adjungované výhodnější než eliminací.

TERMINOLOGICKÝ SLOVNÍČEK KE KAPITOLE 4

determinant	determinant	Sarrusovo pr.	Sarrus' rule
algebraický doplněk	cofactor	rozvoj podle řádku	development by a row
det. vyššího řádu	higher order det.	vypočítat det.	evaluate a det.
singulární m.	singular matrix	regulární m.	non-singular m.
adjungovaná m.	adjoint (adjugate) m.	inverzní m.	inverse m.

Kapitola 5
Soustava lineárních rovnic

V kapitole páté je podána ucelená teorie soustav lineárních rovnic. Jsou prezentovány všechny základní teoretické poznatky s jejich praktickým dosahem. Student si osvojí čtyři metody řešení takových soustav. Kapitola má následující strukturu:

- ☐ analýza řešitelnosti soustav a rozhodnutí o počtu řešení
- ☐ jsou podrobně vyloženy a dostatečně procvičeny čtyři metody řešení regulárních soustav lineárních rovnic
- ☐ je podrobně diskutován případ soustav lineárních rovnic majících nekonečně mnoho řešení
- ☐ aplikační příklady ukazují využití regulárních soustav rovnic na problematiku souřadnic vektoru v bázi a ve vyrovnávacím počtu
- ☐ znovu se vracíme k ekonomickým problémům vedoucím na soustavy lineárních rovnic – rozhodovacím úlohám a optimalizačním výpočtům

5.1. Analýza soustavy lineárních rovnic

Definice. Soustavu m lineárních rovnic o n neznámých uvažujeme v obecném tvaru

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad & \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Zavedeme *matici soustavy* A a *rozšířenou matici soustavy* A^* (čteme „á s hvězdičkou") :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad A^* = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right],$$

vektor neznámých $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a *vektor pravých stran* $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

Vektor $\vec{x}$ považujeme zároveň za jednořádkovou matici (tj. typu $1 \times n$) a stejně tak vektor $\vec{b}$ (matice typu $1 \times m$). Podle potřeby budeme tyto dva vektory (jako matice) též transponovat (tj. $\vec{x}^{\mathrm{T}}$ a $\vec{b}^{\mathrm{T}}$), abychom dostali jednosloupcový tvar.

Řešením soustavy je každý vektor $\vec{x}$ (n-tice čísel), který splňuje **zároveň** všechny rovnice.

Ukázka. Soustava 2 rovnic o 4 neznámých, kterou zde uvádíme, bude sloužit k názornému vysvětlování v celé této podkapitole (budeme ji nazývat „ukázková soustava"):

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 7x_4 &= 7.6 \\ x_1 \qquad + 5x_3 + x_4 &= 26 \end{aligned} \qquad \text{Pak } A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \; A^* = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 1 & 7 & 7.6 \\ 1 & 0 & 5 & 1 & 26 \end{array}\right]$$

a příslušné vektory jsou $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\vec{b} = (7.6\,, 26)$. Jedním z mnoha možných řešení (přesvědčete se dosazením!) této soustavy je čtveřice $\vec{x} = (1, 0.2\,, 5, 0)$.

Nyní provedeme obecnou analýzu soustavy lin. rovnic (ilustrujeme na ukázkové soustavě 2 rovnic o 4 neznámých). Uvedeme 3 různé pohledy, jimiž můžeme soustavu analyzovat.

1. pohled - maticová rovnice

Soustavu chápeme jako maticovou rovnici $A \cdot \vec{x}^{\mathrm{T}} = \vec{b}^{\mathrm{T}}$, kde $\vec{x}^{\mathrm{T}}$ je neznámá matice.

Ukázková soustava má tvar : $$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.6 \\ 26 \end{bmatrix}$$

2. pohled - „baterie" skalárních součinů

Levá strana i-té rovnice je vlastně skalární součin $\vec{a_{i*}} \cdot \vec{x}$ (tj. $\vec{a_{i*}}$ je i-tý řádkový vektor matice A). Celou soustavu lze tedy popsat jako „baterii":

$$\begin{aligned} \vec{a_{1*}} \cdot \vec{x} &= b_1 \\ \vec{a_{2*}} \cdot \vec{x} &= b_2 \\ \ldots \quad & \quad \ldots \\ \vec{a_{m*}} \cdot \vec{x} &= b_m \end{aligned}$$

Pro ukázkovou soustavu máme 2 rovnice:

$$(3, -2, 1, 7) \cdot \vec{x} = 7.6$$
$$(1,\ 0,\ 5,\ 1) \cdot \vec{x} = 26$$

3. pohled - lineární kombinace sloupcových vektorů

Při tomto pohledu uvažujeme, že jednotlivé sloupcové vektory $\vec{a_{*j}}$ matice A jsou násobeny jednotlivými neznámými a výsledek (součet) této lineární kombinace má být roven vektoru pravých stran. Každá rovnice je vlastně výpočet pro jednu složku, neznámé koeficienty lin. kombinace $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se hledají.

Tento pohled je zejména názorný ve „sloupcové" podobě:

$$x_1 \cdot \vec{a_{*1}}^{\mathrm{T}} + x_2 \cdot \vec{a_{*2}}^{\mathrm{T}} + \ldots + x_n \cdot \vec{a_{*n}}^{\mathrm{T}} = \vec{b}^{\mathrm{T}}$$

$$\text{Ukázka: } x_1 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} + x_4 \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.6 \\ 26 \end{bmatrix}$$

APLIKACE

Na základě třetího pohledu na soustavu lineárních rovnic lze provést kompletní analýzu její řešitelnosti. Zdůrazněme ještě jednou, že jde o problém, jak vytvořit vektor pravých stran $\vec{b}$ jako lineární kombinaci souboru sloupcových vektorů matice A. Tato otázka byla vyřešena v kapitole 3, takže z výsledků můžeme nyní těžit.

Věta (Frobeniova)[11]. Soustava lineárních rovnic o n neznámých má řešení, právě když je splněna tzv. *Frobeniova podmínka*:

$$\boxed{h(A) = h(A^*)}$$

Dále pro počet řešení nastane vždy jedna ze tří možností:

(i) soustava nemá řešení, právě když $h(A) \neq h(A^*)$,

(ii) soustava má 1 řešení, právě když $h(A) = h(A^*) = n$,

(iii) soustava má nekonečně mnoho řešení, právě když $h(A) = h(A^*) < n$.

Důkaz. Soustava má řešení, právě když vektor $\vec{b}$ patří do obalu souboru všech sloupcových vektorů matice A. Jak víme z Kapitoly 3 tato podmínka je splněna, právě když vektor $\vec{b}$ nezvyšuje hodnost uvedeného souboru.

Jestliže všechny uvedené vektory uspořádáme do řádků matice, dostaneme matici A^{T} a po přidání vektoru pravých stran matici $(A^*)^{\mathrm{T}}$. Podmínka $h(A^{\mathrm{T}}) = h\left((A^*)^{\mathrm{T}}\right)$ přejde po transponování právě na Frobeniovu podmínku.

Co se týče počtu řešení, je třeba si uvědomit, že počet sloupcových vektorů je n. V případě, že obě hodnosti jsou rovny n, pracujeme s nezávislým souborem a vektor $\vec{b}$ se dá vyjádřit jako lineární kombinace **jediným** způsobem (tedy pomocí jediné n-tice koeficientů $x_1, x_2, \ldots, x_n$) , jsou-li však tyto hodnosti menší než n, je soubor sloupcových vektorů matice A závislý a vyjádření je možné nekonečně mnoha způsoby (n-ticemi koeficientů $x_1, x_2, \ldots, x_n$) – viz opět kapitola 3.

Řešený aplikační příklad 5.1.1. Určete počet řešení ukázkové soustavy v této podkapitole.

Řešení. $\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 1 & 7 & 7.6 \\ 1 & 0 & 5 & 1 & 26 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 1 & 26 \\ 3 & -2 & 1 & 7 & 7.6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 1 & 26 \\ 0 & -2 & -14 & 4 & -70.4 \end{array}\right]$

Výsledek úprav: $h(A) = h(A^*) = 2$ (obě matice jsme upravili současně – A je totiž součástí A^*). Je tedy splněna Frobeniova podmínka a vzhledem k tomu, že neznámé jsou 4, soustava má nekonečně mnoho řešení.

[11]Frobenius, Georg (1849-1917), německý matematik.

Řešený aplikační příklad 5.1.2. Pro zadanou soustavu 4 rovnic o 3 neznámých x_1, x_2, x_3 prověřte platnost Frobeniovy podmínky a určete počet řešení této soustavy.

$$\begin{aligned} x_1 - 2\,x_2 + x_3 &= 1\\ 3\,x_1 - x_2 + 6\,x_3 &= 3\\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2\\ x_1 + 2\,x_2 + 7\,x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Řešení.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 6 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 7 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{r} 1\\ 11\\ 5\\ 11 \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 5 & 3 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 1\\ 0 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right]\begin{array}{r} 1\\ 8\\ 4\\ 10 \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -3 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 1\\ 0 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right]\begin{array}{r} 1\\ -2\\ 4\\ 10 \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 9 & 1\\ 0 & 0 & 18 & 0 \end{array}\right]\begin{array}{r} 1\\ -2\\ 10\\ 18 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 9 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]\begin{array}{r} 1\\ -2\\ 10\\ -2 \end{array}$$

Tedy $h(A) = 3 \neq h(A^*) = 4$, to znamená, že soustava nemá řešení.

APLIKAČNÍ ÚLOHY K ŘEŠENÍ

1. Následující dvě soustavy rovnic popište z uvedených 3 pohledů

(i) $$\begin{aligned} x_1 - 2\,x_2 + x_3 &= 1\\ 3\,x_1 - x_2 + 6\,x_3 &= 3 \end{aligned}$$

(ii) $$\begin{aligned} x_1 - 2\,x_2 &= 1\\ 3\,x_1 - x_2 &= 3\\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$$

2. Prověřte platnost Frobeniovy podmínky pro soustavy rovnic z předchozí úlohy.

3. Pro každou ze zadaných soustav rovnic prověřte Frobeniovu podmínku a určete počet řešení:

(a) $$\begin{aligned} x_1 + 2\,x_2 &= 1\\ 2\,x_1 + 2\,x_2 &= 3 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} x_1 - 2\,x_2 &= 1\\ -x_1 + 2\,x_2 &= 3 \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} x_1 + 2\,x_2 &= 1\\ 3\,x_1 + 6\,x_2 &= 3 \end{aligned}$$

(d) $$\begin{aligned} x_1 - 2\,x_2 + x_3 &= 1\\ 3\,x_1 - x_2 + x_3 &= 2\\ 3\,x_1 + x_2 + 6\,x_3 &= 3 \end{aligned}$$

(e) $$\begin{aligned} x_1 - 2\,x_2 &= 1\\ -3\,x_1 + 6\,x_2 &= -3\\ x_1 + x_2 &= 2\\ 2\,x_1 - x_2 &= 3\\ -2\,x_1 + 4\,x_2 &= -2 \end{aligned}$$

(f) $$\begin{aligned} x_1 + 2\,x_2 + x_3 &= 1\\ x_1 - x_2 - x_3 &= 0\\ 2x_1 + 4x_2 + 2\,x_3 &= 2\\ 2\,x_1 + x_2 &= 1\\ 2\,x_2 + 2\,x_3 &= 1 \end{aligned}$$

(g) $$\begin{aligned} x_1 - 2\,x_2 + x_3 + 4\,x_4 &= 1\\ 2x_1 + 2\,x_2 + x_3 - x_4 &= 1\\ 3\,x_1 + 2\,x_3 + 3\,x_4 &= 3 \end{aligned}$$

4. Diskutujte vliv parametru p na řešitelnost a počet řešení zadaných soustav rovnic:

(a) $$\begin{aligned} x_1 + 2\,x_2 &= 1\\ 2\,x_1 + p\,x_2 &= 3 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} x_1 - \,2\,x_2 &= 1\\ -p\,x_1 + 2p\,x_2 &= 3 \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} x_1 + 2\,x_2 &= 0\\ 3\,x_1 + 7\,x_2 &= p \end{aligned}$$

5.2. Regulární soustava rovnic

Definice a Věta. Soustava n lineárních rovnic o n neznámých se nazývá *regulární* soustava rovnic, jestliže matice soustavy A je regulární matice.
Regulární soustava má vždy právě jedno řešení, neboť A je typu $n \times n$ a je-li $h(A) = n$, pak nutně i $h(A^*) = n$.

Pro tuto podkapitolu jsme zvolili demonstrační soustavu tří rovnic o 3 neznámých (viz vpravo):
Soustava je regulární, neboť $\det A = -4 \neq 0$.

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 + 9x_3 &= 10 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Nyní popíšeme 4 metody řešení regulárních soustav. Každá metoda bude vysvětlena nejdříve teoreticky a vzápětí na uvedené demonstrační soustavě.

I. METODA - Cramerovo pravidlo[12]

Pro každé j vytvoříme pomocnou matici A_j tak, že j-tý sloupec matice A nahradíme sloupcem pravých stran $\vec{b}^{\mathrm{T}}$ a pak platí

$$\boxed{x_j = \frac{\det A_j}{\det A}}$$

Řešený příklad 5.2.1. Řešíme uvedenou demonstrační soustavu:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 6 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 6 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 9 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-20}{-4} = 5, \qquad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-12}{-4} = 3, \qquad x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{8}{-4} = -2.$$

II. METODA - Užití inverzní matice

Dle 1. pohledu na soustavu rovnic (kapitola 5.1.) můžeme problém chápat jako maticovou rovnici $A \cdot \vec{x}^{\mathrm{T}} = \vec{b}^{\mathrm{T}}$, kde navíc A je regulární matice. Jestliže obě strany této rovnice násobíme **zleva** maticí A^{-1}, dostaneme

$$\boxed{\vec{x}^{\mathrm{T}} = A^{-1} \cdot \vec{b}^{\mathrm{T}}}$$

Pokračování řešeného příkladu 5.2.1. Nejdříve vypočteme některou z metod inverzní matici

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -2.5 \\ 0.5 & 1.5 & -1 \\ -0.5 & -3.5 & 1.5 \end{bmatrix}, \quad \text{a pak již} \quad \vec{x}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -2.5 \\ 0.5 & 1.5 & -1 \\ -0.5 & -3.5 & 1.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix},$$

tedy $x_1 = 5, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = -2.$

[12]Cramer [kramer], Gabriel (1704 – 1752), švýcarský matematik

III. METODA - Gaussova eliminace

Vyjdeme znovu z maticové rovnice $A \cdot \vec{x}^{\mathrm{T}} = \vec{b}^{\mathrm{T}}$, kterou budeme řešit metodou dělené matice. Vyjdeme z dělené matice $\left[A \mid \vec{b}^{\mathrm{T}}\right]$, kterou upravíme na matici v Gaussově tvaru $\left[C \mid \vec{d}^{\mathrm{T}}\right]$. Tuto dělenou matici nyní interpretujeme jako soustavu rovnic, která má tvar „kaskády“ - z druhé rovnice je „vyloučena (eliminována)“ neznámá x_1, z třetí jsou eliminovány x_1, x_2, atd. až v poslední rovnici zůstala pouze neznámá x_n (ostatní neznámé jsou z ní eliminovány):

$$\boxed{\begin{array}{rl} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n &= d_1 \\ + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n &= d_2 \\ \ldots & \ldots \\ c_{nn}x_n &= d_n \end{array}}$$

Hodnoty neznámých se již snadno vypočtou „zpětným chodem“, tj. nejdříve z poslední rovnice hodnota $x_n = \dfrac{d_n}{c_{nn}}$, ta se pak dosadí do předposlední rovnice a určí se x_{n-1}.

Postup pokračuje a jako poslední se určí z první rovnice hodnota x_1, když všechny ostatní už byly zjištěny z „nižších“ rovnic (ukázka následuje níže).

IV. METODA - Jordanova eliminace [13]

Postupujeme analogicky jako u Gaussovy eliminace, ale dělenou matici upravíme až na tvar, kdy na místě matice A je jednotková matice E (tento postup známe z výpočtu inverzních matic), tj. na tvar $\left[E \mid \vec{f}^{\mathrm{T}}\right]$, což odpovídá maticové rovnici $E \cdot \vec{x}^{\mathrm{T}} = \vec{f}^{\mathrm{T}}$, a tedy vektor $\vec{f}$ je přímo roven vektoru neznámých $\vec{x}$. Odpovídající soustava rovnic má „kuriózní“ tvar:

$$\boxed{\begin{array}{llll} x_1 & & & = f_1 \\ & x_2 & & = f_2 \\ & & \ldots & \ldots \\ & & x_n & = f_n \end{array}}$$

Dokončení řešeného příkladu 5.2.1. Nyní ukážeme postupně Gaussovu a Jordanovu eliminaci:

$$\left[\begin{array}{rrr|r|r} 5 & 1 & 9 & 10 & 25 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 6 & 2 & 10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r|r} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 9 & 10 & 25 \\ 4 & -2 & 6 & 2 & 10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r|r} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 4 & 10 & 20 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|r|r} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r|r} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r|r} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

V tomto okamžiku je dokončena Gaussova eliminace a soustava má nový tvar (viz vpravo):

$$\begin{array}{rl} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 + \frac{2}{3}x_3 &= \frac{5}{3} \\ x_3 &= -2 \end{array}$$

Z poslední rovnice je $x_3 = -2$. Po dosazení do rovnice předposlední máme $x_2 + \frac{2}{3} \cdot (-2) = \frac{5}{3}$, tj. $x_2 = 3$. Dosadíme za x_2 a x_3 do 1. rovnice a ta přejde na tvar $x_1 - 3 + (-2) = 0$, a tedy $x_1 = 5$.

[13] Jordan [žordan], Camille (1838 – 1922), francouzský matematik

Nyní budeme pokračovat dále v řádkových úpravách a dokončíme Jordanovu eliminaci:

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{c} 2 \\ 4 \\ -1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{c} 6 \\ 4 \\ -1 \end{array} \quad \text{a máme} \quad \begin{array}{rcl} x_1 & = & 5 \\ x_2 & = & 3 \\ x_3 & = & -2 \end{array}$$

ÚLOHY K ŘEŠENÍ

1. Určete, pro které hodnoty parametru k je daná soustava 2 rovnic o 2 neznámých (resp. 3 rovnic o 3 neznámých) regulární, a řešte ji Cramerovým pravidlem:

(a) $\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 & = & 5 \\ x_1 + kx_2 & = & 0 \end{array}$ (b) $\begin{array}{rcl} kx_1 - x_2 & = & 5 \\ x_1 + 2kx_2 & = & 0 \end{array}$ (c) $\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & k \\ 2x_1 + 3x_2 & = & 0 \end{array}$

(d) $\begin{array}{rcl} x_1 + kx_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 3 \end{array}$ (e) $\begin{array}{rcl} x_1 + kx_2 + 4x_3 & = & 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 2 \\ 2x_1 + x_2 + kx_3 & = & 3 \end{array}$

2. Vysvětlete, proč hodnoty parametrů p, q, a, b, c vyskytující se v následujících soustavách rovnic nemají vliv na jejich řešitelnost. Každou ze zadaných soustav řešte pomocí inverzní matice.

(a) $\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 & = & 25 \\ x_1 + x_2 & = & p \end{array}$ (b) $\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 & = & p \\ x_1 + 4x_2 & = & 0 \end{array}$ (c) $\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & p \\ 2x_1 + 3x_2 & = & q \end{array}$

(d) $\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & a \\ x_1 + x_3 & = & 2 \\ x_2 + x_3 & = & 3 \end{array}$ (e) $\begin{array}{rcl} x_1 + x_3 & = & a \\ 2x_1 + x_2 + x_3 & = & b \\ x_1 + x_2 \quad x_3 & = & c \end{array}$

3. Následující soustavy rovnic o 4 neznámých řešte Gaussovou a Jordanovou eliminací

(a) $\begin{array}{rcl} x + 3y - 2z + u & = & 0 \\ 2x + 5y - 3z + 3u & = & 0 \\ x + 2z - 2u & = & 9 \\ 2x - y + 4z + 9u & = & 3 \end{array}$ (b) $\begin{array}{rcl} x + y + 2z + t & = & -1 \\ 4x + y + 2z & = & 1 \\ x + y + z + t & = & 0 \\ 5x + 4z + 2t & = & 3 \end{array}$

APLIKACE

(A) Souřadnice vektoru v bázi prostoru V_n. Tato úloha byla formulována v kapitole 3:

V prostoru V_n je dána báze $\mathcal{B} : \vec{b}_1, \dots \vec{b}_n$, tj. nezávislý soubor n vektorů. Každý vektor $\vec{v} \in V_n$ je možno napsat jediným způsobem jako lineární kombinaci $\vec{v} = c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 + \dots + c_n\vec{b}_n$, přičemž koeficienty $c_1, \dots, c_n$ (souřadnice) právě hledáme.

Při řešení vznikne pro každou složku vektoru $\vec{v}$ jedna lineární rovnice o neznámých $c_1, \dots, c_n$. Celkově tedy vidíme, že je třeba vyřešit soustavu n rovnic o n neznámých, jejíž matice soustavy A má za jednotlivé **sloupce** vektory $\vec{b}_1^{\,\mathrm{T}}, \vec{b}_2^{\,\mathrm{T}}, \dots, \vec{b}_n^{\,\mathrm{T}}$.
$\mathcal{B}$ jako báze prostoru V_n je nezávislý soubor, a proto matice A je regulární. **Úloha na určení souřadnic vektoru v bázi prostoru V_n vede na regulární soustavu lin. rovnic.**

Řešený aplikační příklad 5.2.1. Určete souřadnice vektoru $\vec{v} = (8, 13, 6)$ v bázi prostoru V_3 $\mathcal{B} : (1, 2, 1), (1, 1, -2), (1, -1, -1)$.

Řešení. Pro souřadnice c_1, c_2, c_3 musí platit $c_1(1, 2, 1) + c_2(1, 1, -2) + c_3(1, -1, -1) = (8, 13, 6)$.

rovnice pro 1. složku:	$c_1 + c_2 + c_3 = 8$	Jedná se o regulární sou-
rovnice pro 2. složku:	$2c_1 + c_2 - c_3 = 13$	stavu rovnic s řešením
rovnice pro 3. složku:	$c_1 - 2c_2 - c_3 = 6$	$c_1 = 7$, $c_2 = 0$, $c_3 = 1$.

(B) Vyrovnávací počet. Klasickou úlohou vyrovnávacího počtu je sestavení regresní přímky (ve 2-rozměrném případě) nebo regresní roviny (v 3-rozměrném případě) pro daný soubor dat. Úloha vede (až na výjimky) na regulární soustavu rovnic – její tvar je výsledkem teoretických úvah, které zde neuvádíme.

Regresní přímka. Soubor dat $[x_1, y_1], [x_2, y_2], \dots, [x_N, y_N]$ (tj. N bodů v rovině) máme vyrovnat přímkou $y = kx + q$.

Neznámé parametry přímky q, k musí splňovat soustavu vpravo (tzv. *soustava normálních rovnic*), kde je S_x součet hodnot x_i, S_y součet hodnot y_i, S_{xy} součet hodnot $x_i \cdot y_i$, S_{x2} součet hodnot x_i^2.

$$\begin{aligned} Nq + S_x k &= S_y \\ S_x q + S_{x2} k &= S_{xy} \end{aligned}$$

Řešený aplikační příklad 5.2.2. Čtyři body v rovině $[0,2], [1,2], [1,1], [4,3]$ vyrovnat přímkou.

Řešení. $S_x = 6, S_y = 8, S_{xy} = 15, S_{x2} = 18$. Soustava je tedy: $\begin{aligned} 4q + 6k &= 8 \\ 6q + 18k &= 15 \end{aligned}$; Cramerovo pravidlo dává $q = \frac{54}{36}, k = \frac{12}{36}$ a regresní přímka je $y = \frac{1}{3}x + \frac{3}{2}$.

Regresní rovina. Body $[x_1, y_1, z_1], \dots, [x_N, y_N, z_N]$ vyrovnat rovinou $z = k_1 x + k_2 y + q$.

Neznámé parametry q, k_1, k_2 splňují *soustavu normálních rovnic*, v níž je S_x (resp. S_y nebo S_z) součet hodnot x_i (resp. y_i nebo z_i), S_{xz} (resp. S_{yz}) součet hodnot $x_i \cdot z_i$ (resp. $y_i \cdot z_i$), S_{x2} (resp. S_{y2}) součet hodnot x_i^2 (resp. y_i^2).

$$\begin{aligned} Nq + S_x k_1 + S_y k_2 &= S_z \\ S_x q + S_{x2} k_1 + S_{xy} k_2 &= S_{xz} \\ S_y q + S_{xy} k_1 + S_{y2} k_2 &= S_{yz} \end{aligned}$$

Poznámka. Regulární soustavy vznikají v nejrůznějších situacích, kdy je matematika aplikována na řešení reálných problémů. Níže to ukazujeme na slovních úlohách.

APLIKAČNÍ ÚLOHY K ŘEŠENÍ

1. Určete souřadnice vektoru $\vec{v}$ v bázi $\mathcal{B}$

(a) $\vec{v} = (13, 2)$, $\mathcal{B} : (1, -3), (2, 7)$ (b) $\vec{v} = (31, 29, 10)$, $\mathcal{B} : (1, 5, 3), (2, 1, -1), (4, 2, 1)$

(c) $\vec{v} = (0, 2)$, $\mathcal{B} : (11, 3), (-2, 7)$ (d) $\vec{v} = (5, -2, -, 2)$, $\mathcal{B} : (1, 1, 2), (1, 2, -3), (1, -1, -1)$

(e) $\vec{v} = (3, -1, 1, 0)$, $\mathcal{B} : (5, 1, 4, 1), (0, 1, 1, 1), (4, 2, 2, 1), (2, 1, 0, 1)$

(f) $\vec{v} = (2, 0, 3, -2, 5)$, $\mathcal{B} : (2, 1, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 1, 1), (1, 1, 3, 1, 1), (1, 1, 1, 4, 1), (1, 1, 1, 1, 5)$

2. Zadaný soubor N bodů v rovině vyrovnejte regresní přímkou:

(a) $N = 5$, $[0,2], [1,2], [1,1], [0,3], [3,0]$ (b) $N = 6$, $[0,0], [1,0], [2,1], [3,1], [4,2], [5,2]$

(c) $N = 4$, $[0,-2], [1,2], [1,1], [0,-1]$ (d) $N = 7$, $[0,0], [1,0], [0,0], [1,1], [3,1], [3,2], [4,1]$

3. Zadaný soubor dat vyrovnejte regresní rovinou:

(a) $N = 4, [0,2,0], [1,1,2], [1,1,4], [0,0,3]$ (b) $N = 5, [0,0,0], [1,0,1], [0,0,0], [1,1,1], [4,2,2]$

4.* (Rozpis) Marketingová firma uskuteční průzkum zájmu zákazníků o nový druh jogurtu. Provedení bude objednáno u dvou agentur, které nabízejí tyto **hodinové kapacity**:

Agentura „A“: 30 telefonních kontaktů (dotazů) a 10 návštěv v domácnostech;
Agentura „B“: 20 telefonních kontaktů (dotazů) a 20 návštěv v domácnostech.

Na kolik **hodin** práce bude zakázka pro každou z agentur při celkové potřebě:

(a) 600 telefonátů a 400 návštěv, (b) 650 telefonátů a 350 návštěv, (c) t telef. a n návštěv.

5.* (Plánování výroby) Při výrobě nafukovacích člunů pro 1, 2 a 4 osoby je potřeba práce (vše udáváme v „člověkohodinách“) následující. Na jeden člun pro 1 osobu: stříhárna 0.5, kompletace 0.6, balírna 0.2; na jeden člun pro 2 osoby: stříhárna 1.0, kompletace 0.9, balírna 0.3; na jeden člun pro 4 osoby: stříhárna 1.5, kompletace 1.2, balírna 0.5. Naplánujte týdenní výrobu (tj. počty jednotlivých druhů člunů) tak, abyste využili týdenní kapacity provozovny: stříhárna 380, kompletace 330, balírna 120.

5.3. Homogenní a nehomogenní soustavy

Definice. Soustava lineárních rovnic se nazývá *homogenní*, jestliže vektor pravých stran $\vec{b}$ je nulový (tj. roven $\vec{o}$). Ostatní soustavy se nazývají *nehomogenní.*

Ke každé nehomogenní soustavě přísluší soustava homogenní, kterou získáme nahrazením vektoru pravých stran vektorem $\vec{o}$.

Jako demonstrační soustavu jsme zvolili soustavu 3 rovnic o 5 neznámých. Je to soustava nehomogenní, jejíž příslušná soustava homogenní vznikne nahrazením všech tří pravých stran nulami.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 5x_5 &= 8\\ 3x_1 - 6x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 &= 2\\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 &= 6 \end{aligned}$$

Věta 1. Množina všech řešení homogenní soustavy o n neznámých je podprostor P prostoru V_n a platí $\dim P = n - h(A)$, kde A je matice soustavy. Jestliže $\dim P = k > 0$ a $\mathcal{B} : \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k$ je báze prostoru P, pak *obecné řešení* dané homogenní soustavy má tvar $\vec{x} = c_1\vec{b}_1 + \ldots + c_k\vec{b}_k$, kde $c_1, \ldots, c_k$ jsou volitelné konstanty (reálná čísla).

Důkaz. Podle 2. pohledu na soustavu rovnic je zřejmé, že v případě homogenní soustavy hledáme vektor $\vec{x}$ kolmý na všechny řádkové vektory matice soustavy A. Jak víme z kapitoly 3, takové vektory právě tvoří podprostor prostoru V_n uvedené dimenze.

Nyní budeme zkoumat homogenní soustavu příslušnou k demonstrační soustavě. Určíme hodnost matice soustavy A.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 5x_5 &= 0\\ 3x_1 - 6x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 &= 0\\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 & 5\\ 3 & -6 & -2 & 1 & 3\\ -2 & 4 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 1 & -5 & -12\\ 0 & 0 & -1 & 5 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 1 & -5 & -12\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 1 & -5 & -12 \end{bmatrix}$$

Je tedy $h(A) = 2$. Podprostor P má dimenzi $k = n - h(A) = 5 - 2 = 3$.

Zbývá dořešit otázku vytvoření báze prostoru P. Připomeňme si, že P je ortogonální doplněk souboru všech řádkových vektorů matice A.

Strategie pro vytvoření báze prostoru P všech řešení homogenní soustavy lineárních rovnic o n neznámých:

1. Matici A upravíme na Gaussův tvar. Zjistíme $k = \dim P$.

2. Je-li $k = 0$, soustava má pouze triviální řešení $\vec{o}$.

3. Je-li $k = n$, je $P = V_n$ a lze použít jakoukoliv bázi prostoru V_n.

4. Je-li $1 < k < n$, najdeme pro každé $i = 1, \ldots, k$ v i-tém řádku výsledné matice v Gaussově tvaru první nenulový prvek a jemu příslušný sloupec $n(i)$ (viz kapitola 3.) označíme j_i.

5. Máme tedy vyznačeny sloupce $j_1, \ldots, j_k$; jim příslušné neznámé $x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}$ nazveme *základní (bázické)* neznámé. Řekneme též, že soustava byla řešena *vzhledem* k těmto neznámým. Ostatní neznámé (*nezákladní*) považujeme za parametry – jsou tedy volitelné.

6. Vhodnou volbou (kombinacemi) hodnot nezákladních neznámých získáme nezávislý soubor k vektorů prostoru P. Jednou z možností je postupně zvolit vždy hodnotu jedné nezákladní neznámé rovnou 1 a všechny ostatní 0 – hodnoty základních neznámých se ovšem musí při **každé** volbě znovu dopočítat.

Řešený příklad 5.3.1. Sestavte bázi prostoru všech řešení homogenní soustavy příslušné k demonstrační soustavě této podkapitoly.

Řešení. Připomeňme znovu úpravu rozříšené matice soustavy na Gaussův tvar:

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & -1 & 2 & 5 & 0 \\ 3 & -6 & -2 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & -1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -12 & 0 \end{array}\right]$$

Dospěli jsme tedy k soustavě:
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 5x_5 &= 0 \\ x_3 - 5x_4 - 12x_5 &= 0 \end{aligned}.$$

Soustava byla řešena vzhledem k x_1 a x_3 (základní neznámé), nezákladními neznámými jsou x_2, x_4, x_5. Bázi prostoru všech řešení budou tvořit vektory $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$, jejichž složky na místech základních neznámých musíme dopočíst.

$$\vec{b}_1 = (?,1,?,0,0)$$
$$\vec{b}_2 = (?,0,?,1,0)$$
$$\vec{b}_3 = (?,0,?,0,1)$$

Například při výpočtu chybějících složek vektoru $\vec{b}_1$ dosadíme nejdříve do druhé rovnice $x_2 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0$ a vypočteme z ní $x_3 = 0$. Z první rovnice nyní již snadno určíme $x_1 = 2$, tj. dostáváme $\vec{b}_1 = (2,1,0,0,0)$.

Zcela analogicky určíme $\vec{b}_2 = (3,0,5,1,0), \vec{b}_3 = (7,0,12,0,1)$. Tím byla sestavena báze prostoru všech řešení homogenní soustavy rovnic. Její obecné řešení má tvar (s volitelnými konstantami c_1, c_2, c_3): $\vec{x} = c_1(2,1,0,0,0) + c_2(3,0,5,1,0) + c_3(7,0,12,0,1)$.

Zbývá charakterizovat obecné řešení libovolné **nehomogenní** soustavy.

Věta 2. Nechť je zadána nehomogenní soustava rovnic a je známo jedno její řešení – vektor $\vec{n}$, a dále označíme P prostor všech řešení příslušné homogenní soustavy.
Všechna řešení nehomogenní soustavy tvoří tzv. *lineární množinu* $\vec{n} + P$, což je množina všech vektorů tvaru $\vec{n} + \vec{p}$, kde $\vec{p} \in P$. Jestliže $\dim P = k > 0$ a $\vec{b}_1, \ldots \vec{b}_k$ je báze prostoru P, pak obecné řešení nehomogenní soustavy má tvar (s volitelnými konstantami $c_1, \ldots, c_k$):

$$\vec{x} = \vec{n} + c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 + \ldots + c_k\vec{b}_k$$

Řešený příklad 5.3.2. Najděte obecné řešení demonstrační nehomogenní soustavy.

Řešení. Začneme Gaussovou eliminací na nehomogenní soustavě:

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & -1 & 2 & 5 & 8 \\ 3 & -6 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{r} 13 \\ 1 \\ 12 \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & -1 & 2 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -12 & -22 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 12 & 22 \end{array}\right] \begin{array}{r} 13 \\ -38 \\ 38 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & -1 & 2 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -12 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{r} 13 \\ -38 \\ 0 \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & -1 & 2 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -12 & -22 \end{array}\right] \begin{array}{r} 13 \\ -38 \end{array}$$

Dospěli jsme k nehomogenní soustavě:
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 5x_5 &= 8 \\ x_3 - 5x_4 - 12x_5 &= -22 \end{aligned}$$

Nejdříve je třeba sestavit bázi $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ prostoru všech řešení příslušné soustavy **homogenní**, jak jsme to již provedli v předchozím řešeném příkladu (pro tento účel nahradíme pravé strany obou rovnic nulami).

K získání vektoru $\vec{n}$ je již obrátíme k výsledné **nehomogenní** soustavě – protože potřebujeme jen jedno její řešení, můžeme si např. zvolit hodnoty všech nezákladních neznámých nulové, tj. $\vec{n} = (?,0,?,0,0)$. Snadno dopočteme nejdříve z druhé rovnice $x_3 = -22$ a pak z první rovnice $x_1 = -14$ a máme $\vec{n} = (-14,0,-22,0,0)$.

Obecné řešení zadané demonstrační soustavy je (s volitelnými konstantami c_1, c_2, c_3):
$\vec{x} = (-14,0,-22,0,0,0) + c_1(2,1,0,0,0) + c_2(3,0,5,1,0) + c_3(7,0,12,0,1)$.

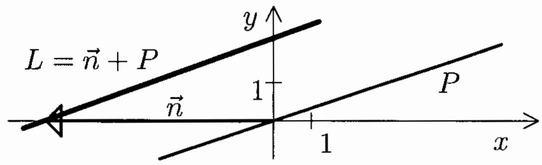
Řešený příklad 5.3.3. Charakterizujte (i geometricky) množinu všech řešení soustavy 2 rovnic o neznámých x, y $\begin{array}{rcl} x - 3y &=& -6 \\ -2x + 6y &=& 12 \end{array}$.

Řešení. Soustavu zpracujeme Gaussovou eliminací:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & -3 & -6 \\ -2 & 6 & 12 \end{array}\right] \begin{array}{r} -8 \\ 16 \end{array} \sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{r} -8 \\ 0 \end{array} \sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -3 & -6 \end{array}\right] -8$$

Dospěli jsme k jediné rovnici o dvou neznámých $x - 3y = -6$ a příslušné k ní homogenní $x - 3y = 0$.

Prostor P všech řešení homog. soustavy má dimenzi jedna, jeho bázi tvoří vektor $(3, 1)$, který získáme volbou nezákladní neznámé $y = 1$. Obecné řešení soustavy homogenní je $(x, y) = c(3, 1) = (3c, c)$. Jde o přímku procházející počátkem o paramerických rovnicích $x = 3c$, $y = c$ (viz obrázek).



Pro nehomogenní soustavu získáme volbou $y = 0$ jedno řešení $\vec{n} = (-6, 0)$. Obecné řešení zadané nehomogenní soustavy je lineární množina L tvořená vektory $(x, y) = (-6, 0) + c(3, 1) = (3c - 6, c)$. Jde o přímku neprocházející počátkem o parametrických rovnicích $x = 3c - 6$, $y = c$ (viz obrázek).

ÚLOHY K ŘEŠENÍ

1. U zadaných homogenních soustav rovnic o 3 neznámých (úlohy (a), (b), (c), (d)) a dále o 4 neznámých ((e), (f)) určete dimenzi prostoru všech řešení

(a) $\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 &=& 0 \\ x_1 + x_3 &=& 0 \\ x_2 + x_3 &=& 0 \end{array}$ (b) $\begin{array}{rcl} x_1 + x_3 &=& 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &=& 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &=& 0 \end{array}$

(c) $\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 &=& 0 \\ x_1 + x_3 &=& 0 \end{array}$ (d) $\begin{array}{rcl} x_1 + x_3 &=& 0 \\ 2x_1 + 2x_3 &=& 0 \end{array}$

(e) $\begin{array}{rcl} x + 3y - 2z + u &=& 0 \\ 2x + 5y - 3z + 3u &=& 0 \\ x + 2z - 2u &=& 0 \end{array}$ (f) $\begin{array}{rcl} x + y + 2z - t &=& 0 \\ 2x + 2y + 4z - 2t &=& 0 \\ x + y + z + t &=& 0 \\ x + y + 3z + -3t &=& 0 \end{array}$

2. U homogenních soustav rovnic z předchozí úlohy, které mají netriviální řešení, najděte bázi prostoru všech řešení a napište předpis pro obecné řešení.

3. U zadaných nehomogenních soustav rovnic charakterizujte množinu všech jejich řešení zadaných soustav (o třech, čtyřech, třech a pěti) a napište předpis pro obecné řešení.

(a) $\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + 3x_3 &=& 1 \\ x_1 + x_3 &=& 2 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &=& 3 \end{array}$ (b) $\begin{array}{rcl} x + 3y - 2z + u &=& 10 \\ 2x + 5y - 3z + 3u &=& 0 \\ x + 2z - 2u &=& 1 \end{array}$

(c) $\begin{array}{rcl} x_1 + x_3 &=& -2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &=& 7 \end{array}$ (d) $\begin{array}{rcl} x + 2y - 5z + u + v &=& -2 \\ 3x + y - 4z + 6u + 2v &=& -2 \\ y + 3z - 4u &=& 1 \end{array}$

4. U zadaných soustav rovnic o dvou neznámých znázorněte graficky množinu všech řešení

(a) $\begin{array}{rcl} 2x + 4y &=& 6 \\ x + 2y &=& 3 \end{array}$ (b) $\begin{array}{rcl} x - y &=& 7 \\ -x + y &=& -7 \end{array}$

APLIKACE

(A) Báze ortogonálního doplňku. Je-li $\mathcal{S}$: $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_k$ soubor vektorů, pak zřejmě $\vec{x} \in \mathcal{S}^\perp$ právě když pro každé i platí $\vec{s}_i \cdot \vec{x} = 0$. To vede na vyřešení homogenní soustavy rovnic.

Řešený aplikační příklad 5.3.1. Najděte bázi prostoru $\mathcal{S}^\perp$, kde $\mathcal{S} : (1,2,3,4), (1,3,7,13)$.

Řešení. Řešíme homogenní soustavu $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 13x_4 &= 0 \end{aligned}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 7 & 13 & 0 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 9 & 0 \end{array}\right]$$ Soustava je vyřešena vzhledem k x_1, x_2.

Báze prostoru všech řešení: $b_1 = (?, ?, 1, 0)$, $b_2 = (?, ?, 0, 1)$. Po jednoduchých výpočtech dostáváme bázi prostoru $\mathcal{S}^\perp : (5, -4, 1, 0), (14, -9, 0, 1)$.

(B) Rozhodovací úlohy s volností.

Řešený aplikační příklad 5.3.2. Celková investice 2 mil. Kč má být rozdělena na 3 části, z nichž každá bude investována s rozdílnou roční výnosností, totiž 10%, 8% a 7%. Jak to provést, aby byl celkový výnos za rok 160 tisíc Kč?

Řešení. Označíme x_1, x_2, x_3 výše jednotlivých investic (v mil. Kč). Podmínky úlohy vedou na soustavu 2 rovnic o 3 neznámých (vše v mil. Kč): $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 0.10x_1 + 0.08x_2 + 0.07x_3 &= 0.16 \end{aligned}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0.1 & 0.08 & 0.07 & 0.16 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1.5 & 2 \end{array}\right] \quad \text{tj.} \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_2 + 1.5x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Bázi prostoru všech řešení příslušné homogenní soustavy tvoří vektor $\vec{b} = (0.5,\ -1.5,\ 1)$; soustavu nehomogenní řeší vektor $\vec{n} = (0, 2, 0)$ (oba vektory jsme získali standardním postupem).
Obecné řešení úlohy: $\vec{x} = \vec{n} + c \cdot \vec{b} = (0.5c,\ 2 - 1.5c,\ c)$. Volbou c dostáváme různá řešení tvaru $x_1 = 0.5c$, $x_2 = 2 - 1.5c$, $x_3 = c$; pro $c = 1$ je to reálně použitelné řešení $x_1 = 0.5$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = 1$; pro $c = 2$ dostaneme reálně nepoužitelné řešení $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$.
Další úvahy a konečné rozhodnutí budou souviset např. s rizikovostí jednotlivých typů investic.

APLIKAČNÍ ÚLOHY K ŘEŠENÍ

1. Pro zadaný soubor vektorů $\mathcal{S}$ najděte bázi prostoru $\mathcal{S}^\perp$
   (a) $\mathcal{S} : (0,1,2,3,1)$ (b) $\mathcal{S} : (0,1,2), (0,1,1)$
   (c) $\mathcal{S} : (0,1,2,0), (1,0,1,1)$ (d) $\mathcal{S} : (0,1,2,1), (1,0,1,1), (1,1,1,1), (0,1,0,0)$
   (e) $\mathcal{S} : (-10,2), (20,-4)$ (f) $\mathcal{S} : (0,0,-1,-2,0), (0,0,-1,1,0)$
2. V řešeném aplik. příkladu 5.3.2. uvažte případ investice 4 mil., z níž chceme roční výnos 300 tisíc.
3. V umělecké slévárně vyrábějí 3 druhy ozdobných mříží s následujícími náklady (všechny údaje v hodinách práce):
   Mříž A: odlévání 30, kompletace 10, Mříž B: odl. 10, kom. 10 Mříž C: odl. 10, kom. 30.
   Naplánujte týdenní výrobu (počty kusů jednotlivých druhů) pro týdenní kapacitu
   (a) odlévání 350, kompletace 150, (b) odlévání 400, kompletace 200.
4. Zásilka Červeného kříže bude dodána na místo určení letecky. Je k dispozici nákladní prostor o objemu 150 kubických metrů a povolená váha zásilky je přitom 18 tisíc kg. Jaké složení zásilky (tj. počty kontejnerů jednotlivých druhů) navrhujete, jestliže se skládá z krevních konzerv (1 kontejner má objem 0.5 m^3 a váhu 70 kg), zdravotních balíčků (1 kontejner má objem 0.8 m^3 a váhu 40 kg), potravinových balíčků (1 kontejner má objem 0.2 m^3 a váhu 20 kg) a pitné vody (1 kontejner má objem 0.15 m^3 a váhu 40 kg)?

KREATIVNÍ ÚLOHY KE KAPITOLE 5

1. Jak by vypadala soustava 1 rovnice o 2 neznámých, která nesplňuje Frobeniovu podmínku?

2. Napište soustavu rovnic o neznámých x_1, x_2, x_3 takovou, že jedno její řešení je $x_1 = 1$, $x_2 = 2, x_3 = 3$ a přitom (a) je to jediné možné řešení, (b) není to jediné možné řešení.

3. V aplikační úloze 1. najděte ortogonální báze zkoumaných prostorů $S^\perp$ (úl. (a) až (f)).

4.* In a laboratory experiment, rats are to be fed 5 packets of food containing a total 80 units of vitamin E. There are four different brands of food packets that can be used. A packet of brand A contains 5 units of vitamin E, a packet of brand B contains 10 units of vitamin E, a packet of brand C contains 15 units of vitamin E, and a packet of brand D contains 15 units of vitamin E. How many packets of each brand should be mixed and fed to the rats?

5.* A dietarian in a hospital is to arrange a special diet composed of two basic foods. The diet is to include exactly 340 units of calcium, 180 units of iron, and 220 units of vitamin A. The number of units per ounce of each special ingredient for each of the foods is:
Food A: Calcium 30, Iron 10, Vitamin A 10, Food B: Calc. 20, Iron 20, Vit. A 20.

KONTROLNÍ OTÁZKY KE KAPITOLE 5

1. Vytvořte soustavu rovnic, která nesplňuje Frobeniovu podmínku.

2. Kolik řešení má zadaná soustava, jestliže je řešitelná Cramerovým pravidlem?

3. Kdy je soustava obsahující jednu rovnici regulární?

4. Kolik řešení může mít soustava m rovnic o n neznámých pro případ
(a) $m = 2$, $n = 3$ (b) $m = 3$, $n = 2$ (c) $m = 3$, $n = 3$ (d) $m = 330$, $n = 334$?

5. Napište soustavu 2 rovnic o 2 neznámých, která
(a) je regulární a je homogenní
(b) není regulární a je homogenní
(c) je regulární a není homogenní
(d) není ani regulární ani homogenní
(e) není řešitelná Cramerovým pravidlem
(f) nemá řešení
(g) má jediné řešení $x = 111, y = 3$
(h) má nekonečně mnoho řešení

6. Napište homogenní soustavu takovou, že vektor $(1, 2, 1)$ je bází prostoru všech řešení této soustavy.

TERMINOLOGICKÝ SLOVNÍČEK KE KAPITOLE 5

soustava m rovnic o n neznámých	$(m \times n)$ [m by n] system of equations
matice soustavy	coefficient matrix
rozšířená matice soustavy	augmented matrix
množina řešení	solution set
jediné řešení	unique solution
nekonečně mnoho řešení	infinitely many solutions
žádné řešení	no solution
rovnice nemají společné řešení	the system is inconsistent
eliminační postup	elimination procedure
Gaussova eliminace	gaussian elimination
ekvivalentní soustavy	equivalent systems
obecné řešení	generalized form of the solution

Kapitola 6
Od pojmu relace k pojmu funkce

Výklad šesté kapitoly směřuje od obecného abstraktního pojmu relace, přes pojem zobrazení až k zavedení funkcí. První část je i exkurzem do tzv. diskrétní matematiky. Úvod do problematiky funkcí předznamenává jejich podrobné zkoumání (matematickou analýzu) v druhém dílu skript. Obsah kapitoly:

- □ binární relace mezi množinami a základní operace s nimi
- □ některé speciální relace na množině
- □ možnosti aplikace aparátu relací do nejrůznějších oborů lidské činnosti včetně vytváření relačních datových struktur
- □ definice zobrazení a vymezení jeho základních typů
- □ specializovaná zobrazení se uplatní v nejrůznějších oblastech
- □ reálná funkce a její graf
- □ základní vlastnosti reálných funkcí; operace s funkcemi
- □ technika určování definičních oborů a konstrukce inverzních funkcí
- □ přehled nejzákladnějších užívaných funkcí a některých jejich vlastností

6.1. Relace

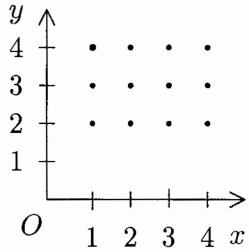
Definice. *Kartézským součinem* dvou množin A, B nazýváme množinu všech uspořádaných dvojic $[x, y]$, kde $x \in A$ a $y \in B$ a zapisujeme: $A \times B = \{[x, y]; x \in A \wedge y \in B\}$

Poznámka: [x,y] jsou tzv. *uspořádané dvojice*, ve kterých záleží na pořadí prvků, tj. např. $[1, 8] \neq [8, 1]$.

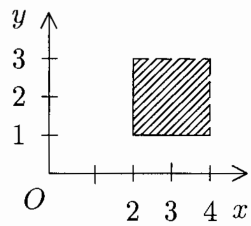
Analogicky bychom definovali kartézský součin n neprázdných množin $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ jako $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n = \{[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n]; x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge x_3 \in A_3 \wedge \ldots \wedge x_n \in A_n\}$.

Užíváme též značení $A \times A = A^2$, $A \times A \times A = A^3$ a podobně.

Příklady.
Pro množiny $M_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $M_2 = \{2, 3, 4\}$ bude $M_1 \times M_2 = \{[1, 2], [1, 3], [1, 4], [2, 2], [2, 3], [2, 4], [3, 2], [3, 3], [3, 4], [4, 2], [4, 3], [4, 4]\}$. Kartézským součinem dvou diskrétních množin (obrázek) je opět diskrétní množina (tj. množina izolovaných bodů). Množina $M_1 \times M_2$ má tedy $4 \cdot 3 = 12$ prvků.



$I_1 = \langle 2, 4), I_2 = \langle 1, 3), I = I_1 \times I_2$. Kartézským součinem dvou souvislých množin (intervalů) je opět souvislá množina (obrázek). Intervaly I_1, I_2 jsou zprava otevřené, množina I tedy neobsahuje hranice příslušné krajním hodnotám původních intervalů.



Definice. *(Binární) relací* z množiny A do množiny B nazýváme každou podmnožinu σ kartézského součinu $A \times B$ a označujeme $\sigma : A \longrightarrow B$. Množinu A nazýváme *definičním oborem* této relace a množinu B *oborem hodnot.*

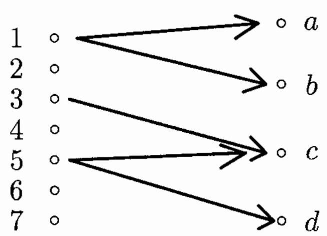
Při různých příležitostech se užívá též značení $\sigma = \{[x, y] \in A \times B; [x, y] \in \sigma\}$ nebo $\sigma = \{[x, y] \in A \times B; V(x, y)\}$, či $x\sigma y$, což znamená: „prvek x je v relaci σ s prvkem y“.

Relace může být určena mj. i graficky (kartézský graf, uzlový graf, šachovnicový graf atd.)

Ke každé relaci σ sestavujeme matici sousednosti $\mathbf{A}_\sigma$ mající za prvky pouze čísla 0 nebo 1. Její řádky značíme pomocí prvků def. oboru (ve zvoleném pořadí daném jejich výčtem) a sloupce pomocí prvků oboru hodnot (opět v pevném pořadí) a platí:

$\mathbf{a}_{ij} = 1$, když $[i, j] \in \sigma$ a $\mathbf{a}_{ij} = 0$, když $[i, j] \notin \sigma$.

Ukázka:
Pro $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, B = \{a, b, c, d\}$ definujeme ukázkovou relaci $\sigma : A \longrightarrow B$ jako $\sigma = \{[1, a], [1, b], [3, c], [5, c], [5, d]\}$. Její uzlový graf znázorňuje obrázek, v němž jsou jednotlivé uspořádané dvojice reprezentovány šipkami.



$$\mathbf{A}_\sigma = \begin{bmatrix} 1\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,1 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \end{bmatrix}$$

Poznámka. Podobně jako binární relaci můžeme definovat relaci *unární* (na jedné množině) či obecně *n-nární relaci*, tedy jakoukoliv podmnožinu kartézského součinu množin $A_1 \times A_2 \times A_3 \ldots \times A_n$.

Věta (o počítání). Jestliže konečné množiny A, B mají p, q prvků, pak

(a) Kartézský součin $A \times B$ má $p \cdot q$ prvků,

(b) počet všech relací z A do B je $2^{p \cdot q}$,

(c) počet všech relací z A do B majících právě k dvojic („šipek“) je $\binom{p \cdot q}{k}$

Důkaz. Stačí si uvědomit, že platí: pokud má množina n prvků, pak má 2^n podmnožin, a počet jejích podmnožin velikosti k je $\binom{n}{k}$. Tento poznatek se použije na množinu $A \times B$ mající $p \cdot q$ prvků (šipek) a z nich se vybírá.

Řešený příklad 6.1.1. Pro množiny A, B z ukázky určete počet všech relací z A do B a zjistěte, kolik z nich (v %) má 4 prvky (tj. šipky).

Řešení. Kartézský součin $A \times B$ má $7 \cdot 4 = 28$ prvků. Tedy počet všech relací z A do B je $2^{28} = 268435456$, z toho počet těch, které mají 4 šipky je $\binom{28}{4} = 20475$, tj. asi 0.00763%.

Nyní představíme tři základní operace s relacemi. Jde o úkony jednoduché, mající však velký obecný význam v matematice.

Definice. Mějme relaci $\sigma : A \longrightarrow B$ a relaci $\varrho : B \longrightarrow C$.

• Jsou-li množiny A_1, B_1 takové, že $A_1 \subset A, B_1 \subset B$ pak *restrikcí relace* σ na množiny A_1, B_1 rozumíme relaci $\sigma|_{A_1,B_1} : A_1 \to B_1$, do níž patří jen ty dvojice $[x, y]$, které patřily do původní relace σ a zároveň $x \in A_1, y \in B_1$.

• *Inverzní relací* k relaci σ rozumíme relaci $\sigma^{-1} : B \longrightarrow A$, kde je $\sigma^{-1} = \{[y, x]; [x, y] \in \sigma\}$.

• *Složením* relací σ a ϱ (**v tomto pořadí**) míníme relaci z A do C tvořenou všemi dvojicemi $[x, z] \in A \times C$, k nimž existuje aspoň jeden prvek $y \in B$ takový, že $[x, y] \in \sigma$ a zároveň $[y, z] \in \varrho$. Tuto složenou relaci zapisujeme $\varrho \circ \sigma$ (**v opačném pořadí** než je obvyklé).

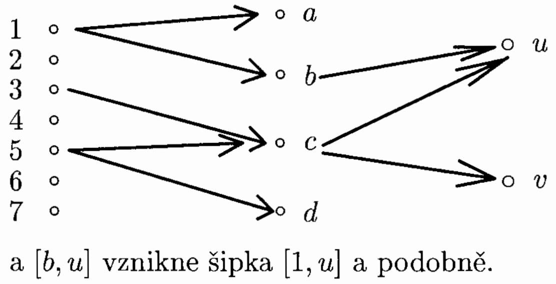
Poznámka. Při restrikci omezujeme (restringujeme) definiční obor a obor hodnot, a šipky se „naindukují“ z původní relace. Extrémní restrikce jsou na jedné straně taková, že $A_1 = A$ a $B_1 = B$ (pak vznikne přímo původní relace), na druhé straně taková, že $A_1 = \emptyset$ a $B_1 = \emptyset$ (pak vznikne prázdná relace).
Při inverzi se vymění role def. oboru a oboru hodnot a šipky se „otočí“.
Při skládání je důležité pořadí, v němž se provádí. Při této operaci se „slepí“ každá dvojice šipek, které na sebe „navazují“. Důvod užívání zápisu „pozpátku“ vysvětlíme v příští podkapitole.

Ukázky.

Pro ukázkovou relaci σ zvolme $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $B_1 = \{a, b, c\}$, $\sigma|_{A_1,B_1} = \{[1, a], [1, b], [3, c]\}$ (prohlédněte si původní obrázek!). Počet všech takových resrikcí je určen počtem podmnožin def. oboru a počtem podmnožin oboru hodnot – v našem případě je to $2^7 \cdot 2^4 = 2048$

Inverze ukázkové relace je $\sigma^{-1} = \{[a, 1], [b, 1], [c, 3], [c, 5], [d, 5]\}$.

Je-li ještě $\varrho : \{a, b, c, d\} \longrightarrow \{u, v\}$, přičemž $\varrho = \{[b, u], [c, u], [c, v]\}$, pak po „slepení“ šipek dostaneme $\varrho \circ \sigma : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \longrightarrow \{u, v\}$, kde $\varrho \circ \sigma = \{[1, u], [3, u], [3, v], [5, u], [5, v]\}$ (viz obrázek ukazující jak provést „slepování“):



Tedy „slepením“ šipek $[1, b]$ a $[b, u]$ vznikne šipka $[1, u]$ a podobně.

Upozorněme ještě, že složení $\sigma \circ \varrho$ (tj. v opačném pořadí) nelze vůbec provést.

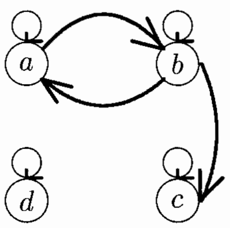
Speciálními a velmi frekventovanými jsou relace na jedné množině.

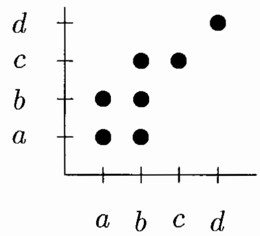
Definice (vlastnosti relací na množině). Řekneme, že relace σ je *relací na množině* A, jestliže definiční obor i obor hodnot relace σ je množina A. Relace σ na množině A je

reflexivní	právě když $\forall x \in A \ : [x,x] \in \sigma$;
symetrická	právě když $\forall x,y \in A : [x,y] \in \sigma \Rightarrow [y,x] \in \sigma$;
antisymetrická	právě když $\forall x,y \in A : [x,y] \in \sigma \wedge [y,x] \in \sigma \Rightarrow x = y$;
tranzitivní	právě když $\forall x,y,z \in A : [x,y] \in \sigma \wedge [y,z] \in \sigma \Rightarrow [x,z] \in \sigma$;
ekvivalence	právě když (σ je reflexivní) $\wedge$ (σ je symetrická) $\wedge$ (σ je tranzitivní)
částečné uspořádání	právě když (σ je reflexivní) $\wedge$(σ je antisymetrická) $\wedge$(σ je tranzitivní)

Ukázka. Pro relaci $\tau = \{[a,b],[a,a],[b,a],[b,b],[b,c],[c,c],[d,d],\}$ na $M = \{a,b,c,d\}$ prověříme reflexivitu, symetrii, tranzitivitu, a tuto relaci zobrazíme uzlovým a kartézským grafem.

Relace je reflexivní, neboť obsahuje všechny dvojice tvaru $[x,x]$. Není symetrická, neboť obsahuje dvojici $[b,c]$, ale ne dvojici $[c,b]$. Není ovšem ani antisymetrická, neboť obsahuje jak dvojici $[a,b]$, tak dvojici $[b,a]$. Relace není ani tranzitivní, neboť obsahuje dvojice $[a,b]$, $[b,c]$, ale ne dvojici $[a,c]$.





Příklady symetrických relací:

(a) Rovnoběžnost přímek: $p \parallel q \Rightarrow q \parallel p$

(b) Soudělnost celých čísel: x je soudělné s $y \Rightarrow y$ je soudělné s x

Příklady antisymetrických relací:

(a) Dělitelnost celých čísel: jestliže $y \mid x$ a zároveň $x \mid y$, pak nutně $x = y$.

(b) Neostrá nerovnost reálných čísel: jestliže $x \leq y$ a zároveň $y \leq x$, pak nutně $x = y$.

Příklady tranzitivních relací:

(a) Dělitelnost celých čísel: $\forall x,y,z \in \mathbf{Z} : x \mid y \wedge y \mid z \Rightarrow x \mid z$

(b) Shodnost a podobnost geometrických útvarů: $U_1 \cong U_2 \wedge U_2 \cong U_3 \Rightarrow U_1 \cong U_3$

Příklady ekvivalencí:

(a) Rovnoběžnost přímek v rovině

(b) Rovnost zlomků

Příklady částečných uspořádání:

(a) Dělitelnost celých čísel

(b) Inkluze mezi množinami

Řešený příkad 6.1.2. (1) Určete počet všech relací na množině $M = \{a,b,c,d\}$.

Dále uvažte na množině M následující 4 relace:

$$\sigma_1 = \{[a,a],[b,b],[c,c],[d,d],[a,b],[b,a],[c,d],[d,c]\} \qquad \sigma_2 = \{[a,b],[b,c],[c,d],[d,a]\},$$
$$\sigma_3 = \{[a,a],[b,b],[c,c],[d,d],[a,b],[a,c],[b,c]\} \qquad \sigma_4 = \{[a,b],[b,a],[c,d],[d,c]\},$$

(2) Máte zjistit, které z daných relací jsou reflexivní, symetrické, antisymetrické, tranzitivní, ekvivalence, částečné uspořádání.

(3) Máte zjistit, pro které z těchto relací platí $\sigma_i \circ \sigma_i = \sigma_i$; dále prověřte, zda $\sigma_2 \circ \sigma_3 = \sigma_3 \circ \sigma_2$.

Řešení. (1) Z dané množiny lze vytvořit tolik relací, kolik různých podmnožin kartézského součinu $M \times M$ lze vytvořit z jeho prvků (16). Počet všech podmnožin 16-ti prvkové množiny je 2^{16} (včetně prázdné množiny a množiny $M \times M$), tj. celkem 65536.

(2) Jestliže si nakreslíme uzlové grafy jednotlivých relací, snadno zjistíme, že dané relace mají podle definice tyto vlastnosti:
$\sigma_1, \sigma_3 \ldots$ reflexivní, $\sigma_1, \sigma_4 \ldots$ symetrické, $\sigma_2, \sigma_3 \ldots$ antisymetrické, $\sigma_1, \sigma_3 \ldots$ tranzitivní,
$\sigma_1 \ldots$ ekvivalence $\sigma_3 \ldots$ částečné uspořádání

(3) Pro skládání je vhodné použít techniku, kterou jsme ukázali při skládání relací σ a ϱ. Zjistíme, že platí $\sigma_1 \circ \sigma_1 = \sigma_1$, $\sigma_3 \circ \sigma_3 = \sigma_3$, a dále, že $\sigma_3 \circ \sigma_2 \neq \sigma_2 \circ \sigma_3$, neboť je $\sigma_3 \circ \sigma_2 =$
$= \{[a,b],[a,c],[b,c],[c,d],[d,a],[b,d],[d,c]\}$, ale $\sigma_2 \circ \sigma_3 = \{[a,b],[a,c],[a,d],[b,c],[b,d],[c,d],[d,a]\}$

Řešený příklad 6.1.3. Zadána relace $\sigma = \{[x,y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : 4x+y=6 \wedge 2x^2-xy+y^2=x+3\}$. Najděte její prvky a utvořme relaci k ní inverzní.

Řešení. Upravíme výrokovou formu charakterizující danou relaci:

$$(4x+y=6) \wedge (2x^2-xy+y^2=x+3) \Leftrightarrow (y=6-4x) \wedge (2x^2-xy+y^2=x+3) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (y=6-4x) \wedge [2x^2-(6-4x)x+(6-4x)^2=x+3] \Leftrightarrow (y=6-4x) \wedge (2x^2-5x+3=0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (y=6-4x) \wedge \left[(x=\tfrac{3}{2}) \vee (x=1)\right] \Leftrightarrow (y=0) \wedge (x=\tfrac{3}{2}) \vee (y=2) \wedge (x=1)$$

Dostali jsme $\sigma = \{\left[\frac{3}{2},0\right],[1,2]\}$. Z toho plyne, že $\sigma^{-1} = \{\left[0,\frac{3}{2}\right],[2,1]\}$.

ÚLOHY K ŘEŠENÍ

1. Určete počet relací z množiny $\{1,2\}$ do množiny $\{a,b\}$ a všechny je nakreslete.

2. Nakreslete všechny relace z množiny $\{1,2\}$ do množiny $\{a,b,c\}$ mající 2 prvky (tj. šipky).

3. Dáno $A=\{1,2\}$, $B=\{a,b,c\}$, a relace $\alpha : A \longrightarrow B$, $\beta : B \longrightarrow B$, $\gamma : B \longrightarrow A$, kde $\alpha = \{[1,a],[1,b],[2,c]\}$, $\beta = \{[a,a],[c,c],[a,b],[b,a]\}$, $\gamma = \{[a,1],[a,2],[b,2],[c,1]\}$.
(a) Sestavte matice sousednosti všech těchto relací a jejich relací inverzních.
(b) Která z daných relací má nejvyšší počet možných restrikcí?
(c) Pokuste se složit tyto tři relace ve všech možných pořadích (teoreticky je 6 možností).

4. Kartézským grafem znázorněte relace:
(a) $\sigma = \{[x,y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : (x=2) \wedge (1 \le y \le 4)\}$
(b) $\sigma = \{[x,y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : (-1 \le x \le 3) \wedge (y=-4)\}$
(c) $\sigma = \{[x,y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : (x=2) \wedge (\mid y \mid \ge 2)\}$
(d) $\sigma = \{[x,y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : (0 \le y \le x)\}$
(e) $\sigma = \{[x,y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : (x=y) \wedge (-1 \le y \le 4)\}$

5. Určete prvky následujících relací:
(a) $\sigma = \{[x,y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : (x^2+y^2=9) \wedge (2x-3y=12)\}$;
(b) $\sigma = \{[x,y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : (x+y^2=7) \wedge (xy^2=12)\}$;
(c) $\sigma = \{[x,y] \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} : (x^2-xy+y^2=7) \wedge (x-y=1)\}$;

6. Najděte inverzní relace k relaci
(a) $\sigma = \{[x,y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : (x+y=8) \wedge (xy=15)\}$;
(b) $\sigma = \{[x,y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : (x^2-4x+7-y=0) \wedge (x+y=7)\}$;
(c) $\sigma = \{[x,y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : \left(\frac{x-y}{8} = \frac{2}{x+y}\right) \wedge \left(\frac{2x-7}{7} = 2x-3y\right)\}$;
(d) $\sigma = \{[x,y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : (x^2+y^2=25) \wedge (x^2-y^2=7)\}$;
(e) $\sigma = \{[x,y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : (2x^2+xy=y^2+3x) \wedge (x+y=2)\}$;

7. Nakreslete uzlový graf relace $\sigma = \{[a,c],[b,e],[b,c],[c,a],[d,c],[e,a],[e,b],[e,d],[e,e]\}$ na množině $\{a,b,c,d,e\}$ a zjistěte, jaké vlastnosti má tato relace.
Dále sestavte relace σ^{-1}, $\sigma \circ \sigma$, $\sigma \circ \sigma \circ \sigma$.

8. Utvořte složené relace $\sigma_2 \circ \sigma_1$ a $\sigma_1 \circ \sigma_2$, kde $\sigma_1 = \{[x,y] \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} : (x+y=5) \wedge (x^2-y^2=5)\}$; $\sigma_2 = \{[x,y] \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} : [(x^2+y^2=2xy+4] \wedge (y=6-x)\}$

9. Graficky znázorněte relace

(a) $\sigma = \{[x,y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : y+x=11\}$

(b) $\sigma = \{[x,y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : (x \geq 0) \wedge (y-x^2=0)\}$

(c) $\sigma = \{[x,y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : x \cdot y = 18\}$

(d) $\sigma = \{[x,y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : (1 \leq x \leq 4) \wedge (3 \leq y \leq 6)\}$

(e) $M = \{-12,-11,\dots,11,12\}$; $\sigma = \{[x,y] \in M \times M : (x \mid y) \wedge (x \neq y)$

(f) $\sigma = \{[x,y] \in M \times M : x^2+y^2 \leq 8\}$

10. Zjistěte, které z daných relací jsou reflexivní, symetrické či tranzitivní:

(a) „Člověk x je otcem člověka y“

(b) „Zvíře x je potravou zvířete y“

(c) „Děj x se odehrává před dějem y“

(d) $\sigma = \{[x,y] \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} : x \mid y\}$

(e) $\sigma = \{[x,y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : (x+y)(x-y)=0\}$

(f) $\sigma = \{[x,y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : (x+2y)(2x+y)=0\}$

ÚVAHY O MOŽNOSTECH APLIKACÍ

(1) Doprava. Relací lze využít při řešení různých dopravních problémů, např. máme-li na jisté dopravní trase tvaru lomené čáry tři obce a,b,c. Jedna z nich musí ležet mezi ostatními (např. obec a leží mezi obcemi b,c). Vztah „obec leží mezi obcemi“ můžeme chápat jako relaci mezi třemi prvky (tj. ternární relaci) a značit ji $M(b,a,c)$. Tato relace má dokonce jednu zajímavou (ne příliš často se vyskytující) vlastnost. Touto vlastností je skutečnost, že připouští záměnu krajních členů vztahu, tj. jestliže platí $M(b,a,c)$, pak platí i $M(c,a,b)$.

(2) Knihovna. Setřiďování knih do katalogů, např. podle autorů či předmětového zaměření můžeme chápat jako relaci mezi množinou knih a množinou položek toho kterého katalogu. Jako relaci lze chápat i vlastnost knih v knihovně, kterou bychom mohli popsat vztahem „mít stejný formát“.

(3) Hodnocení kvality výrobků. Vztah „mít stejnou kvalitu“ je také relace.

(4) Marketing trhu. Při průzkumu vztahu vybraného vzorku zákazníků k jednotlivým druhům výrobků je výsledkem relační struktura sloužící k dalšímu rozhodování výrobce a chování prodejce na trhu.

(5) Biologie. Relace je i vztah „patřit ke stejnému rostlinnému či živočišnému druhu“, podle kterého můžeme hodnotit jednotlivé jedince či společenstva organismů.

(6) Sociologie, psychologie. Vztahy mezi lidmi (být matkou - na množině obyvatel, být kamarádem - na množině žáků atd.) lze popisovat jako relace. Speciálně při průzkumu vztahů mezi lidmi v malých kolektivech (např. na pracovišti) lze zkoumat takové vztahy jako je např. sympatie (v praxi nemusí být tento vztah ani symetrický ani tranzitivní.

(7) Geometrie. Relací je i vztah mezi orientovanými úsečkami. Dvě orientované úsečky jsou spolu v relaci, jestliže jsou stejně velké, mají stejný směr (toto je klasická definice rovnosti dvou geometrických (vázaných) vektorů).

(*) Zamyslete se sami nad tím, jaké vlastnosti uvedené relace mají. V kterých případech se jedná o relaci ekvivalence?

6.2. Zobrazení

Definice. Nechť X, Y jsou **neprázdné** množiny. Relaci $f : X \longrightarrow Y$ nazveme *zobrazením*, jestliže ke každému $x \in X$ existuje právě jedno $y \in Y$ tak, že $[x, y] \in f$. Je-li $[x, y] \in f$, pak složku x nazýváme *vzorem* a složku y *obrazem* a užíváme zápis $y = f(x)$, který čteme „y je obrazem x při zobrazení f“.
Definiční obor zobrazení f značíme též $\mathbf{D}(f)$, obor hodnot značíme $\mathbf{H}(f)$. Je-li X_1 podmnožina definičního oboru, pak jejím obrazem při f nazýváme množinu obrazů všech prvků z X_1, kterou značíme $f(X_1)$.

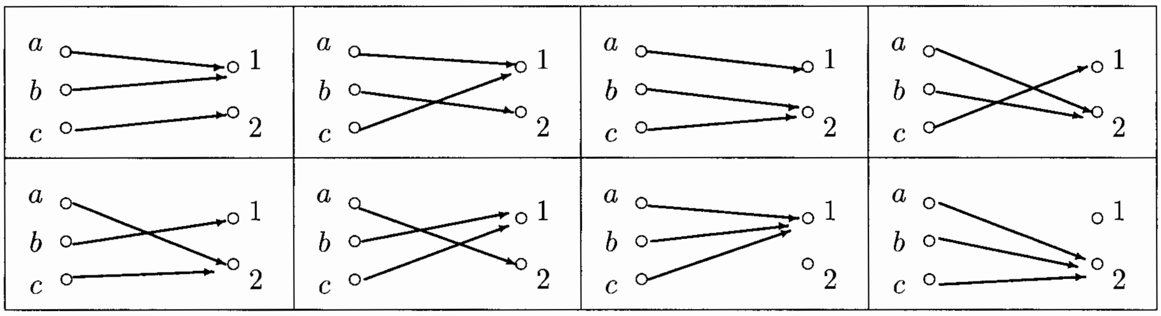
Tento pojem precizuje představu jednoznačného přiřazení – každému prvku definičního oboru je přiřazen jediný prvek oboru hodnot; přitom ovšem **různé vzory mohou mít stejné obrazy**. Jako ukázku uvažte praktickou situaci, kdy každému člověku je jednoznačně přiřazena krevní skupina.
Připomeňme, že někdy se pracuje se zobrazením i v tom smyslu, že některé prvky definičního oboru nemusejí mít obrazy. My se budeme striktně držet zde uvedené definice.

Věta (o počtu zobrazení). Jsou-li X, Y konečné neprázdné množiny, které mají p, q prvků, potom počet všech zobrazení z X do Y je q^p.

Důkaz. Zvolme pevně zadání množiny X výčtem prvků. Pak stačí libovolné zobrazení popsat výčtem obrazů těchto prvků. Potřebujeme tedy určit počet všech možných uspořádaných p-tic majících na každém místě libovolný prvek množiny Y. Jedná se tedy o kartézský součin $Y \times Y \times \ldots \times Y$ (celkem p-krát), jehož velikost je $q \cdot q \cdot \ldots \cdot q = q^p$.

Řešený příklad 6.2.1. Určete nejdříve počet všech zobrazení z množiny $X = \{a, b, c\}$ do množiny $Y = \{1, 2\}$ a pak je znázorněte graficky.

Řešení. Podle věty o počtu zobrazení je celkový počet roven $2^3 = 8$. Následující tabulka dává jejich přehled:



Řešený příklad a úvaha v důkazu věty o počtu zobrazení naznačily, že není problém s popisem zobrazení mezi konečnými množinami. Např. v právě uvedeném řešeném příkladu postačí náčrtek uzlového grafu, kde z každého prvku def. oboru musí vést **právě 1** šipka.
U nekonečného definičního oboru je ovšem třeba použít k popisu zobrazení jiných prostředků. Častý bývá tzv. *explicitní* zápis dávající přímo návod k získání obrazu, známe-li vzor. Např. předpis $f : y = x^2$ dává jasný návod jak „vyrobit“ ke každému reálnému číslu jeho obraz (druhou mocninu). Užijeme též značení $f : x \mapsto x^2$.
Při *implicitním* zápisu je zadána podmínka konfrontující vzory a obrazy. Např. podmínka $G(x, y) = 3x - 4y + 2 = 0$ je splněna pro dvojici $[10, 8]$; to znamená, že při takovém zobrazení bude obraz prvku $x = 10$ roven prvku $y = 8$.

Nyní se zaměříme na některé speciální druhy zobrazení.

Definice. Zobrazení $f : X \longrightarrow Y$ nazýváme

injekcí (*prostým zobrazením*) právě tehdy, když má tuto vlastnost: „každý prvek oboru hodnot má nejvýše jeden vzor“; v uzlovém grafu injekce vede z každého prvku definičního oboru jedna šipka a žádné dvě se „nesejdou“ ve stejném obrazu;

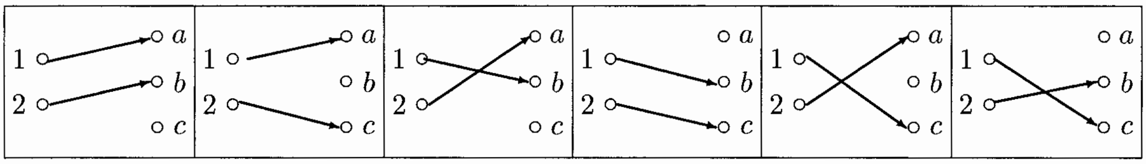
surjekcí (*zobrazením na*), jestliže splňuje tuto vlastnost: „každý prvek oboru hodnot má alespoň jeden vzor“; v uzlovém grafu surjekce vedou šipky ke všem prvkům množiny Y, tj. $f(X) = Y$;

bijekcí (*vzájemně jednoznačným zobrazením*), jestliže je zároveň injekcí a surjekcí, tj. „každý prvek def. oboru má právě jeden obraz a každý prvek oboru hodnot má právě jeden vzor“; v uzlovém grafu vzájemně jednoznačného zobrazení z každého vzoru vede právě jedna šipka a v každém obraze končí právě jedna šipka;

konstantou jestliže $f(X)$ je jednoprvková množina. V uzlovém grafu tedy všechny šipky končí ve stejném bodě.

Ukázky. Vrátíme se k prvnímu řešenému příkladu. Na obrázku jsme tam znázornili všechna zobrazení z 3-prvkové do 2-prvkové množiny. Z nich poslední dvě (vpravo dole) jsou konstanty, ostatních 6 jsou surjekce, žádná z nich není injekce ani bijekce.

Řešený příklad 6.2.2. Znázorněte všechny injekce z množiny $\{1, 2\}$ do množiny $\{a, b, c\}$.
Řešení. Všechny možnosti ukazuje následující obrázek. Jsou to vlastně všechna zobrazení (těch je $3^2 = 9$) s výjimkou 3 konstant (konstanta na a, konstanta na b, konstanta na c).



Poznámka. Jak se projeví vlastnosti zobrazení na jejich matici sousednosti? Je-li relace zobrazením, má v každém řádku právě jednu jedničku (každý vzor má jeden obraz). Injekce nemá v žádném sloupci více jedniček, surjekce musí mít v každém sloupci aspoň jednu jedničku. Bijekce má čtvercovou matici a v každém sloupci i každém řádku je právě jedna jednička.

Věta (o počtech dle typů zobrazení). Pro neprázdné množiny X, Y mající p, q prvků je

počet všech injekcí z X do Y je buď 0 (pro $p > q$), nebo je roven $\dfrac{q!}{(q-p)!}$,

počet všech surjekcí z X do Y je buď 0 (pro $p < q$), nebo je dán vzorcem

$$\binom{q}{q} \cdot q^p - \binom{q}{q-1} \cdot (q-1)^p + \binom{q}{q-2} \cdot (q-2)^p - \binom{q}{q-3} \cdot (q-3)^p + \ldots + (-1)^{q-1} \binom{q}{1} \cdot 1^p$$

počet všech bijekcí z X do Y je buď 0 (pro $p \neq q$), nebo je $p!$,

počet všech konstant z X do Y je roven q .

Řešený příklad 6.2.3. Jsou dány množiny $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Q = \{a, b, c\}$.
(a) Zjistěte počet všech zobrazení, injekcí, surjekcí, bijekcí a konstant z P do Q.
(b) Vyjádřete v %, jakou část všech zobrazení z Q do P tvoří injekce, surjekce, bijekce, konstanty.

Řešení. (a) Počet zobrazení je $3^5 = 243$, počet injekcí je 0, neboť definiční obor je větší než obor hodnot, bijekcí 0 (nestejně velký def. obor a obor hodnot), konstanty jsou 3. Nyní určíme počet surjekcí: $\binom{3}{3} \cdot 3^5 - \binom{3}{2} \cdot 2^5 + \binom{3}{1} \cdot 1^5 = 243 - 96 + 3 = 150$.

(b) Počet všech zobrazení je $5^3 = 125$, počet injekcí $\frac{5!}{(5-3)!} = 60$, surjekcí 0, bijekcí 0, konstant 5; v procentech (ze všech 125 zobrazení) je tedy 48% injekcí, 0% injekcí, 0% bijekcí, 4 % konstant.

Na závěr se věnujme specifickým vlastnostem operací se zobrazeními.

Věta (o operacích). Jsou dána zobrazení $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$. Potom platí

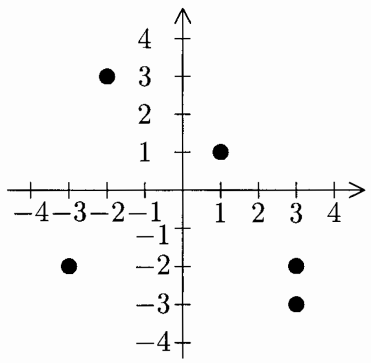
i. Každá restrikce definičního oboru zobrazení f na neprázdnou podmožinu (tj. $f|_{A_1 B}$) je opět zobrazení,

ii. Inverzní relace f^{-1} je zobrazením právě tehdy, když f je bijekce (f^{-1} je pak také bijekcí).

iii. Složená relace $g \circ f$ je také zobrazení (a to $g \circ f : A \longrightarrow C$) a platí $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Komentář. Věta má velký význam zejména pro práci s funkcemi (viz podkapitola 6.3.). Myšlenka restrikce není jen v tom, že potíže při sestavování inverzních zobrazení (musíme mít bijekci, aby inverze byla opět zobrazením) lze odstranit vhodnými restrikcemi def. oboru i oboru hodnot. Stejný problém může nastat, chceme-li pracovat jako se zobrazením s relací, která zobrazením není. Opět restrikce def. oboru a oboru hodnot může zajistit, aby každý prvek měl práve jeden obraz.
Bod (iii) hovoří o obrazu při složeném zobrazení. Chci-li aplikovat na prvek x nejdříve zobrazení f a pak g, postupuji tak, že nejdříve vytvořím obraz $f(x)$ a na něj aplikuji g – získám tedy $g(f(x))$ jako výsledný obraz. To vysvětluje zápis složeného zobrazení (i relace) „pozpátku", tj. $g \circ f$.

Řešený příklad 6.2.4. Mějme binární relaci σ danou kartézským grafem (viz obrázek). Máme zjistit, zda je tato relace zobrazením.



Řešení.
Jde o typickou situaci, kdy ani není jasno jaký je def. obor zadané relace σ. Pokud bychom s ní chtěli pracovat jako se zobrazením, musíme především vymezit def. obor – první restrikce je na množinu $\{-3, -2, 1, 3\}$. Takto vymezená relace však není zobrazením, protože obsahuje dvě uspořádané dvojice $[3, -2], [3, -3]$, které mají stejné první složky (tj. jeden vzor má dva různé obrazy), a to odporuje definici zobrazení. Jednou z možností je vyloučení prvku -3 z oboru hodnot. Nyní lze mluvit o relaci $\sigma : \{-3, -2, 1, 3\} \to \{-2, 1, 3\}$ jako o zobrazení. Jsou ovšem možné i další restrikce vedoucí na zobrazení (např. další restrikce def. oboru atd.).

Řešený příklad 6.2.5. Jsou dána dvě zobrazení čísel $f_1 : x \mapsto 2x - 3, f_2 : x \mapsto 2 - 3x$.
Proveďte jejich (a) inverzi, (b) složení.

Řešení. Vzhledem k tomu, že předpisy fungují pro všechna reálná čísla, budeme za def. obor i obor hodnot považovat v této úloze vždy $\mathbf{R}$.

(a) Jedná se o bijekce; u první z nich lze předpis napsat ve tvaru $y = 2x - 3$, který chápeme jako rovnici vyjadřující vztah mezi vzorem x a obrazem y. Po inverzi se pouze změní role vzoru a obrazu, vztah se zachová. Stačí tedy zaměnit symboly x a y a máme $x = 2y - 3$ čili $y = \frac{x+3}{2}$. Předpis pro f_1^{-1} je tedy $x \mapsto \frac{x+3}{2}$.
U druhé máme analogicky $y = 2 - 3x$, pro inverzi zaměníme symboly x a y a máme $x = 2 - 3y$ čili $y = \frac{2-x}{3}$. Předpis pro f_2^{-1} je tedy $x \mapsto \frac{2-x}{3}$

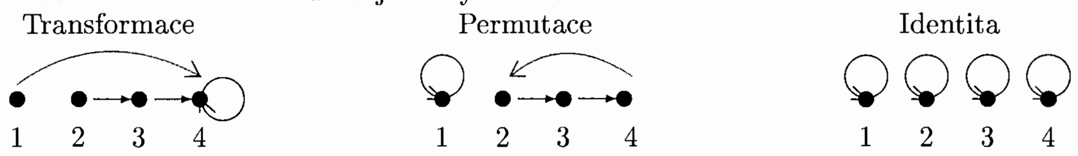
(b) Protože při složení záleží na pořadí, je třeba uvažovat 2 možnosti.

(b1) složené zobrazení $f_2 \circ f_1$: užijeme zápisy $f_1(x) = 2x - 3$, $f_2(u) = 2 - 3u$ a pak je $f_2 \circ f_1(x) = f_2(f_1(x)) = f_2(2x - 3) = 2 - 3(2x - 3) = 11 - 6x$; při tomto složení máme $x \mapsto 11 - 6x$.

(b2) složené zobrazení $f_1 \circ f_2$: užijeme zápisy $f_1(t) = 2t - 3$, $f_2(x) = 2 - 3x$ a pak je $f_1 \circ f_2(x) = f_1(f_2(x)) = f_1(2 - 3x) = 2(2 - 3x) - 3 = 1 - 6x$; při tomto složení máme $x \mapsto 1 - 6x$.

Poznámka. Další používané pojmy jsou: *transformace* množiny X je libovolné zobrazení z X do X; *permutace* na množině X je libovolná bijekce z X do X.
Identita na množině X je permutace zadaná předpisem $i(x) = x$ pro každý prvek $x \in X$. Identita hraje roli „jednotky" při skládání, tj. pokud lze provést naznačená skládání, pak pro libovolná zobrazení f, g (dokonce pro libovolné relace) je $f \circ i = f, \; i \circ g = g$.
Dále pro každou bijekci b platí $b \circ b^{-1} = i, \; b^{-1} \circ b = i$.

Ukázky: Mějme množinu $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Potom počet transformací na M je $4^4 = 256$, permutací $4! = 24$. Do obrázku jsme vybrali také identitu.



ÚLOHY K ŘEŠENÍ

1. Jaká je naděje, že náhodně vybraná relace z 3-prvkové do 2-prvkové množiny je zobrazení?

2. Může být f^{-1} zobrazením pro $f = \{[1,3], [3,6], [7,12], [-3,8], [9,5], [-7,11]\}$?

3 X má 2 prvky a Y má 4 prvky. Kolik je injekcí z X do Y a kolik je surjekcí z Y do X?

4. Jsou dány množiny C (5 prvků), D (2 prvky). Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybrané zobrazení z C do D je (a) injekce, (b) surjekce, (c) bijekce, (d) konstanta?

5. Nakreslete všechny bijekce z $\{1, 2, 3\}$ do $\{a, b, c\}$.

6. Je dána binární relace $f = \{[x, y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : (2x + 3|y| = 13) \wedge (3x - y = 3)\}$. Zjistěte, zda jsou relace f, f^{-1} zobrazení.

7. Najděte inverzní zobrazení k zobrazením

(a) $f_1 : y = 3x + 5$ (b) $f_2 : y = \frac{1-x}{2}$ (c) $f_3 : y = \frac{1}{x}$

(d) $f_4 : y = \frac{x+4}{2-x}$ (e) $f_5 : y = 1 + \frac{1}{x}$ (f) $f_6 : y = \sqrt{x}$

8. Složte daná zobrazení v obou pořadích

(a) $f : y = 3x - 1, \; g : y = 4 - 5x$ (b) $f : y = x + 2, \; g : y = \frac{1}{x}$

(c) $f : y = \frac{x}{4}, \; g : y = \sqrt{x}$ (d)$f : y = 1 + \frac{4}{x}, \; g : y = 2\sqrt{x}$

9. Zjistěte, která z následujících zobrazení jsou prostá:

(a) $f_1 : y = x^3, \; x \in \mathbf{R}$ (b) $f_2 : y = 2^x, \; x \in \mathbf{R}$

(c) $f_3 : y = \frac{1-x}{1+x}, \; x \in \mathbf{R} - \{1\}$ (d) $f_4 : y = \frac{3x+7}{2}, \; x \in \mathbf{R}$

(e) $f_5 : y = \sin x, \; x \in \mathbf{R}$ (f) $f_6 : y = \frac{1}{x^2}, \; x \in \mathbf{R} - \{0\}$

ÚVAHY O MOŽNOSTECH APLIKACÍ

(1) Evidence obyvatel. Úředníci na matrikách ve svých databázích přiřazují každému obyvateli datum narození, místo bydliště, stupeň vzdělání a další. Pracují tedy s jistými zobrazeními.
(2) Kulečník. Hráči kulečníku využívají při hře známého poznatku o úhlu dopadu rovnajícímu se úhlu odrazu, což není nic jiného než osová souměrnost (druh geometrického zobrazení).
(3) Kartografie, geodézie. Mnoha speciálních druhů zobrazení užívají kartografové při tvorbě všech možných typů map (topografické, katastrální, tematické atd.). Všechna tato zobrazení různými způsoby převádějí (zobrazují) objekty na zemském povrchu do rovinné průmětny.
(4) Šifrování zpráv. Při předávání zpráv, jejichž obsah má být utajen, používáme různých způsobů šifrování. Snad nejznámějším způsobem je Morseova abeceda. Často jsou jednotlivá písmena zprávy nahrazována např. čísly podle kódu (tabulky), který zná jen příjemce a odesilatel zprávy. Protože každé písmenko má svou šifru, jde o zobrazení.

* Pokuste se vymyslet ještě další příklady využití zobrazení v praktickém životě. Která z těchto zobrazení jsou prostá, surjekce, bijekce?

6.3. Reálná funkce jedné proměnné

Definice. Zobrazení f nazveme *reálnou funkcí*, jestliže obor hodnot $\mathbf{H}(f) \subset \mathbf{R}$. Reálná funkce $f : A \to \mathbf{R}$ je tedy zvláštní typ zobrazení libovolné množiny A do $\mathbf{R}$. Namísto termínu reálná funkce obvykle používáme pouze termín funkce – přitom nejfrekventovanější funkce mají též $\mathbf{D}(f) \subset \mathbf{R}$. Při takovém přiřazení mezi čísly tvaru $f : x \mapsto y$ hovoříme o x jako o *nezávisle proměnné veličině* a o y jako o *závisle proměnné veličině.*

Funkce je většinou dána funkčním vztahem (výrazem či vzorcem pro výpočet hodnot závisle proměnné). Může být však zadána i jiným způsobem, např. číselnou tabulkou nebo grafem. Nejčastější je však vyjádření rovnicí (analyticky) ve tvaru $y = f(x)$, tj. *explicitně*, nebo ve tvaru $F(x, y) = 0$, tj. *implicitně*.

Definice. Jsou dány funkce f_1, f_2 s definičními obory A_1, A_2 a nechť pro neprázdnou množinu A platí $A \subseteq A_1 \cap A_2$ Potom můžeme definovat následující *funkční operace*:

i. řekneme, že *funkce f_1, f_2 jsou si rovny na množině A*, jestliže $\forall x \in A : f_1(x) = f_2(x)$.
ii. *součet (resp. rozdíl) funkcí* $f_1 \pm f_2$ definujeme předpisem $\forall x \in A : (f_1 \pm f_2)(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$;
iii. *součin funkcí* f_1, f_2 definujeme předpisem $\forall x \in A : (f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$;
iv. *podíl funkcí* f_1, f_2 definujeme předpisem $\forall x \in A : f_2(x) \neq 0 \Rightarrow (\frac{f_1}{f_2})(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$;
v. *c-násobek funkce* f_1 definujeme předpisem $\forall x \in A_1 : (c \cdot f_1)(x) = c \cdot f_1(x)$;
vi. *absolutní hodnotu funkce* f_1 definujeme předpisem $\forall x \in A_1 : (|f_1|)(x) = |f_1(x)|$.

Další operace s funkcemi jsou odvozeny od toho, že funkce jsou zobrazení. Tedy funkce je možno restringovat, invertovat a skládat.

Definice. *Grafem funkce* f s definičním oborem $\mathbf{D}(f) = A \subset \mathbf{R}$ nazveme množinu **všech** bodů v rovině s kartézskou soustavou souřadnic (O, x, y), které mají tvar $[x, f(x)]$, kde $x \in A$.

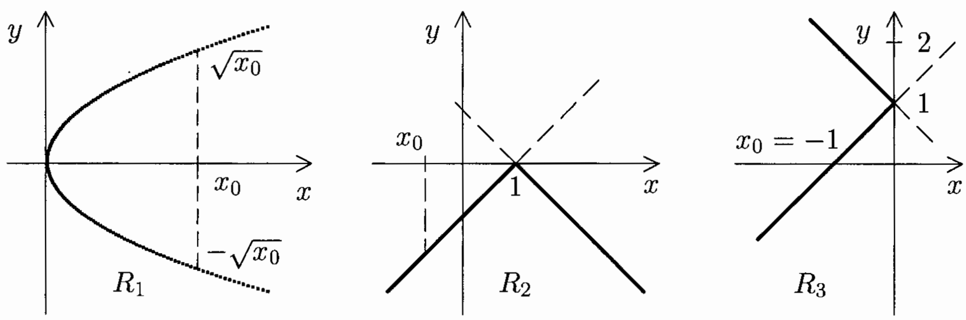
Řešený příklad 6.3.1. Máte zjistit, zda jsou dané relace funkcemi:

(a) $R_1 = \{[x, y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : y^2 = x\}$;

(b) $R_2 = \{[x, y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : |x - 1| + y = 0\}$;

(c) $R_3 = \{[x, y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : |y - 1| + x = 0\}$.

Řešení. Načrtneme si grafy jednotlivých relací (viz obrázek).



(a) Z grafu zobrazení R_1 vidíme, že pro $x_0 > 0$ existují vždy dvě různá čísla $y_1 = \sqrt{x_0}$, $y_2 = -\sqrt{x_0}$, pro která platí $[x_0, \sqrt{x_0}] \in R_1$, $[x_0, -\sqrt{x_0}] \in R_1$. Proto relace R_1 není funkcí.

(b) Pro $x_0 \in (-\infty, \infty)$ existuje vždy právě jedno číslo y_0, pro které platí $[x_0, y_0] \in R_2$. Relace R_2 je tedy funkcí.

(c) Pro $x_0 < 0$ existují vždy dvě čísla y_1, y_2, pro která platí $[x_0, y_1] \in R_3$, $[x_0, y_2] \in R_3$. Relace R_3 tedy není funkcí.

Řešený příklad 6.3.2. Určete definiční obory následujících funkcí:

(a) $f_1 : y = \dfrac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{5-x}}$ (b) $f_2 : y = \sqrt{|x|-1}$ (c) $f_3 : y = \dfrac{x}{x^2-3x+2}$

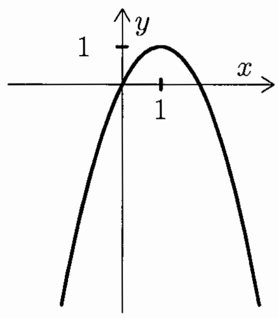
Řešení.
(a) $x \in \mathbf{D}(f_1) \Leftrightarrow (x-5 \geq 0 \wedge 5-x > 0)$. $N_1 = \{x \in \mathbf{R} : x-5 \geq 0\}$; $N_2 = \{x \in \mathbf{R} : 5-x > 0\}$.
$\mathbf{D}(f_1) = N_1 \cap N_2 = \emptyset$.

(b) $x \in \mathbf{D}(f_2) \quad \Leftrightarrow \quad (|x|-1) \geq 0) \quad \Leftrightarrow \quad [x \geq 0 \ \wedge \ x-1 \geq 0] \vee [x \leq 0 \ \wedge \ -x-1 \geq 0]$
$\mathbf{D}(f_2) = (-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty)$.

(c) $x \in \mathbf{D}(f_3) \Leftrightarrow x^2-3x+2 \neq 0$. $\mathbf{D}(f_3) = \mathbf{R} - \{1, 2\}$.

Řešený příklad 6.3.3. Určete inverzní funkci k funkci $f : y = 2x - x^2$.

Řešení. Definičním oborem dané funkce je interval $(-\infty, \infty)$. Upravíme-li funkční vztah na tvar $y = 2x - x^2 = 1 - 1 + 2x - x^2 = 1 - (x-1)^2$, vidíme, že daná funkce není prostá. Stejné funkční hodnoty jako v nějakém bodě x_0 nabývá také v bodě $2 - x_0$. Můžeme však provést restrikci této funkce na dva intervaly $(-\infty, 1\rangle$ a $\langle 1, +\infty)$.
Potom v každém z těchto intervalů bude daná funkce již prostá a najdeme k ní v těchto intervalech tedy funkci inverzní. Z funkčního vztahu plyne, že oborem hodnot funkce f je interval $(-\infty, 1\rangle$. Vyjádříme z něj tedy $x = 1 + \sqrt{1-y}, x \geq 1$, zaměníme proměnné x a y a dostáváme inverzní funkci $f_1^{-1} : y = 1 - \sqrt{1-x}$ s definičním oborem $(-\infty, 1\rangle$.
Na intervalu $\langle 1, +\infty)$ je hledanou inverzní funkcí k původní funkci f funkce $f_2^{-1} : y = 1 + \sqrt{1-x}$ (získá se analogickým postupem).



Definice. Je dána reálná funkce f a množina M taková, že $M \subset \mathbf{D}(f) \subset \mathbf{R}$. Řekneme, že

1. *funkce f je rostoucí v množině M*, jestliže $\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;
2. *funkce f je klesající v množině M*, jestliže $\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$;
3. *funkce f je nerostoucí v množině M*, jestliže $\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$;
4. *funkce f je neklesající v množině M*, jestliže $\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

Všechny tyto druhy funkcí nazýváme souhrnně *monotónní*; funkce rostoucí nebo klesající nazýváme *ryze monotónní*.

Jako příklad na monotonii lze použít funkci f z řešeného příkl. 6.3.3. (viz též příslušný obrázek). Tato funkce je rostoucí na intervalu $(-\infty, 1\rangle$ a je klesající na intervalu $\langle 1, +\infty)$.

Definice. Je dána reálná funkce f a množina M taková, že $M \subset \mathbf{D}(f) \subset \mathbf{R}$. Řekneme, že

1. *funkce f je sudá v množině M*, jestliže $\forall x \in M : -x \in M \wedge f(-x) = f(x)$;
2. *funkce f je lichá v množině M*, jestliže $\forall x \in M : -x \in M \wedge f(-x) = -f(x)$;
3. *funkce f je periodická v množině M*, jestliže existuje číslo p takové, že $p \neq 0 \wedge \forall x \in M : x + p \in M \wedge f(x+p) = f(x)$ (nutně $f(x+kp) = f(x), k \in \mathbf{Z}$).
   Nejmenší $p > 0, p \in \mathbf{R}$ splňující tento vztah nazýváme *primitivní perioda funkce*, každé číslo p vyhovující tomuto vztahu nazýváme *perioda funkce*.
   Známými periodickými funkcemi jsou goniometrické funkce.

Řešený příklad 6.3.4. Určete, zda je funkce $g : y = 3x^2$ sudá nebo lichá.

Řešení. Abychom vyšetřili, zda je funkce g sudá či lichá, musíme zjistit vztah mezi hodnotami $g(x)$ a $g(-x)$: $g(x) = 3x^2 + 1$, $g(-x) = 3(-x)^2 + 1 = 3x^2 + 1$ (platí pro lib. $x \in \mathbf{R}$.
Z toho plyne $g(x) = g(-x)$, tedy funkce g je sudá.

Základní funkce

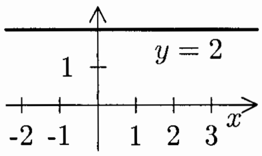
Připomeňme si vybrané, často používané a důležité funkce.

Je dána libovolná množina $X \neq \emptyset$.

Konstantní funkce. Pro $r \in \mathbf{R}$ je konstanta $k_r : X \to \mathbf{R}$ dána předpisem $\forall x \in X : k_r(x) = r$.

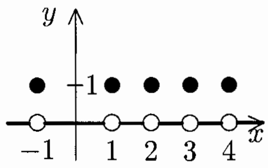
Charakteristická funkce. Pro každou podmnožinu $M \subset X$ definujeme její charakteristickou funkci $\mathrm{ch}_M : X \to \mathbf{R}$ předpisem: $\mathrm{ch}_M(x) = 1$ pro $x \in M$, $\mathrm{ch}_M(x) = 0$ pro ostatní x (v cizojazyčné literatuře $\chi_M(x)$, kde χ je řecké písmeno „chí“).

Ukázky:



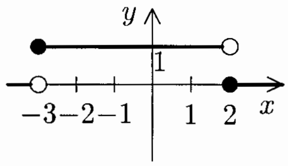
konst. funkce $k : y = 2$

$M_1 = \{-1, 1, 2, 3, 4\}$



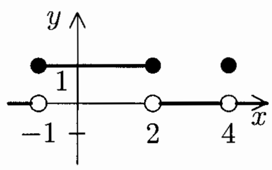
char. funkce množiny M_1

$M_2 = \langle -3, 2)$

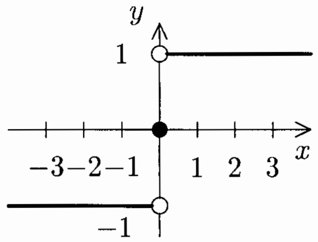


char. funkce množiny M_2

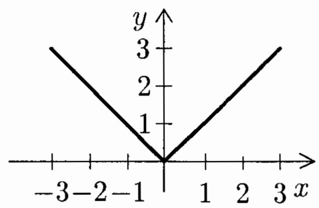
$M_3 = \langle -1, 2\rangle \cup \{4\}$



char. funkce množiny M_3



graf funkce signum



graf funkce $y = |x|$

Lineární funkce. Pro každá dvě reálná čísla k, q definujeme lineární funkci $y = k \cdot x + q$. Grafem lineární funkce je přímka. Číslo k nazýváme *směrnice přímky* a platí pro něj $k = \operatorname{tg} u$, kde u je orientovaný úhel, jehož prvním ramenem je kladně orientovaná osa „x“ a druhým graf dané lineární funkce.

Absolutní hodnota. Funkce udávající vzdálenost daného čísla na číselné ose od počátku, definovaná:

$$y = |x| = \begin{cases} x \text{ je-li } x \geq 0 \\ -x \text{ je-li } x < 0 \end{cases}$$

Signum. Funkce signum je definována tímto způsobem (viz obrázek výše):

$$y = \begin{cases} -1 & \text{pro } x < 0 \\ 1 & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

Polynomická funkce (polynom stupně n) daná předpisem $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Zvláštním případem polynomické funkce jsou i funkce kvadratické, lineární a konstantní.

Poznámka: Polynomické funkce (polynomy) mají jednu velice důležitou vlastnost; platí: „Každý mnohočlen n-tého stupně (pro $n > 0$) má nejvýše n různých kořenů“. Z této věty plyne, že graf polynomické funkce může protnout osu „x“ maximálně v n bodech.

Racionální funkce. Pojem racionální funkce chápeme jako funkci ve tvaru $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, kde f, g jsou libovoné polynomy. Zvláštním případem racionální funkce je *lineární lomená funkce* (podíl dvou lineárních funkcí, neboli polynomů 1. stupně)

Elementární funkce

Do skupiny tzv. *elementárních funkcí* řadíme konstantu, obecnou mocninu, exponenciální funkci, logaritmus, goniometrické funkce, cyklometrické funkce a hyperbolické funkce. Dále pak i funkce, které lze z výše jmenovaných odvodit pomocí základních operací (sčítání, odčítání, násobení a dělení funkcí) a skládáním funkcí.

Obecná mocnina je dána předpisem $y = x^a, a \neq 0, a \in \mathbf{R}$.

Exponenciální funkce. Funkce daná vztahem $y = a^x, a > 0, a \neq 1$ (exponenciála). Zvláštní postavení má exponenciála se základem e ($y = \mathrm{e}^x$, kde $\mathrm{e} \doteq 2.71\ldots$ je tzv. *Eulerovo číslo*).

Logaritmická funkce $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$ je funkce inverzní k funkci exponenciální. Zvláštní postavení má *přirozený logaritmus* $y = \log_e x = \ln x$ (inverzní funkce k $y = \mathrm{e}^x$).

Goniometrické funkce. Známé funkce $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{cotg} x$, které souhrnně nazýváme funkcemi goniometrickými. Jsou to funkce periodické.

Cyklometrické funkce. Restrikcí goniometrických funkcí na vhodné intervaly dosáhneme toho, že je možno k nim najít funkce inverzní. Jsou to funkce $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arccotg} x$.

	def. obor	obor hodnot
$y = \arcsin x$	$\langle -1, 1\rangle$	$\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$
$y = \arccos x$	$\langle -1, 1\rangle$	$\langle 0, \pi\rangle$
$y = \operatorname{arctg} x$	$(-\infty, \infty)$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$y = \operatorname{arccotg} x$	$(-\infty, \infty)$	$(0, \pi)$

Hyperbolické funkce. Hyperbolickými funkcemi nazýváme funkce $\sinh x, \cosh x, \operatorname{tgh} x, \operatorname{cotgh} x$ (čteme hyperbolický sinus, kosinus,...). Jsou definovány následujícím způsobem:

Hyperbolický sinus $\sinh x = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}, x \in (-\infty, \infty)$	Hyperbolický kosinus $\cosh x = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}, x \in (-\infty, \infty)$
Hyperbolický tangens $\operatorname{tgh} x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}, x \in (-\infty, \infty)$	Hyperbolický kotangens $\operatorname{cotgh} x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}, x \neq 0$

ÚLOHY K ŘEŠENÍ

1. Určete definiční obor funkcí:

(a) $f_1 : y = \frac{x^4}{1+x}$ (b) $f_2 : y = \sqrt{4x - x^3}$ (c) $f_3 : y = (x-3)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

(d) $f_4 : y = \log(x^2 - 9)$ (e) $f_5 : y = \sqrt{\cos\sqrt{x}}$ (f) $f_6 : y = \frac{1-\cos x}{tgx}$

2. Určete definiční obory funkcí:

(a) $f_1 : y = \sqrt{5x - x^3}$ (b) $f_2 : y = \sqrt{7+x} + \sqrt{-x}$ (c) $f_3 : y = (x-3)\sqrt{\frac{3x-1}{3x+1}}$

(d) $f_4 : y = \log(x^2 - 5x + 6)$ (e) $f_5 : y = \log(x+4) - \log(x-4)$ (f)$f_6 : y = \ln\sqrt{x^4 - 4x^2}$

(g) $f_7 : y = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$ (h) $f_8 : y = \sqrt{\sin x^2}$ (i) $f_9 : y = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$

(j) $f_{10} : y = \arcsin\frac{2x}{1+x}$ (k) $f_{11} : y = \log(\cos x)$ (l) $f_{12} : y = \sqrt{\sin x \cos x}$

3. Složte tři funkce $g_1 : y = \ln x$, $g_2 : y = \sqrt{1-x^2}$, $g_3 : y = \cos x$ (všech 6 možností dle pořadí!).

4. Určete sudost a lichost funkcí: $f_1 : x^3,\ f_2 : y = |x|,\ f_3 : y = x^2 + 1,\ f_4 : y = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$.

5. Najděte funkce $g \circ h, h \circ g$, jestliže $h : y = x^2, g : y = 3^x$.

6. Rozhodněte, zda jsou dané funkce periodické:

(a) $h_1 : y = \sin x + \sin \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{3}$ (b) $h_2 : y = \sin x + \sin(x\sqrt{x})$

(c) $h_3 : y = \mathrm{tg}\frac{1}{x}$ (d) $h_4 : y = |\sin x| - |\cos x|$

7. Najděte inverzní funkci f^{-1} k funkci f a její definiční obor

(a) $f_1 : y = 3x + 19, x \in (-\infty, +\infty)$ (b) $f_2 : y = x^2, x \in (-\infty, 0\rangle$

(c) $f_3 : y = x^2 + 1.5, x \in \langle 0, +\infty)$ (d)$f_4 : y = \log_x 2$

(e) $f_5 : y = \sqrt{x-9}$ (f) $f_6 : y = \frac{3}{x+3}$

(g) $f_7 : y = \sqrt{25 - x^2}$ (h) $f_8 : y = \ln(x+3)$

8. Načrtněte grafy funkcí:

(a) $y = 2 \cdot \mathrm{ch}_{\langle 0,1\rangle}(x)$ (b) $y = \mathrm{ch}_{\langle 0,1\rangle}(x) - 2$

(c) $y = 2 \cdot \mathrm{ch}_{(0,1\rangle}(x) - 1$ (d) $y = \mathrm{ch}_{\langle 0,3\rangle}(x) + \mathrm{ch}_{(2,4\rangle}(x)$

(e) $y = \mathrm{ch}_{\langle -2,1)}(x) - 3 \cdot \mathrm{ch}_{(0,3\rangle}(x)$ (f) $y = -5 \cdot \mathrm{ch}_{(0,1)}(x) + 2 \cdot \mathrm{ch}_{\langle 0.5,2\rangle}(x)$

(g) $y = \mathrm{ch}_{\langle 1,10\rangle}(x) - 5 \cdot \mathrm{ch}_{(2,5)}(x)$ (h) $y = -8 \cdot \mathrm{ch}_{\langle -5,4)}(x) + 6 \cdot \mathrm{ch}_{\langle 1,4.5\rangle}(x)$

(i) $y = 11 \cdot \mathrm{ch}_{(-1,1)}(x) + 12 \cdot \mathrm{ch}_{(0,3)}(x)$ (j) $y = \mathrm{ch}_{\langle 1,7\rangle}(x) + 3.5 \cdot \mathrm{ch}_{(5,8)}(x)$

(k) $y = -4 \cdot \mathrm{ch}_{\langle -7,-5\rangle}(x) + -3 \cdot \mathrm{ch}_{\langle -4,-1\rangle}(x)$ (l) $y = -2 \cdot \mathrm{ch}_{(-5,5)}(x) + 3 \cdot \mathrm{ch}_{\{1,3,5,7\}}(x)$

(m) $y = -11 \cdot \mathrm{ch}_{(-1,4\rangle}(x) + 11 \cdot \mathrm{ch}_{(-2,2)}(x)$ (n) $y =| x - 3 | +1$

(o) $y = 3\cdot \mid x + 4 \mid +2\cdot \mid x \mid$ (p) $y = - \mid \frac{x}{2} + 1 \mid -4\cdot \mid x + 1.5 \mid$

(q) $y =| x^2 - 4x + 5 |$ (r) $y =| \ln(3 + x) |$

(s) $y =| \sin \frac{x}{2} |$ (t) $y = -3 \cdot \mathrm{sign}(x)$

(u) $y = -\mathrm{sign}(x) + \mathrm{ch}_{(1,2)}(x)$ (v) $y = -2 \cdot \mathrm{sign}(x) - 3 \cdot \mathrm{ch}_{\{-1,3,5\}}(x)$

ÚVAHY O APLIKACÍCH

(1) Geometrie. Vzorečky pro výpočet obsahů obrazců či objemů těles nejsou v podstatě nic jiného než předpisy jistých funnkcí.

(2) Oceánografie. Například tzv. Knudsenova rovnice pro výpočet salinity (celkové míry slanosti mořské vody): $S = 0.03 + 1.805C$, kde závisle proměnnou je salinita S (v%) a nezávisle proměnnou je chlorinita (vyjadřuje procentuálně množství stříbra potřebného k vysrážení halogenů obsažených v 0.3285234 kg mořské vody). Vzorec ukazuje, že v mořské vodě je obsah všech rozpuštěných solí ve funkčním lineárním vztahu s obsahem halogenů (Netopil a kol., 1984).

(3) Finanční matematika. Vzorec k výpočtu konečné hodnoty vkladu (při jednoduchém úročení) $y = P(1 + \frac{r}{100} \cdot x)$ je typickou ukázkou. Velikost vkladu s počáteční hodnotou P a úrokovou mírou r% p. a. závisí na době jeho trvání x (v letech). Tento vztah je tedy popsán lineární funkcí. Podobně u složeného úročení je využita mocninná funkce.

(4) Difúze. Difúze je samovolně probíhající a jednosměrný převod rozpuštěné látky z místa její vyšší koncentrace do místa s nižší koncentrací. Rozložení koncentrace látky v závislosti na délce difúzní dráhy popisuje tzv. Fickův zákon II. Podle tohoto zákona mj. koncentrace látky klesne z původní hodnoty na 37% za čas $t = \frac{x^2}{4D}$, kde D tzv. difúzní koeficient (konstanta). Tento vztah ukazuje, že doba difúze stoupá se čtvercem vzdálenosti, kterou má částice urazit. Jde tedy o kvadratickou funkci.

(5) Fyzika. Jako jeden z mnoha příkladů si můžeme uvést vzorec pro výpočet tíhy, neboli síly, která přitahuje tělesa k Zemi: $G = m \cdot g$, kde m je hmotnost tělesa a g je tíhové zrychlení ($g \doteq 9.81 m/s^2$). Tíha je tedy úměrná hmotnosti tělesa.

(6) Převody jednotek. Uveďme si různé jednotky používáné k měření teploty:

a. Jednotkou termodynamické teploty je *kelvin* (K). Je to 273.15-tá část termodynamické teploty trojného bodu varu vody.

b. Vedlejší jednotkou je *stupeň Celsia* (^0C), který je v praxi používán mnohem častěji. Na Celsiově stupnici odpovídá bod tání ledu 0^0C a bod varu vody teplotě 100^0C. Na Kelvinově stupnici jsou všechny hodnoty teploty kladné, protože nultým stupněm ($0K$) je teoreticky nejnižší možná teplota. Bod tání ledu (0^0C) odpovídá $273.15K$ a bod varu $373.15K$. Pro převod obou stupnic platí: $K = C + 273.15$, $C = K - 273.15$.

c. Nám poměrně málo známou mírou je *Fahrenheitova teploměrná stupnice*, používaná převážně v anglosaských zemích. Bod tání ledu je dán teplotou 32^0F a bod varu 212^0F. Pro převod na Celsiovu stupnici (a opačně pomocí funkce inverzní) platí: $F = \frac{9 \cdot C}{5} + 32$, $C = \frac{5 \cdot (F-32)}{9}$.

(*) Pokuste se vymyslet další aplikace funkcí z jiných oborů lidské činnosti. Jaké vlastnosti dané funkce mají?

KREATIVNÍ ÚLOHY KE KAPITOLE 6

1. Vezměme několik příbuzenských vztahů, neboli binárních relací na množině všech lidí:

σ_1: „x je otcem y“; σ_2: „x je matkou y“; σ_3: „x je rodičem y“;
σ_4: „x je bratrem y“; σ_5: „x je sestrou y“. Máme vyjádřit slovy příbuzenské vztahy, které představují relace $\sigma_5 \circ \sigma_2$, $\sigma_3 \circ \sigma_3$, $\sigma_1 \circ \sigma_2$, $\sigma_4 \circ \sigma_3$, $\sigma_4 \circ \sigma_2$.

2. Najděte příklady relací, pro které platí $\sigma = \sigma^{-1}$. Jakou vlastnost má každá z těchto relací?

3. Najděte nějaký interval, který se zobrazuje vzájemně jednoznačně na jiný interval, jestliže je dáno zobrazení $f : y = x + 1$.

4. Je dána množina všech přirozených čísel $\mathbf{N}$, množina všech lichých přirozných čísel N_1 a množina všech sudých přirozených čísel N_2. Uveďte příklad navzájem jednoznačného zobrazení mezi množinami $\mathbf{N}$ a N_1; mezi množinami $\mathbf{N}$ a N_2.

5. Je dán pravidelný šestiúhelník. M označme množinu všech jeho vrcholů. Uveďte příklady: a) permutací v M; b) injekcí v M, které nejsou permutace; c)zobrazení v M, která nejsou prostá.

6. Je dána kružnice k a bod A ležící vně této kružnice. Na kružnici k je definována relace σ takto: $[X, Y] \in \sigma \Leftrightarrow X \neq Y \wedge A \in \leftrightarrow XY$ (tj. když bod A leží na přímce určené body X, Y). Rozhodněte, zda relace σ je permutace v množině všech bodů kružnice k.

7. Najděte polynomickou funkci $p : y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, jestliže platí $f(-1) = 0, f(0) = 2, f(1) = -3, f(2) = 5$.

8. Určete množinu všech funkcí k, pro které platí $k : y = \frac{2}{x-a}$, $a \in \mathbf{R}$ a pro každé $x \in \langle 1, 2 \rangle$ je $h(x) \in \langle \frac{1}{10}, 1 \rangle$.

9. Je dáno $s > 0, s \in \mathbf{R}$. Uvažujte množinu všech kruhů ležících v rovině. Zjistěte poloměry těch, které mají kruhový výsek s obvodem s o největším obsahu.

10. Pan Novák chce cestovat vlakem z Prahy do Českých Budějovic (155 km). Po příchodu na nádraží zjistí, že za 15 minut odjíždí osobní vlak, jedoucí průměrnou rychlostí 40 km/hod a za 2 hodiny odjíždí rychlík, který pojede průměrnou rychlostí 90 km/hod. Kterým vlakem má cestovat, jestliže chce přijet do Českých Budějovic co nejdříve? Zjistěte, pro jaké vzdálenosti od Prahy je výhodnější použít osobní vlak, pro jaké rychlík a u kterých nezáleží na volbě druhu vlaku.

KONTROLNÍ OTÁZKY KE KAPITOLE 6

1. Nechť A, B jsou dvě množiny. Potom je počet všech relací z A do B roven počtu všech relací z B do A. Proč?

2 Při transfúzi krve nelze libovolně mísit krevní skupiny. Označíme $K = A, B, AB, 0$ množinu základních čtyřech krevních skupin. Znázorněte jako relaci $r : K \longrightarrow K$, které krevní skupiny lze mísit pomocí dvojic tvaru [dárce, příjemce].

3. Jak poznáte na matici sousednosti nějaké relace, že se nejedná o zobrazení?

4. Nechť $\varrho : A \longrightarrow B$ je relace. Vysvětlete, kdy je možno složit $\varrho \circ \varrho$ a kdy $\varrho^{-1} \circ \varrho$.

5. M je množina všech čtvercových matic druhého řádu a nechť *det* : $M \longrightarrow \mathbf{R}$ přiřazuje každé takové matici její determinant. Vysvětlete, proč je toto zobrazení surjekcí a není injekcí.

6. Je-li $f : x \mapsto x^3$, pak jeho inverzní zobrazení definuje třetí odmocninu, tj. $f^{-1} : y = \sqrt[3]{x}$. V čem je toto zavedení podobné a v čem se liší od zavedení druhé odmocniny?

7. Co jsou to tzv. „elementární funkce“?

8. Najděte aspoň dvě funkce, u nichž je vzorec pro výpočet inverzní funkce totožný se vzorcem původní funkce.

9. Je dána funkce $s : y = \mathrm{sign}(x)$. Čemu je rovna množina $s(\mathbf{R})$?

10. Proč předpis $y = \sqrt{-5 + \sin x}$ nedefinuje žádnou funkci?

TERMINOLOGICKÝ SLOVNÍČEK KE KAPITOLE 6

kartézský součin	cartesian product	(binární) relace	(binary) relation
graf	graph	def. obor	domain
obor hodnot	range	restrikce	restriction
inverzní r.	inverse r.	složená r.	composite r.
zobrazení	mapping	vzor, obraz	pre-image, image
injekce	injection	surjekce	surjection
bijekce	bijection	identita	identity
konstanta	constant	reálná funkce	real-valued function
sudá, lichá f.	even, odd f.	periodická f.	periodical f.
mnohočlen	polynomial	racionální f.	rational f.
logaritmická f.	logarithmic f.	exponeciální f.	exponential f.
goniometrické f.	trigonometric f.	charakteristická f.	characteristic f.

Kapitola 7
Posloupnosti a řady

Sedmá kapitola je věnována analytickému zkoumání nekonečných posloupností a řad. Připomínáme též významné využití konečných posloupností a řad ve finanční matematice. Hlavní stavební kameny kapitoly:

- ☐ zavedení pojmu posloupnosti; nejdříve se zkoumá chování monotónních posloupností
- ☐ jsou vybudovány základy teorie limit, včetně nevlastních
- ☐ zvláštní pozornost věnujeme práci se symbolem nekonečna, zejména vyšetřování tzv. neurčitých výrazů
- ☐ kalkul s limitami je probrán velmi zevrubně a s množstvím ukázkových příkladů a úloh k procvičení
- ☐ je naznačena a vysvětlena řada aplikací limit k modelování nejrůznějších složitých jevů a procesů
- ☐ jsou podány základy teorie nekonečných číselných řad; konvergence řad je zkoumána pomocí kritérií
- ☐ jsou podrobně vysvětleny aplikace teorie posloupností a řad do finanční matematiky a ekonomiky
- ☐ jako speciální případ aplikace teorie posloupností je v závěru kapitoly nastíněna teorie diferenčních rovnic

7.1. Posloupnosti

Definice. *Nekonečnou posloupností reálných čísel* $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ nazýváme zobrazení $a : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, kde $1 \mapsto a_1$, $2 \mapsto a_2, \ldots, n \mapsto a_n \ldots$. Symbol a_n (tj. $a(n)$) označuje *n-tý člen* a zápis $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nebo jednodušeji $\{a_n\}$ označí posloupnost jako celek.[14]
Řekneme, že dvě posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ jsou si rovny, jestliže $a_n = b_n$ pro každé $n \in \mathbf{N}$. Tedy rovnost dvou posloupností vyžaduje rovnost všech jejich odpovídajících členů.

Častým způsobem popisu posloupnosti je vyjádření n-tého členu výpočetním vzorcem. V první ukázce je posloupnost zlomků zadaných vzorcem $a_n = \frac{1}{n}$. Analogicky lze popsat posloupnost $b_n = (-1)^n$ nebo *konstantní posloupnost*, jejímž příkladem je zadání $c_n = 3$.

$\{a_n\} = \{\frac{1}{n}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots\}$

$\{b_n\} = \{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$

$\{c_n\} = \{3\} = \{3, 3, 3, 3, 3, \ldots\}$

Při *rekurentním zadání* posloupnosti vycházíme z charakteristiky jejího „vnitřního řádu“, tj. obecných vztahů mezi n-tým členem a jeho „sousedy“ – např. předchůdcem, následníkem atd., což jsou $(n-1)$-ní či $(n+1)$-ní člen a podobně.

Např. u tzv. *Fibonacciho posloupnosti* $\{f_n\}$, kde $f_1 = 0$, $f_2 = 1$, pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí: $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$.

$\{f_n\} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 \ldots\}$

Aritmetickou posloupnost $\{h_n\}$, kde $h_1 = 10$ a $d = 2$, lze zapsat rekurentně jako: $h_{n+1} = h_n + d$ (pro každé $n \in \mathbf{N}$).

$\{h_n\} = \{10, 12, 14, 16, 18, \ldots\}$

Mohou být ovšem i velice „bizarní“ popisy posloupností. Příkladem je posloupnost $\{p_n\}$ charakterizovaná popisem: „ n-tý člen této posloupnosti je roven odpovídající cifře za desetinnou čárkou v desetinném zápisu čísla π“, tj. $\{p_n\} = \{1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 5, \ldots\}$.

Definice. Jsou dány dvě posloupnosti $\{a_n\}, \{b_n\}$ a reálné číslo r. Definujeme následující početní *operace* (úkony):

součet posloupností	$\{a_n\} + \{b_n\}$	členy výsledku se vypočtou jako $a_n + b_n$
rozdíl posloupností	$\{a_n\} - \{b_n\}$	členy výsledku se vypočtou jako $a_n - b_n$
součin posloupností	$\{a_n\} \cdot \{b_n\}$	členy výsledku se vypočtou jako $a_n \cdot b_n$
podíl posloupností	$\dfrac{\{a_n\}}{\{b_n\}}$	členy výsledku jsou $\dfrac{a_n}{b_n}$, úkon je definován jen v případě, že $b_n \neq 0$ pro každé $n \in \mathbf{N}$.
přičtení r k posloupnosti	$r + \{a_n\}$	členy výsledku se vypočtou jako $r + a_n$ (lze chápat jako přičtení konstantní posl.)
r-násobek posloupnosti	$r \cdot \{a_n\}$	členy výsledku se vypočtou jako $r \cdot a_n$ (lze chápat jako násobení konstantní posl.)

Ukázky. Pro demonstraci zavedených úkonů jsme využili výše popsaných posloupností:

$\{a_n\} + \{c_n\} = \{\frac{1}{n} + 3\} = \{4, 3\frac{1}{2}, 3\frac{1}{3}, 3\frac{1}{4}, \ldots\}$

$\dfrac{\{b_n\}}{\{a_n\}} = \{(-1)^n \cdot n\} = \{-1, 2, -3, 4, \ldots\}$

$\{h_n\} + 10 = \{20, 22, 24, 26, 28, \ldots\}$

$\{b_n\} \cdot \{b_n\} = \{1\} = \{1, 1, 1, 1, \ldots\}$

[14] V symbolu a_n pro n-tý člen posloupnosti se n nazývá „index“.

V souvislosti s využitím posloupností k modelování některých jevů či procesů se ukazuje důležité zkoumat jejich globální charakteristiky a asymptotické chování (limity).

Definice. Dána posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Platí-li pro každé $n \in \mathbf{N}$:

(1) $a_n < a_{n+1}$, je posl. $\{a_n\}$ *rostoucí*, (2) $a_n > a_{n+1}$, je posl. $\{a_n\}$ *klesající*,
(3) $a_n \leq a_{n+1}$, je posl. $\{a_n\}$ *neklesající*, (4) $a_n \geq a_{n+1}$, je posl. $\{a_n\}$ *nerostoucí*.
Posl. (1) až (4) nazýváme *monotónní* posloupnosti, posl. (1) a (2) jsou *ryze monotónní*.

Jestliže existuje $M \in \mathbf{R}$ tak, že pro každé n platí $a_n \leq M$, nazýváme $\{a_n\}$ *shora omezenou*. Jestliže existuje $m \in \mathbf{R}$ tak, že pro každé n platí $a_n \geq m$, nazýváme $\{a_n\}$ *zdola omezenou*. Posloupnost omezená shora i zdola se nazývá *omezená* (M, m jsou *horní a dolní mez*).

Řešený příklad 7.1.1. Vyšetřete monotonii a omezenost nekonečné aritmetické posloupnosti.

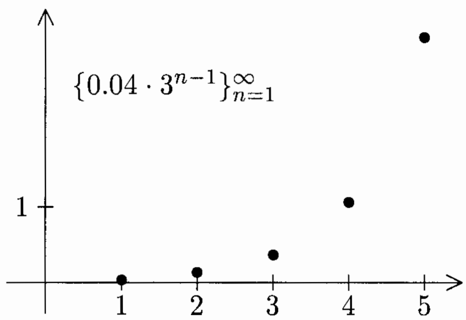
Řešení. Základní vzorce pro aritmetickou posloupnost: $a_{n+1} = a_n + d, \quad a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$.

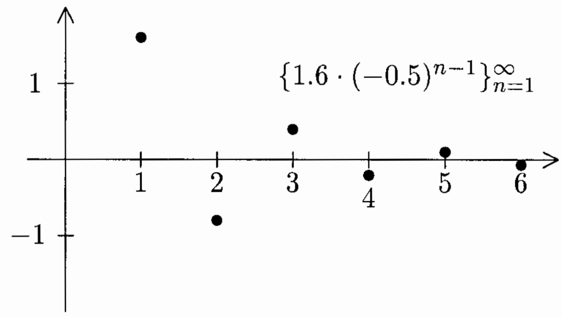
(a) Je-li $d > 0$, vyplývá z prvního vzorce, že jde o rostoucí posloupnost (následný člen se zvětšuje o d). Z druhého vzorce plyne, že tato posloupnost není shora omezená; výraz $d \cdot (n-1)$ může totiž nabýt libovolně „vysokých" hodnot – to zajistí vhodně velké n. Samozřejmě je taková posloupnost omezená zdola, neboť její nejnižší hodnota je a_1.

(b) Je-li $d < 0$, je aritmetická posloupnost klesající a není zdola omezená (shora je omezená hodnotou a_1). Případ $d = 0$ postihuje konstantní posloupnost $\{c\}$, kde $c = a_1$.

Řešený příklad 7.1.2. Vyšetřete chování nekonečné geometrické posloupnosti, jejíž první člen a_1 je kladný, z hlediska monotonie a omezenosti.

Řešení. Na obrázcích jsme znázornili průběh dvou geometrických posloupností.





Základní vzorce pro geometrickou posloupnost (q je kvocient): $a_{n+1} = q \cdot a_n, \quad a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

(a) $q > 1$ ... ukázka na levém obrázku: $\{0.04 \cdot 3^{n-1}\}_{n=1}^{\infty} = \{0.04, 0.12, 0.36, 1.08, 3.24, \ldots\}$.
Z prvního vzorce vidíme, že členy se zvyšují ($q > 1$) a tedy posloupnost je rostoucí. Otázkou je, zda může překročit jakoukoliv horní mez M. Zvolme $M > 0$ a hledejme n tak, aby $a_1 \cdot q^{n-1} > M$. Po zlogaritmování máme podmínku $\log a_1 + (n-1) \cdot \log q > \log M$, tj. $n > (\log M - \log a_1)/\log q$ (nerovnost jsme dělili $\log q$, ale znaménko nerovnosti se zachová, neboť $q > 1$ a tedy $\log q > 0$). Takové n jistě existuje. Posloupnost není shora omezená.

(b) $0 < q < 1$: z prvního vzorce je vidět, že posloupnost klesá a členy leží v intervalu $(0; a_1\rangle$. Jde o omezenou, klesající posloupnost.

(c) $-1 < q < 0$ ... pravý obr.: $\{1.6 \cdot (-0.5)^{n-1}\}_{n=1}^{\infty} = \{1.6, -0.8, 0.4, -0.2, 0.1, -0.05, \ldots\}$.
Opět z prvního vzorce je vidět, že členy leží v intervalu $\langle -a_1; a_1\rangle$. Tentokrát však jednotlivé hodnoty členů posloupnosti „alternují" – liché jsou kladné a klesají, sudé jsou záporné a rostou. Jedná se o příklad omezené *alternující posloupnosti.*

(d) $q < -1$: opět alternující posloupnost, tentokrát však sudé členy jsou kladné a nejsou shora omezené, zatímco liché členy jsou záporné a nejsou zdola omezené. Posloupnost není ani monotónní, ani shora ani zdola omezená.

Zvláštní případy $q = 0$ nebo 1 nebo -1 jsme nerozebírali.

Nyní podáme definici pojmu limity, nejdříve pouze u monotónních posloupností.

Věta a Definice. Pro každou posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, která je rostoucí nebo neklesající, nastane právě jedna ze dvou možností:

(i) není shora omezená; říkáme, že posloupnost *diverguje k* $+\infty$ a píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$,

(ii) je shora omezená; pak existuje její nejmenší horní mez L; říkáme, že posloupnost *konverguje a má limitu* L, a píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

Pro každou posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, která je klesající nebo nerostoucí, nastane právě jedna ze dvou možností:

(iii) není zdola omezená; říkáme, že posloupnost *diverguje k* $-\infty$ a píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$,

(iv) je zdola omezená; pak existuje její největší dolní mez L; říkáme, že posloupnost *konverguje a má limitu* L, a píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

Pro každou monotónní posloupnost má tedy zápis $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ smysl, pokud v roli „čísla" L povolíme i symboly $\pm\infty$. Zápis čteme: „ limita a_n, když n se blíží k nekonečnu, je L".

Pokud posloupnost konverguje k L znamená to, že pro velké hodnoty indexu n se čísla a_n „ustálí" na hodnotách velmi blízkých (nebo přímo rovných) L (*asymptoticky se blíží* k hodnotě L).

Divergentní monotónní posloupnosti neomezeně rostou (k $+\infty$) či neomezeně klesají (k $-\infty$).

Ukázky: Každá konstantní posloupost $\{c\}$ je zřejmě konvergentní, limita je c.

Každá aritmetická posloupnost $\{a_n\}$ je monotónní. Na základě řešeného př. 7.1.1. máme:

pro $d > 0$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, pro $d < 0$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, pro $d = 0$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_1$.

Speciálně: $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} -n = -\infty$.

Řešený příklad 7.1.3. Vyšetřete konvergenci posloupnosti $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{2n+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Řešení. Upravme si zápisy sousedních členů: $t_n = \frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n}$, $t_{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{n+1} = 2 + \frac{1}{n+1}$.

Vidíme, že jde o klesající posloupnost zdola omezenou číslem 2. Vyšší dolní mez než 2 tato posloupnost nemá, tj. i pro velmi malou hodnotu $\varepsilon > 0$ již existuje n tak, že $t_n < 2 + \varepsilon$ a tak číslo $2 + \varepsilon$ nemůže být dolní mezí posloupnosti $\{t_n\}$. Posloupnost je konvergentní a $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 2$.

Řešený příklad 7.1.4. Určete limity

$$\text{(a)} \lim_{n\to\infty}\left\{\tfrac{1}{n}\right\} \qquad \text{(b)} \lim_{n\to\infty}\left\{-\tfrac{1}{n^2}\right\} \qquad \text{(c)} \lim_{n\to\infty}\{2^n\} \qquad \text{(d)} \lim_{n\to\infty}\{(-1)^n\}$$

Řešení.

(a) Jde o „matematický folklór" – hodnoty klesají k nule: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

(b) Zřejmě je $-\frac{1}{(n+1)^2} > -\frac{1}{n^2}$, tj. hodnoty rostou a jejich nejmenší horní mez je 0: $\lim\limits_{n\to\infty} -\frac{1}{n^2} = 0$.

(c) Neomezeně rostoucí geometrická posloupnost ($q = 2$): $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = +\infty$.

(d) Posloupnost $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$ není monotónní a neumíme ji zatím vyšetřit.

Následující věta je ukázkou složitějšího výsledku teorie limit – lze ji najít v řadě učebnic. Tak jako v dalších případech se nebudeme zabývat odvozováním.

Věta. Posloupnost $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\left(\frac{2}{1}\right)^1, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \left(\frac{5}{4}\right)^4, \left(\frac{6}{5}\right)^5, \ldots\right\} =$
$= \{2,\ 2.25,\ 2.370\overline{370},\ 2.44140625,\ 2.48832, \ldots\}$ je rostoucí a shora omezená. Její limita je iracionální číslo $e = 2.71828182\ldots$ což je tzv. *Eulerovo číslo* – základ přirozených logaritmů.

V následující obecné definici limity užijeme (je to tradicí) k označení volitelného malého kladného reálného čísla řecké písmeno ε (vyslov „epsilon"). Podobně zažitý je symbol n_0 („en nula") – označuje vhodný index (nemusí být jen jeden), za nímž se všechny členy a_n chovají tak, jak je třeba.

Definice a Věta. Je-li $L \in \mathbf{R}$, potom pro každé $\varepsilon > 0$ definujeme *ε-okolí* čísla L jako otevřený interval $(L - \varepsilon\,; L + \varepsilon)$. Když nějaké číslo x leží v ε-okolí čísla L, znamená to, že $|L - x| < \varepsilon$, neboli L a x se liší méně než o ε.

Pro každou posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nastane právě jedna z následujících čtyř navzájem se vylučujících možností:

(1) Platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ (pro **jediné** $L \in \mathbf{R}$), což znamená:
ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že pro všechna $n > n_0$ leží členy a_n v ε-okolí čísla L;

(2) platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, což znamená:
ke každému $M \in \mathbf{R}$ existuje n_0 tak, že pro všechna $n > n_0$ je $a_n > M$;

(3) platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, což znamená:
ke každému $m \in \mathbf{R}$ existuje n_0 tak, že pro všechna $n > n_0$ je $a_n < m$;

(4) žádná z předchozích tří možností neplatí.

V případě (1) říkáme, že posloupnost *konverguje* k L nebo, že má *vlastní limitu* L; tato limita může být **jen jedna**. V případech (2), (3) mluvíme o *divergenci k* $\pm\infty$, nebo o *nevlastní limitě*. Případ (4) znamená, že posloupnost *nemá limitu* nebo prostě *diverguje*.

Je vidět, že definice zobecňuje pojem limity zavedený předtím pro monotónní posloupnosti. Její předností je preciznost. Zřejmou nevýhodou je, že nedává praktické nástroje k výpočtu limit. Ty popíšeme v sérii vět (důkazy lze nalézt v mnoha učebnicích vyšší matematiky).

Definice. O posloupnostech $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ říkáme, že jsou navzájem *reziduální*, jestliže existuje n_0 tak, že pro každé $n > n_0$ je $a_n = b_n$; říkáme, že jsou navzájem *konfinální*, jestliže existuje nekonečně mnoho n takových, že $a_n = b_n$.
Posloupnost $\{b_n\}$ nazveme *vybranou* z posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže vznikla vynecháním některých (i nekonečně mnoha) členů z $\{a_n\}$ a pořadí ponechaných členů bylo zachováno.

Věta 1. Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, kde L je vlastní nebo nevlastní limita. Potom platí:

(a) Jsou-li $\{a_n\}, \{b_n\}$ reziduální, pak je také $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$.

(b) Jsou-li $\{a_n\}, \{b_n\}$ konfinální a je-li $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = S$, pak nutně $L = S$.

(c) Je-li $\{b_n\}$ vybraná z $\{a_n\}$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$.

Větu 1 je třeba chápat jako poznatek o tom, co můžeme říci o limitě, jestliže posloupnost pozměníme. Reziduální dvojice se mohou lišit na „začátku", což nemá vliv na limitu.
Konfinální dvojice se sice shodují v nekonečně mnoha členech, ale přitom se také mohou lišit v (jiných) nekonečně mnoha členech; chovají se stejně pouze pokud mají obě limitu.
Vybraná (samozřejmě nekonečná) posloupnost „zdědí" limitu, pokud ji původní měla (bod (c)).

Ukázky. Posloupnost $\{u_n\}$ je definována takto: pro $n \le 1000$ je $u_n = 13$ a pro $n > 1000$ je $u_n = \frac{1}{n}$. Pak bude $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, neboť tato posloupnost je reziduální s posloupností $\{\frac{1}{n}\}$.

Posloupnost $\{v_n\}$ je definována takto: pro $n \le 1000$ je $u_n = \frac{1}{n}$ a pro $n > 1000$ je $u_n = 13$.
Pak bude $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 13$, neboť tato posloupnost je reziduální s konstantní posloupností $\{13\}$.

Posloupnost $\{(-1)^n\}$ je konfinální jak s konstantní posloupností $\{1\}$ (sudé členy), tak s posloupností $\{-1\}$ (liché členy). Nemůže mít limitu, neboť ta by se musela rovnat jak 1 tak -1.

Posloupnost $\{(-2)^n\}$ je konfinální jak s rostoucí posloupností $\{2^n\}$ (sudé členy), tak s klesající posloupností $\{-2^n\}$ (liché čl.). Nemůže mít limitu (musela by být jak $+\infty$ tak $-\infty$).

Posloupnost $\{\sqrt{n}\}$ je rostoucí, má tedy určitě limitu. Její vybraná posloupnost $\sqrt{1}, \sqrt{4}, \sqrt{9}, \sqrt{16}, \ldots, \sqrt{n^2}, \ldots = 1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots = \{n\}$ má, jak víme, limitu $+\infty$. Pro původní posloupnost je tedy nutně též $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

Věta 2. O libovolných posloupnostech platí:

(i) Je-li $c_n \geq a_n$ pro každé n a je-li zároveň $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, pak nutně $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = +\infty$.

(ii) Je-li $c_n \leq a_n$ pro každé n a je-li zároveň $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, pak nutně $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = -\infty$.

(iii) Je-li $a_n \leq c_n \leq b_n$ pro každé n a je-li zároveň $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$.

Věta dává další prostředky k určení limity zadané posloupnosti pomocí jiných limit. U bodů (i), (ii) vyhodnocujeme posloupnosti $\{c_n\}$, které divergují k nekonečnům ještě razantněji, než posloupnosti, které už známe. Bod (iii) je tzv. *věta o sevřené posloupnosti* – posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ konvergují k L a svírají mezi sebou posloupnost $\{c_n\}$. Ta pak nutně konverguje k L.

Ukázky. $\lim\limits_{n\to\infty} -n^3 = -\infty$, neboť $-n^3 < -n$ a $\lim\limits_{n\to\infty} -n = -\infty$ (užito (ii)),

$\lim\limits_{n\to\infty} (-0.8)^n = 0$ podle věty o sevřené posloupnosti (iii), neboť $-(0.8^n) \leq (-0.8)^n \leq 0.8^n$ (obě svírající posloupnosti konvergují k 0),

$\lim\limits_{n\to\infty} n + \frac{n^{13}+51}{13^n+7} = +\infty$, neboť $n + \frac{n^{13}+51}{13^n+7} > n$ a $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$ (užito(i)).

Věta 3 (o limitě součtu). Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ a dále $\{c_n\} = \{a_n\} + \{b_n\}$.

(a) Jestliže A, B jsou vlastní limity, je $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = A + B$;

(b) jestliže A je vlastní limita a B nevlastní limita, je $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = B$;

(c) je-li $A = B = +\infty$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = +\infty$; je-li $A = B = -\infty$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = -\infty$;

(d) je-li $A = +\infty$, $B = -\infty$, nelze obecně o limitě posloupnosti $\{c_n\}$ nic říci;

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} -a_n = -A$, přičemž pokládáme $-(+\infty) = -\infty$ a naopak $-(-\infty) = +\infty$.

Poznámka. Bod (e) umožňuje aplikovat větu 3 i na rozdíl posloupností s využitím zápisu $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty}(-b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

První „počítací" věta o limitách. V případě nevlastních limit používáme formální „kalkul" s čísly a nekonečny – tyto úkony budeme při výpočtech uzavírat do „závorek" tvaru $\|\ldots\|$. Formálně vypadají zásady tohoto „počítání" ($r \in \mathrm{R}$ je libovolné) následovně:

$$\boxed{r + \infty = \infty + r = \infty; \quad r - \infty = -\infty + r = -\infty; \quad +\infty + \infty = +\infty; \quad -\infty - \infty = -\infty.}$$

Zápis tvaru $\|\infty - \infty\|$ je tzv. *neurčitý výraz* a obecně ho **nelze vyhodnotit**. Například: Pro $\{a_n\} = \{n+5\}$, $\{b_n\} = \{-n\}$, $\{k_n\} = \{n^2+n\}$, je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} k_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

Spočtěme: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(n + 5 - n) = \lim\limits_{n\to\infty} 5 = 5$ [„vyšlo" $\|\infty - \infty\| = 5$].

Ale: $\lim\limits_{n\to\infty}(k_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(n^2 - n + n) = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$ [„vyšlo" $\|\infty - \infty\| = +\infty$].

Ukázky. $\lim\limits_{n\to\infty}(6 + \frac{n+1}{n}) = \lim\limits_{n\to\infty} 6 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 6 + 1 = 7$ (druhou limitu jsme už znali);

$\lim\limits_{n\to\infty}(n + n^2 - 139) = \| + \infty + \infty - 139\| = +\infty$ (totiž $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$, neboť $n^2 \geq n$).

Věta 4 (o limitě součinu). Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ a dále $\{c_n\} = \{a_n\} \cdot \{b_n\}$.

(a) Jestliže A, B jsou vlastní limity, je $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = A \cdot B$;

(b) jestliže A je vlastní limita a B nevlastní limita, je
buď $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = +\infty$ (v případě $A > 0$ a $B = +\infty$, nebo $A < 0$ a $B = -\infty$),
anebo $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = -\infty$ (v případě $A > 0$ a $B = -\infty$, nebo pro $A < 0$ a $B = +\infty$);
jestliže však $A = 0$, nelze obecně o limitě posloupnosti $\{c_n\}$ nic říci.

(c) je-li $A = B = +\infty$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = +\infty$; je-li $A = B = -\infty$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = +\infty$;

(d) je-li $A = +\infty$, $B = -\infty$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = -\infty$.

Rozšíření formálního „kalkulu“ s čísly ($r \in \mathbf{R}$ je libovolné) a nekonečny:

$$r \cdot (\pm\infty) = \begin{matrix} \pm\infty \text{ pro } r > 0 \\ \mp\infty \text{ pro } r < 0 \end{matrix}; \qquad (\pm\infty)\cdot(\pm\infty) = +\infty; \qquad (\pm\infty)\cdot(\mp\infty) = -\infty$$

Zápis tvaru $\|0 \cdot (\pm\infty)\|$ je tzv. *neurčitý výraz* a obecně ho **nelze vyhodnotit**. Například:

Pro $\{a_n\} = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$, $\{b_n\} = \{n\}$, $\{k_n\} = \{n^2\}$, je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$.

Spočtěme: $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{n} \cdot n) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$ [„vyšlo“ $\|0 \cdot (+\infty)\| = 1$].

Ale: $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot k_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{n} \cdot n^2) = \lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$ [„vyšlo“ $\|0 \cdot (+\infty)\| = +\infty$].

Věta 5 (o limitě převrácené hodnoty a odmocniny).

Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ (vlastní nebo nevlastní) a pro každé n nechť je $c_n = \dfrac{1}{a_n}$, $d_n = \sqrt{a_n}$.

(a) Jestliže A je vlastní limita různá od nuly, pak $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \dfrac{1}{A}$;

(b) pro $A = \pm\infty$ je $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$;

(c) jestliže $A = 0$, potom:
pokud $\{a_n\}$ je posloupnost **kladných** členů, je $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = +\infty$,
pokud $\{a_n\}$ je posloupnost **záporných** členů, je $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = -\infty$,
pokud $\{a_n\}$ má nekonečně mnoho **kladných** členů a nekonečně mnoho **záporných** členů, nemá posloupnost $\{c_n\}$ žádnou limitu;

(d) je $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = \sqrt{A}$ pro vlastní limitu A, a dále pro $A = +\infty$ je $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = +\infty$.

Formální „kalkul“ s nekonečny:

$$\frac{1}{\pm\infty} = 0; \qquad \frac{1}{0} = \begin{matrix} +\infty \text{ pokud jsou všechny členy kladné} \\ -\infty \text{ pokud jsou všechny členy záporné} \end{matrix}; \qquad \sqrt{+\infty} = +\infty$$

Spojení vět 4, 5 dá návod na výpočet limity podílu, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{A}{B}$.

Zde narazíme na zlomky $\left\|\dfrac{\infty}{\infty}\right\|$ a $\left\|\dfrac{0}{0}\right\|$ tj. další *neurčité výrazy*, které obecně **nelze vyhodnotit**.

Například:

Pro $\{a_n\} = \{n\}$, $\{b_n\} = \{n^2\}$, $\{k_n\} = \{n+1\}$, je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} k_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$.

Spočtěme: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ [„vyšlo“ $\left\|\frac{+\infty}{+\infty}\right\| = 0$].

Ale: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$ [„vyšlo“ $\left\|\frac{+\infty}{+\infty}\right\| = +\infty$].

A dokonce: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k_n}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ [„vyšlo“ $\left\|\frac{+\infty}{+\infty}\right\| = 1$].

Ukázky výpočtu limit součinu, podílu a odmocniny:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\sqrt{n}=\|e\cdot\sqrt{+\infty}\|=+\infty;\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{3+\frac{1}{n}}{n-17}}=\left\|\sqrt{(3+0)\cdot\frac{1}{+\infty}}\right\|=\sqrt{3\cdot 0}=0$$

U druhé limity je možno si všimnout, že pro $n=17$ nelze zlomek vypočítat a pro $n<17$ nelze provést jeho odmocnění, neboť je záporný. Posloupnost je vlastně tedy definována až počínaje osmnáctým členem – podle Věty 1 tím není limita „ovlivněna“.

V následujícím řešeném příkladu ukážeme jak je možno úspěšně vyhodnotit limity různých neurčitých výrazů. Je třeba zdůraznit, že se to někdy podaří za cenu nějakého umělého obratu (triku).

Řešený příklad 7.1.4. Určete limity (a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-4}{2n+9}$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty}(-n^3+60n^2-n+9)$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n+2}{n+4}$ (d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+3}-\sqrt{n}$ (e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\cdot 3^n+2^n}{3^n-7\cdot 2^n}$

Řešení. (a) Na neurčitý výraz $\frac{\infty}{\infty}$ použijeme frekventovanou úpravu, která často pomůže, totiž že čitatele i jmenovatele zlomku dělíme n (v jiných případech dělíme n^2 nebo $\sqrt{n}$ a podobně):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-4}{2n+9}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n}{n}-\frac{4}{n}}{\frac{2n}{n}+\frac{9}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{1}-\frac{4}{n}}{\frac{2}{1}+\frac{9}{n}}=\frac{3-0}{2-0}=\frac{3}{2}\quad(\text{Též: }\lim_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{n}-4}{2\sqrt{n}+9}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{4}{\sqrt{n}}}{2+\frac{9}{\sqrt{n}}}=\frac{3}{2}$$

(b) Jde o neurčitý výraz $\|-\infty+\infty-\infty+9\|$; pomůže opět úprava:

$$\lim_{n\to\infty}(-n^3+60n^2-n+9)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^3}\cdot(-n^3+60n^2-n+9)=\lim_{n\to\infty}n^3\cdot(-\frac{n^3}{n^3}+60\frac{n^2}{n^3}-\frac{n}{n^3}+\frac{9}{n^3})=$$

$$=\lim_{n\to\infty}n^3\cdot(-\frac{1}{1}+60\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{9}{n^3})=\|(+\infty)^3\cdot(-1+60\cdot 0-0+0)\|=\|(+\infty)\cdot(-1)\|=-\infty.$$

Toto byl důležitý příklad **limity mnohočlenu**, o níž platí, že je **rovna limitě členu s nejvyšší mocninou** – zde tedy členu $-n^3$.

(c) Díky technice ukázané v předchozím bodu (b) jsme schopni předběžně vyhodnotit limitu čitatele (je rovna $+\infty$), máme tedy výraz $\|\frac{\infty}{\infty}\|$. Užijeme opět vydělení čitatele i jmenovatele n:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+2}{n+4}=\frac{\frac{n^2}{n}-\frac{n}{n}+\frac{2}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{4}{n}}=\frac{\frac{n}{1}-\frac{1}{1}+\frac{2}{n}}{\frac{1}{1}+\frac{4}{n}}=\left\|\frac{+\infty-1+0}{1+0}\right\|=\left\|\frac{+\infty}{1}\right\|=+\infty.$$

(d) Jde o výraz $\|\infty-\infty\|$; následující technika využívá vztahu $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+3}-\sqrt{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}\cdot(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+3}+\sqrt{n})\cdot(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+3}\right)^2-(\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3-n}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}=\frac{3}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}=\left\|\frac{3}{\infty+\infty}\right\|=\left\|\frac{3}{+\infty}\right\|=0$$

(e) Úprava bude spočívat ve vydělení čitatele i jmenovatele výrazem 3^n (pozor, 2^n nepomůže!) a následném využití faktu, že $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$ (geometrická posloupnost s kvocientem $|q|<1$):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot 3^n+2^n}{3^n-7\cdot 2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot\frac{3^n}{3^n}+\frac{2^n}{3^n}}{\frac{3^n}{3^n}-7\cdot\frac{2^n}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot\frac{1}{1}+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{1}-7\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{5\cdot 1+0}{1-7\cdot 0}=5.$$

Další řešený příklad upozorňuje na nebezpečí nesprávného či nedostatečného užití správného značení, jež může vést k určitým nedorozuměním. Zatím jsme vždy pracovali s výrazem $\lim\limits_{n\to\infty}$, zde změníme „písmenko“ na k a zkoumáme $\lim\limits_{k\to\infty}$:

Řešený příklad 7.1.5. Pro $a_{n,k} = \dfrac{n+k}{n+1} + \dfrac{2}{k^2}$ $(k, n \in \mathbf{N})$, určete (a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n,k}$ (b) $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n,k}$.

Řešení.

(a) Zde k je parametr (pevné číslo): $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+k}{n+1} + \dfrac{2}{k^2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+\frac{k}{n}}{1+\frac{1}{n}} + \dfrac{2}{k^2}\right) = 1 + \dfrac{2}{k^2}$;

(b) zde n je parametr (pevné číslo): $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\dfrac{n+k}{n+1} + \dfrac{2}{k^2}\right) = \left\|\dfrac{n+\infty}{n+1} + \dfrac{2}{+\infty}\right\| = \|+\infty + 0\| = +\infty$

.

ÚLOHY K ŘEŠENÍ

1. Napište prvních pět členů posloupnosti

(a) $\{2+\sin n\pi\}$ (b) $\{10-5n\}$ (c) $\{\frac{1}{n!}\}$ (d) $\{10-2^n\}$ (e) $\left\{\frac{1+(-1)^n}{3}\right\}$ (f) $\left\{\left(-\frac{3}{2}\right)^n\right\}$

2. Navrhněte vzorec pro n-tý člen zadané posloupnosti

(a) $\{1, 4, 7, 10, 13, \ldots\}$ (b) $\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots\}$ (c) $\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots\}$

3. Vyšetřete monotonii a omezenost zadaných posloupností

(a) $\{1-2^n\}$ (b) $\{1-2n\}$ (c) $\{1-(-2)^n\}$ (d) $\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ (e) $\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

4. Experimentujte s kalkulačkou a pokuste se odhadnout asymptotické chování posloupností

(a) $\left\{\sqrt[n]{5}\right\}$ (b) $\{\sqrt[n]{n}\}$ (c) $\left\{\sqrt[n]{n!}\right\}$ (d) $\left\{\frac{2^n}{n!}\right\}$ (e) $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$

5. Určete

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5}{4}\right)^n$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4}{5}\right)^n$ (c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{4}{5}\right)^n$ (d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{5}{4}\right)^n$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(n\pi)$ (f) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$ (g) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n\pi)$ (h) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n + \cos n\pi$

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n(-1)^n}$ (j) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5}{1+(0.5)^n}$ (k) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n - (-2)^n$ (l) $\lim\limits_{n\to\infty} 100 - \dfrac{2}{n}$

6. Při vyšetřování neurčitých výrazů využijte zkušeností z řešeného příkladu 7.1.4.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-3}{n+8}$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-3}{n+8}$ (c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-3}{n^2+8}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{n}}{1-\sqrt{n}}$ (e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3-1}{n^3+2n^2+3}$ (f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-2n^2+3}{n^4+11}$

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} n^3-2n^2+3$ (h) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2+1}+n$ (i) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2+1}-n$

(j) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n-4}-\sqrt{n+3}$ (k) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-7}{3^n+7}$ (l) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-7^n}{3^n+5^n}$

7. Jsou dány posloupnosti $a_n = \dfrac{3+n}{2+n}$, $b_n = \dfrac{3n^2-4}{n^2+1}$

Určete $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{b_n}$

8. V zadaných výrazech $(n, k \in \mathbf{N})$ najděte limity jednak pro $n\to\infty$, jednak pro $k\to\infty$

(a) $n-2k$ (b) $\dfrac{n}{k}$ (c) $\dfrac{n+k}{n-2k}$ (d) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^k + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ (e) $\dfrac{n^2+3}{k^2-3}$ (f) kn^2-k

APLIKACE

(A) Hospodářská (finanční) matematika je disciplína, která se zabývá výpočty úroků, splátek, důchodů, odpisů atd. Základními pojmy úrokového počtu jsou *jistina, úrok, úroková míra*. Jistina P je peněžní částka (vklad) uložená např. do banky. Úrok je částka, kterou banka vyplatí vkladateli za uložené peníze, přičemž úroková míra r v procentech udává, jakou část jistiny obdrží navíc vkladatel za úrokovací období (zpravidla 1 rok); počet úrokovacích období označíme n.

Konečná částka vkladu po absolvování n úrokovacích období se určí v případě *jednoduchého úročení* vzorcem $J_n = P(1 + \frac{r}{100} \cdot n)$, a v případě *složeného úročení* $S_n = P(1 + \frac{r}{100})^n$. Složené úročení dá větší výnos, neboť zahrnuje na rozdíl od jednoduchého též úroky z úroků atd.

Řešený aplikační příklad 7.1.1. Otec uloží právě narozenému dítěti na spořitelní knížku se 4% úrokovou mírou 100 tis. Kč. Jakou částkou bude potomek disponovat v době svých 50. narozenin?

Řešení. Jistina je 100 tis. Kč, $r = 4\%$. Ze vzorce pro složené úročení $S_{50} = 100(1 + \frac{4}{100})^{50} \doteq 710$. Potomek bude tedy v době svých 50. narozenin disponovat částkou 710 tis. Kč.
Pro porovnání – jednoduché úročení dá $J_{50} = 100(1 + \frac{4}{100} \cdot 50) = 300$, tj. 300 tis. Kč.

Řešený aplikační příklad 7.1.2. Pro stroj pořízený za cenu 110 tis. Kč porovnejte dvě varianty plánu odpisů na 5 let – lineární odpisy s každoroční odpisovanou částkou 20 tis. Kč a geometrické odpisy s každoročním odpisem 40 % předchozí zůstatkové hodnoty.

Řešení. (Výpočet v tis. Kč) V prvním případě tvoří zůstatkové hodnoty stroje 1. až 5. rok po pořízení aritmetickou posloupnost $a_1 = 90, a_2 = 70, a_3 = 50, a_4 = 30, a_5 = 10$, tj. $a_n = 110 - 20n$. Při geometrických odpisech platí o zůstatkových hodnotách vztah $g_{n+1} = g_n - g_n \cdot \frac{40}{100} = g_n \cdot 0.6$, tj. klesají geometrickou posloupností $g_n = 110 \cdot (0.6)^n$; tj. $g_1 = 66, g_2 = 39.6, g_3 = 23.76, g_4 = 14.256, g_5 = 8.5536$. Důležitý (např. z pohledu daní) je „zrychlený“ průběh v druhém modelu.

(B) Modely jevů a procesů v přírodě. Prvoci nebo bakterie se rozmnožují tak, že z každého jedince vznikají za určitou dobu dělením vždy dva samostatní jedinci. Růst takové populace je možno modelovat pomocí geometrické posloupnosti.

Řešený aplikační příklad 7.1.3. Prvok se množí dělením jednou za 24 hodin. Vyjděme z počtu 5 prvoků (1. generace) a předpokládejme, že 40. generace bude zaujímat objem 1m^3. Předpokládejme, že se prvoci stále rozmnožují a nehynou. Odhadněte, kolik prvoků má 50. generace a jaký bude zaujímat prostor.

Řešení. Počet prvoků roste geom. posloupností $5, 5 \cdot 2, 5 \cdot 2 \cdot 2, 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2, \ldots$, tj. posloupností tvaru $p_n = 5 \cdot 2^{n-1}$; 40. a 50. generace mají $p_{40} = 5 \cdot 2^{39} \doteq 2.75 \cdot 10^{11}$, $p_{50} = 5 \cdot 2^{49} \doteq 2.81 \cdot 10^{14}$ a objem se tedy zvýší za posledních 10 dnů více než 1000-krát, tj. na více než 1000 m^3.

(C) Diferenční rovnice. Teorie diferenčních rovnic se zabývá analýzou chování posloupností na základě vnitřních vztahů mezi jejich členy. Například *lineární diferenční rovnice 1. řádu* má tvar $y_{n+1} + q \cdot y_n = b_n$, kde $q \in \mathbf{R}$, $\{b_n\}$ je známá posloupnost (tzv. *pravá strana*) a $\{y_n\}$ hledaná posloupnost splňující uvedenou rovnici. Odlišnost mezi *obecným* a *partikulárním* řešením diferenční rovnice bude v tom, že v druhém případě je nutno vyhovět ještě nějaké další podmínce (např. je předepsána konkrétní hodnota y_1). Teorie rozlišuje dva případy:

homogenní případ, tj. $\{b_n\}$ je nulová posloupnost; pak obecné řešení je geometrická posloupnost tvaru $y_n = c \cdot (-q)^n$, kde c je volitelná konstanta,

nehomogenní případ, tj. $\{b_n\}$ je nenulová posloupnost; potom obecné řešení má tvar $y_n = c \cdot (-q)^n + z_n$, kde $\{z_n\}$ je nějaká konkrétní posloupnost řešící rovnici nehomogenní. Získání posloupnosti $\{z_n\}$ může být obtížné, ve speciálním případě pomůže následující:

je-li $b_n = u(n) \cdot r^n$, kde $u(n)$ je mnohočlen stupně k v proměnné n, pak existuje mnohočlen $v(n)$ stejného stupně tak, že $z_n = v(n) \cdot r^n$ (pro $r \neq -q$) nebo $z_n = n \cdot v(n) \cdot r^n$ (pro $r = -q$).

Řešený příklad 7.1.4. Řešte lineární diferenční rovnice 1. řádu s danou počáteční podmínkou

(a) $y_{n+1} + 5y_n = 6n - 11, \quad y_3 = 251$ (b) $y_{n+1} - 2y_n = 16 \cdot 2^n, \quad y_2 = 12$

Řešení. (a) Příslušná homogenní rovnice má řešení $y_n = (-5)^n$. Pravá strana nehomogenní rovnice je pak $b_n = n + 2$ (přesněji $b_n = (n+2) \cdot 1^n$), hledáme tedy jedno řešení nehomogenní rovnice ve tvaru mnohočlenu 1. stupně $z_n = A \cdot n + B$, kde je třeba určit čísla A, B. Dosadíme ho přímo do zadané rovnice: $(A \cdot (n+1) + B) + 5 \cdot (An + B) = 6n - 11$. Po jednoduchých úpravách máme $n(A + 5A - 6) + (A + B + 5B + 11) = 0$ a vzhledem k tomu, že na pravé straně vzniknul nulový mnohočlen, je nutně pro levou stranu jednak $A + 5A - 6 = 0$, tj. $A = 1$ a též $A + B + 5B + 11 = 0$, čili $6B + 12 = 0$, tj. $B = -2$. Obecné řešení zadané diferenční rovnice je $y_n = c \cdot (-5)^n + n - 2$. Podmínka $y_3 = 251$ vede nakonec na rovnici $c \cdot (-5)^3 + 3 - 2 = 251$, tj. $-125c = 250$ a máme $c = -2$. Konečné řešení: $y_n = -2(-5)^n + n - 2$.

(b) Obecné řešení příslušné rovnice homogenní $y_n = c \cdot (-(-2))^n = c \cdot 2^n$. Při hledání $\{z_n\}$ je třeba si všimnout, že $r = -q$; proto bude mít tvar $z_n = n \cdot A \cdot 2^n$ (A zastupuje neznámý mnohočlen 0-tého stupně). Dosadíme do nehomogenní rovnice:
$(n+1) \cdot A \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot n \cdot A \cdot 2^n = 16 \cdot 2^n$; po roznásobení a úpravě máme $2A = 16$, $A = 8$. Obecné řešení: $y_n = c \cdot 2^n + 8 \cdot n \cdot 2^n$

Chceme-li vyhovět podmínce $y_2 = 12$, řešíme rovnici $12 = c \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 \cdot 2^2$, z níž vyjde $c = -13$. Výsledek: $y_n = -13 \cdot 2^n + 8 \cdot n \cdot 2^n$.

Pavučinový model při studiu rovnováhy trhu. Sledujme vývoj ceny vybraného druhu zboží na trhu - tj. získáme posloupnost cen $p_1, p_2, p_3, \ldots$ pro jednotlivá období, kde jsou odpovídající objemové hodnoty nabídky zboží $S_1, S_2, S_3, \ldots$ a poptávky po zboží $D_1, D_2, D_3, \ldots$. V jednoduchém lineárním modelu předpokládejme vztahy $D_n = -a_1 \cdot p_n + b_1$ (poptávková rovnice), $S_{n+1} = a_2 \cdot p_n + b_2$ (nabídka reaguje na cenu v předchozím období). Podmínka pro rovnováhu na trhu tedy zní $D_{n+1} = S_{n+1}$. Po dosazení dostáváme lineární diferenční rovnici 1.řádu pro posloupnost cen $\{p_n\}$ ve tvaru $p_{n+1} + \dfrac{a_2}{a_1} p_n = \dfrac{b_2 - b_1}{a_1}$.

Řešený aplikační příklad 7.1.5. Řešte pavučinový model pro poptávkovou rovnici $D_n = -0.4p_n + 46$, nabídkovou rovnici $S_{n+1} = 0.2p_n + 40$ a počáteční cenu $p_1 = 7$ Kč.

Řešení. Podmínka rovnováhy: $-0.4p_{n+1} + 46 = 0.2p_n + 40$ vede na lin. diferenční rovnici $p_{n+1} + 0.5p_n = 15$. Obecné řešení homogenní rovnice je $p_n = c \cdot (-0.5)^n$. Jedno řešení nehom. rovnice hledáme ve tvaru $z_n = A$ (mnohočlen 0-tého stupně); po dosazení $A + 0.5 \cdot A = 15$ je $A = 10$. Obecné řešení je pak $y_n = c \cdot (-0.5)^n + 10$ a po uvážení podmínky $y_1 = 7$ zjistíme z rovnice $7 = c \cdot (-0.5) + 10$, že $c = -6$. Výsledný model: $p_n = 6 \cdot (-0.5)^n + 10$ popisuje kolísání cen v posloupnosti 7, 11.5, 9.25, 10.375, ... s limitní cenou $\lim_{n\to\infty} p_n = 6 \cdot 0 + 10 = 10$ Kč.

APLIKAČNÍ ÚLOHY K ŘEŠENÍ

1. Na jakou částku vzroste za 10 let vklad 220 000 Kč, je-li uložen s úrokem 9% ? Za jak dlouho se vklad zdvojnásobí?

2. Určete zůstatkovou hodnotu stroje pořízeného za 2.5 miliónu Kč za 15 let, je-li roční odpis 7%. Jak vypadá odpovídající plán lineárních odpisů, aby byla stejná zůstatková hodnota?

3. V kolonii je 5000 bakterií, které se množí dělením po 3 hodinách. Kolik bude bakterií v kolonii za 2 dny. Za jak dlouho překročí jejich množství 5 miliónů ?

4. Řešte diferenční rovnice s počáteční podmínkou

(a) $y_{n+1} + 2y_n = 0, \quad y_1 = 2$ (b) $y_{n+1} - 2y_n = 5 \cdot 3^n, \quad y_1 = 12$

(c) $y_{n+1} - y_n = n + 1, \quad y_2 = 0$ (d) $y_{n+1} - 3y_n = (n+1) \cdot 2^n, \quad y_3 = 1$

5. Diskutujte pavučinový model řeš. apl. př. 7.1.4., jestliže se změní nabídková rovnice na

(a) $S_{n+1} = 0.2p_n + 30$ (b) $S_{n+1} = 0.6p_n + 44$

7.2. Nekonečné řady

Definice. Pro každou posloupnost $\{a_n\}$ definujeme *nekonečnou (číselnou) řadu* jako výraz $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ a označujeme symbolem nekonečného součtu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.
Dále zavádíme *částečné součty* této řady jako členy posloupnosti $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Jestliže má posloupnost částečných součtů $\{s_n\}$ vlastní nebo nevlastní limitu S, říkáme , že řada konverguje nebo že diverguje k $\pm\infty$ a píšeme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Jinak říkáme, že řada diverguje nebo že nemá součet.

Ukázky:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}\} = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \ldots \qquad s_1 = \frac{1}{4},\ s_2 = \frac{8}{28},\ s_3 = \frac{42}{140}, \ldots$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ *harmonická řada* $\quad s_1 = 1,\ s_2 = \frac{3}{2},\ s_3 = \frac{11}{6},\ s_4 = \frac{25}{12}, \ldots$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \ldots$ *geometrická řada*, q je kvocient $\quad s_n = a \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$

Členy řady mohou tvořit mimo čísel také funkce (tzv. *funkční řady*), např.:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ *mocninná (potenční) řada*

O součtu nekonečně mnoha čísel můžeme uvažovat díky převodu problému na limitu posloupnosti částečných součtů. Pokud má mít řada konečný součet, musí být ovšem příspěvky členů s vysokým indexem dostatečně malé (ale ani to nemusí stačit).

Věta. (nutná podmínka konvergence) Je-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, je nutně $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Důkaz. $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Řada konverguje právě tehdy, když existuje $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = S$. Posloupnost $\{s_{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ je definovaná až od 2. členu a je vybraná z posloupnosti $\{s_n\}$; má tedy stejnou limitu $\lim\limits_{n\to\infty} s_{n-1} = S$. Protože $a_n = s_n - s_{n-1}$, platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = S - S = 0$.

Ukázky:
Pro řadu $4 + \frac{1}{100000} + \frac{1}{100000} + \frac{1}{100000} + \cdots \frac{1}{100000} + \ldots$ je $s_n = 4 + (n-1) \cdot \frac{1}{100000}$ a zřejmě $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \left\| 4 + \infty \cdot \frac{1}{100000} \right\| = +\infty$.
I když jsou v předchozí ukázce příspěvky do součtu velmi malé, je jich „příliš mnoho" – věta vyžaduje, nejen aby byly malé, ale aby se „zmenšovaly k nule". Ani to však nemusí stačit (jde o podmínku **nutnou**, ale ne **postačující**).

Důležitá ukázka: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = +\infty$, tj. harmonická řada diverguje k $+\infty$;
Klasický učebnicový příklad (důkaz je obtížnější – můžete též experimentovat s programovatelnou kalkulačkou). Fakt, že součet $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$ roste nade všechny meze, překvapí. I zde jsou příspěvky „příliš velké".

Zatím jsme ještě neviděli žádnou konvergentní řadu (samozřejmě kromě $0 + 0 + 0 + 0 + \ldots$). Následující řešený příklad je proto významný.

Řešený příklad 7.2.1. Dokažte, že $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots = 1.$

Řešení. Nejdříve malá úprava n-tého členu $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Pro n-tý částečný součet je pak $s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$
a tedy $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \left\| 1 - \frac{1}{+\infty} \right\| = 1$.

Základním příkladem nekonečné řady je řada geometrická, kterou kompletně vyšetříme.

Věta. Nekonečná geometrická řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots$, kde $a \neq 0$,

pro $|q| < 1$ má součet $\dfrac{a}{1-q}$, pro $q \geq 1$ je divergentní k $\pm\infty$, pro $q \leq -1$ nemá součet.

Důkaz. Vyjdeme ze vzorce pro n-tý částečný součet $s_n = a\frac{q^n-1}{q-1}$.

Je-li $|q| < 1$, hned vidíme, že $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = a\frac{0-1}{q-1} = \frac{a}{1-q}$.

Je-li $q = 1$, je $s_n = a + a + a + \ldots = na$ a $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$ (záleží na znaménku a, navíc $a \neq 0$).

Je-li $q > 1$, je $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \left\| a\frac{\pm\infty - 1}{q-1} \right\| = \pm\infty$ (opět podle znaménka čísla a).

Je-li $q = -1$, řada má tvar $a - a + a - a + \ldots$. Posl. částečných součtů $a, 0, a, 0, a, \ldots$ diverguje.

Je-li $q < -1$, posloupnost částečných součtů je alternující a nemá limitu.

Věta (o začátku řady). Nechť k je přirozené číslo. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní, právě když je konvergentní řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k+n}$ a pak platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_k) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{k+n}$$

Důkaz. Označíme n-tý částečný součet řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ symbolem s_n, n-tý částečný součet řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k+n}$ symbolem t_n a $U = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ konečný součet prvních k členů posl. $\{a_n\}$.

Platí $s_n = U + t_n$ a pro limity $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = U + \lim\limits_{n\to\infty} t_n$ (také otázka konvergence je jasná).

Význam věty je jednak v konstatování, že „začátek“ řady nemá vliv na její konvergenci (při změně několika počátečních členů se ovšem může změnit součet řady), zároveň však umožňuje rozdělit proces sčítání na dvě části – na konečný „začátek“ řady (ten může být nepravidelný) a nekonečný „zbytek“, který sečteme nějakou sčítací technikou (třeba jako nekonečnou geometrickou řadu).

Řešený příklad 7.2.2. Sečtěte $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = 4 + 0.5 + (0.5)^2 + (0.5)^3 + (0.5)^4 + \ldots$.

Řešení. Užijeme předchozí dvě věty: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = 4 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (0.5)^n = 4 + \frac{0.5}{1-0.5} = 5$ (druhá řada je geometrická, v níž $a = 0.5, q = 0.5$).

Následující věta vysvětluje, jak je možno kombinovat konvergentní řady.

Věta. Jsou dány konvergentní řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$ a číslo $r \in \mathbf{R}$. Potom platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(ra_n) = rA.$$

Řešený příklad 7.2.3.

$$\frac{1}{2} + \frac{10}{5} + \frac{1}{2^2} + \frac{10}{5^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{10}{5^3} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n - 10\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} - 10\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = 1 - 10\cdot\frac{1}{4} = -\frac{3}{2}$$

(šlo o „kombinaci“ dvou geometrických řad).

POZOR. Analogické pravidlo pro součin či podíl neplatí:

např. jsou-li $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (0.5)^n = 1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (0.2)^n = 0.25$, je ovšem $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (0.5)^n \cdot (0.2)^n =$

$= \sum\limits_{n=1}^{\infty} (0.1)^n = \frac{1}{9} \neq 1 \cdot 0.25$. Dokonce podílová řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(0.5)^n}{(0.2)^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (2.5)^n$ je divergentní k $+\infty$.

V dalším pracujeme s řadami kladných čísel – jejich posloupnosti částečných součtů jsou rostoucí, takže buď konvergují nebo divergují k $+\infty$. K prokazování konvergence těchto řad byla odvozena tzv. *kritéria konvergence.*

Definice a Věta (srovnávací kritérium). Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ se nazývá *majorantou* řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, jestliže pro každé n je $b_n \geq a_n$ (řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ se pak ovšem nazývá *minorantou* řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$).
Pro takové dvě řady s **kladnými** členy platí:

když řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje;

když řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, pak i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje.

K důkazu si stačí uvědomit vlastnosti monotónních posloupností. Věta slouží k prokázání jednak konvergence (nalezení vhodné majoranty), jednak divergence (nalezení vhodné minoranty).

Řešený příklad 7.2.4. Prokažte: (a) řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje, (b) řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverguje.

Řešení. (a) Platí $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$; a dále $\displaystyle\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}$, což znamená, že zbytková řada má konvergentní majorantu. (viz řešený př. 7.2.1.).

(b) Pro řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ máme divergentní minorantu, neboť $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ (harmonická řada diverguje).

Věta. Pro každou řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ s kladnými členy platí:

d'Alembertovo [dalambérovo] (podílové) **kritérium**. Existuje-li $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, pak:

1. je-li $L > 1$, je řada divergentní,
2. je-li $L < 1$, je řada konvergentní,

Cauchyovo [kóšiovo](odmocninové) **kritérium**. Existuje-li $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$, pak:

1. je-li $L > 1$, je řada divergentní,
2. je-li $L < 1$, je řada konvergentní,

Poznámka. Pro $L = 1$ nedají kritéria žádný efekt – je nutno zkoušet další (viz kreativní úlohy).

Řešený příklad 7.2.5. Zkoumejte konvergenci řad

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+7}{5n+1}\right)^n$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ **(důležitá řada !)**

Řešení. (a) Podílové kritérium: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; řada konverguje.

(b) Odmocninové kritérium: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+7}{5n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+7}{5n+1} = \frac{2}{5}$; řada konverguje.

(c) Srovnávací kritérium: najdeme konvergentní majorantu
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}$ a platí: $\displaystyle\frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n+1)} \leq \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2} = \frac{1}{2^n}$; původní řada tedy konverguje a navíc platí rovnost $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \ldots = e$ (*Eulerovo číslo).*

ÚLOHY K ŘEŠENÍ

1. Experimentujte s kalkulačkou – určete částečný součet s_{10} pro

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ (e) $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

2. Sečtěte řady

(a) $0.6+0.06+0.006+0.0006+\dots$ (b) $2+\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\frac{2}{3^4}+\dots$

(c) $3+\frac{3}{4}+\frac{3}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\frac{3}{4^4}+\dots$ (d) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\dots$

(e) $3-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\frac{1}{81}-\dots$ (f) $1+\frac{-1}{\sqrt{5}}+\dots+\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)^{n-1}+\dots$

3. Sečtěte řady

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(0.7)^n+(0.9)^n$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)$ (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n}$ (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}$

4. Dokažte, že $\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{1}{8}+\frac{3}{32}\dots=\frac{7}{4}$

5. Zdůvodněte, proč jsou dané řady konvergentní nebo divergentní

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7}{n(n+1)}+\frac{2}{3^n}$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{2}\right)^n$ (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8^n}-\frac{1}{n^2}$ (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}-n$ (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$

6. Prověřte nutnou podmínku konvergence: (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2}{n^2+2n}$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{5n-1}$ (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+(0.3)^n}$

7. Aplikujte kritéria konvergence na řady

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5n}$ (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n+99}$ (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$ (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{2^n}$

APLIKACE

(A) Finanční matematika. Uplatňují se vzorce pro n-tý částečný součet aritmetické a geometrické řady. Připomeňme si oba ještě jednou:

aritmetická řada: $s_n = na_1 + \dfrac{dn(n-1)}{2}$ geometrická řada $s_n = a_1\dfrac{q^n-1}{q-1}$.

Řešený aplikační příklad 7.2.1. Kolik naspoříme za dva roky na účtu s měsíčním připisováním úročeném 9 % p.a. při měsíčním vkladu 500 Kč ?

Řešení. Úrok 9 % p.a. je roční – pro měsíční připisování to znamená $\frac{9}{12}\% = 0.75\%$. Podle vzorce pro složený úrok (2 roky je 24 úrokovacích období) máme pro jednotlivé položky spoření

$$500\left(1+\tfrac{0.75}{100}\right)^{24}+500\left(1+\tfrac{0.75}{100}\right)^{23}+500\left(1+\tfrac{0.75}{100}\right)^{22}+\dots+500\left(1+\tfrac{0.75}{100}\right)^{2}+500\left(1+\tfrac{0.75}{100}\right)^{1}=$$
$$500\cdot(1.0075^{24}+1.0075^{23}+1.0075^{22}+\dots+1.0075^1)=500\cdot\left(1.0075\cdot\tfrac{1.0075^{24}-1}{1.0075-1}\right)\doteq 13192.44\text{Kč}.$$

(B) Převod periodického čísla na zlomek. Utvoříme desetinný rozvoj daného čísla a následně pomocí součtu geometrické řady jej převedeme na zlomek.

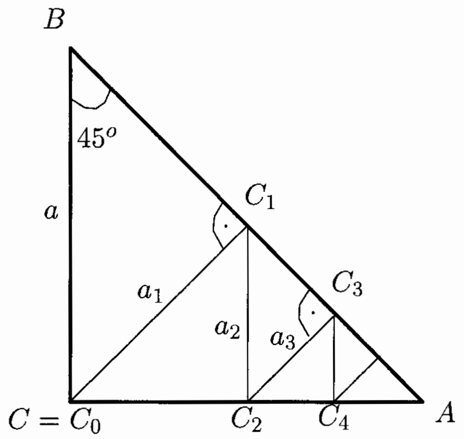
Řešený aplikační příklad 7.2.2. Neryze periodické číslo $a = 0.23\overline{48}$ převeďte na zlomek, jehož čitatel i jmenovatel jsou přirozená čísla.

Řešení. Rozepíšeme $a = 0.234848\ldots = 0.23 + 48\cdot 10^{-4} + 48\cdot 10^{-6}\ldots$. Na pravé straně je tedy číslo 0.23 a pak již jen čísla, která tvoří geometrickou posloupnost s prvním členem $a_1 = 48\cdot 10^{-4}$ a kvocientem $q = 10^{-2}$. Je tedy $a = 0.23 + s$, kde s je součet všech členů geometrické posloupnosti. $|\,q\,| < 1$, tedy $s = \frac{48\cdot 10^{-4}}{1-10^{-2}} = \frac{48}{9900}$. Dané číslo lze vyjádřit ve tvaru $a = \frac{23}{100}+\frac{48}{9900} = \frac{2325}{9900}$.

(C) Různé geometrické úvahy. Příkladem je výpočet délky nekonečné lomené čáry. Pokud známe vztah mezi jednotlivými prvky dané posloupnosti čar můžeme spočítat pomocí vzorce pro součet geometrické řady výslednou délku lomené čáry.

Řešený aplikační příklad 7.2.3. Z vrcholu $C \equiv C_0$, ležícího proti přeponě rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka, vedeme kolmici k jeho přeponě AB, z její paty C_1 vedeme kolmici k odvěsně AC, z její paty C_2 kolmici k přeponě AB atd. (viz obr.) Označme a_n délku úsečky $C_{n-1}C_n$ a určeme délku lomené čáry, jejímiž hranami jsou úsečky s délkami $a_1, a_2, a_3 \dots$.

Řešení. Protože jde o rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník s přeponou AB, je $|\angle ABC| = |\angle BAC| = 45^o$. Výška CC_1 k základně AB je zároveň osou pravého úhlu ACB, takže $|\angle BCC_1| = 45^o$. Proto je CC_1 o délce a_1 stranou čtverce, který má úhlopříčku BC o délce a. Z toho plyne, že je $a = a_1\sqrt{2}$ čili $a_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Obdobně je C_1C_2 o délce a_2 stranou čtverce s úhlopříčkou CC_1 o délce a_1, takže je $a_2 = \frac{a_1}{\sqrt{2}}$; dále je $a_3 = \frac{a_2}{\sqrt{2}}$ atd. Délky úseček, které jsou stranami příslušné lomené čáry, tvoří geometrickou posloupnost s prvním členem $a_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$ a kvocientem $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$, pro nějž platí $|q| < 1$. Délka lomené čáry se tedy rovná



$$s = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{a}{\sqrt{2} - 1} = a(\sqrt{2} + 1).$$

APLIKAČNÍ ÚLOHY K ŘEŠENÍ

1. Periodické číslo převeďte na zlomek, jehož čitatel i jmenovatel jsou přirozená čísla

(a) $0.1111\dots$ (b) $0.\overline{21}$ (c) $3.\overline{14}$ (d) $5.\overline{146}$ (e) $2.71\overline{82}$ (f) $3.23\overline{94}$

2. Kolik naspoříme za tři roky na účtu s měsíčním (pololetním) připisováním úročeném 12 % p.a. při měsíčním vkladu 800 Kč (pololetním vkladu 4800 Kč)?

3. První krychle má hranu délky 1 dm, a každá další má hranu délky poloviční než předchozí. Určete celkový povrch a celkový objem takové nekonečné řady krychlí.

KREATIVNÍ ÚLOHY KE KAPITOLE 7

1. Navrhněte, jak bude pokračovat posloupnost

(a) 1, 3, 7, 15, ... (b) 1, 3, 13, 63, ... (c) 3, 11, 123, ...

2. Je-li p přirozené číslo zapsané v desítkové soustavě, pak číslo $\text{cif}(p)$ je definováno jako ciferný součet zápisu čísla p. Sestrojte prvních pět členů posloupnosti s prvním členem 1227, je-li posloupnost tvořena podle pravidla: $a_{n+1} = \text{cif}(a_n)$.

3. Počítejte některé složitější limity vedoucí na neurčité výrazy:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+10} - n$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+10}{n}$ (c) $\lim\limits_{n\to\infty} 3n - \sqrt{9n^2 - 20n + 1}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)^{11}}{(n-3)^{11}}$ (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^{n+2} - 4^{n-1}}{3^{n-1} + 4^{n+2}}$ (f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

4. Platí věta: Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost kladných čísel a nechť existuje limita $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L$. Potom existuje též $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ a navíc je též rovna L. Použijte větu na výpočet limit:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$ (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{23}$ (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}$ (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n - 2^n}$

5. Rolník se rozhodl koupit koně. „Kolik stojí?“, ptal se prodávajícího, a ten odpověděl: „Nic, ale musíš zaplatit za hřeby v podkovách. Za první hřeb zaplatíš 1 haléř, za druhý 2 haléře, za třetí 4 haléře a za každý další vždy dvakrát tolik.“ Každá podkova je přibita jen šesti hřeby. Byla by koupě koně pro rolníka výhodná?

6. *Lineární diferenční rovnice 2. řádu* má tvar $y_{n+2} + p \cdot y_{n+1} + q \cdot y_n = b_n$, kde $p, q \in \mathbf{R}$ a význam ostatních symbolů je stejný jako u 1. řádu. Také teorie řešení těchto rovnic je analogická 1. řádu. Sestavení obecného řešení *homogenního* případu ovšem vyžaduje řešit tzv. *charakteristickou rovnici* – kvadratickou rovnici $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$. Z jejích kořenů se pak sestavuje obecné řešení se **dvěma** volitelnými konstantami c_1, c_2 takto:

pro dva různé reálné kořeny α_1, α_2 je $y_n = c_1 \cdot \alpha_1^n + c_2 \cdot \alpha_2^n$;
pro jeden dvojnásobný reálný kořen α je $y_n = c_1 \cdot \alpha^n + c_2 \cdot n \cdot \alpha^n$;
případ komplexních kořenů zde neuvádíme.

Při hledání partikulárního řešení je třeba určit hodnoty c_1, c_2 na základě znalosti **dvou** členů zkoumané posloupnosti.

Najděte obecné i partikulární řešení homogenních rovnic se zadanými počátečními podmínkami

(a) $y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 0$, $y_1 = y_2 = 2$ (b) $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 0$, $y_1 = 5$, $y_2 = 8$
(c) $y_{n+2} - 4y_n = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = 2$ (d) $y_{n+2} = y_{n+1} + y_n$, $y_1 = y_2 = 1$

7. In the year 1626, Peter Minuit gave the Man-a-hat-a Indians $24 for the island of Manhattan. If the Indians had been able to invest the money at 5% compounded yearly could they buy the island back today?

8. Suppose you put 2000 Kč in a savings bank every month and the money will grow up by 1% monthly. What will be the result after one year of such savings?

9. The number of bacteria in a culture increases from 5,000 to 15,000 in 10 hours. Using a geometric progression model, derive a formula for the number of bacteria after n hours from the start. Estimate the number after 20 hours. When will the number be over 80,000 ?

10. If you borrow 5000 DM and repay the loan by paying 500 DM per month to reduce the loan and 1% of the unpaid balance each month for the use of money, what is the total cost of the loan over 10 months?

KONTROLNÍ OTÁZKY KE KAPITOLE 7

1. Kdy je nekonečná aritmetická posloupnost konvergentní?

2. Kdy je nekonečná geometrická posloupnost konvergentní?

3. V čem je podstata myšlenky nekonečného součtu?

4 Co jsou to majoranta a minoranta?

5. Prověřte konvergenci důležité řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ podílovým a odmocninovým kritériem.

TERMINOLOGICKÝ SLOVNÍČEK KE KAPITOLE 7

posloupnost	sequence	n-tý člen p.	the n-th term of s.
aritmetická p.	arithmetic s.	geometrická p.	geometric s.
monotónní p.	monotonic s.	omezená p.	bounded s.
konvergentní	covergent	divergentní	divergent
limita	limit	věta o sevřené p.	the sandwich theorem
rekurentní vztah	recurrence relation	vybraná posl.	subsequence
řada	series [též mn. č.]	částečný součet	partial sum
harmonická ř.	harmonic s.	alternující ř.	alternating s.
majorizovat	dominate	minorizovat	subordinate
podílové krit.	the ratio test	odmocninové krit.	the root test

VÝSLEDKY

Kapitola 2.1: Aritmetické vektory

Úlohy k řešení

Příklad 1.
(a) $(1,3,10), (\frac{5}{4}, \frac{3}{4}, \frac{13}{4})$
(b) největší normu má vektor $\vec{p}$
(c)
$\vec{p}_n = (\frac{\sqrt{17}}{17}, 0, \frac{4\sqrt{17}}{17})$, $\vec{q}_n = (\frac{4\sqrt{21}}{21}, \frac{2\sqrt{21}}{21}, -\frac{\sqrt{21}}{21})$,
$\vec{r}_n = (\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3})$, $\vec{s}_n = (-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3})$
(d) dvojice $\vec{p}, \vec{q}$ a $\vec{q}, \vec{r}$ jsou ortogonální

Příklad 2.
(a) např. $\vec{v} = (0,5), \vec{w}_1 = (\frac{\sqrt{11}}{2}, -\frac{5}{2})$, $\| \vec{v} + \vec{w}_1 \| = 3$, $\| \vec{v} - \vec{w}_1 \| = \sqrt{59}$ nebo $\vec{v} = (0,5), \vec{w}_2 = (-\frac{\sqrt{11}}{2}, -\frac{5}{2})$, $\| \vec{v} + \vec{w}_2 \| = 3$, $\| \vec{v} - \vec{w}_2 \| = \sqrt{59}$
(b) $\vec{v} = (8,6), \vec{w} = (1,-1)$, $\| \vec{w} \| = \sqrt{2}$, $\| \vec{v} + \vec{w} \| = \sqrt{106}$
(c) $\vec{v} = (1,1), \vec{w} = (-1,2), \vec{v} \cdot \vec{w} = 1$
(d) $\vec{v} = (0,1), \vec{w} = (-1,0), \| 3\vec{v} - 2\vec{w} \| = \sqrt{13}$

Příklad 3.
(a) $\vec{x} = (0,-64,-80,-32)$
(b) $\vec{x} = (-4,-14,-14,-6)$
(c) nemá řešení
(d) $\vec{x} = (2,1,-\frac{1}{2},0)$
(e) $\vec{x} = (2,\frac{1}{3},-\frac{4}{3},-\frac{1}{3})$
(f) řešením je $\forall \vec{x} \in V_4$

Příklad 4.
(a) $r \in \{-2,2\}$
(b) $r = -\frac{5}{7}$
(c) $r = -\frac{6}{11}$
(d) $\forall r \in \mathbf{R}$
(e) $r \in \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$
(f) nemá v $\mathbf{R}$ řešení
(g) $r \in \{3,2\}$
(h) $\forall r \in \mathbf{R}$

Aplikační úlohy k řešení

Příklad 1.
(a) $c: x + 2y - 9 = 0,\ a: 2x - 3y + 17 = 0,\ b: 4x + y - 15 = 0$
(b) $v_a: 3x + 2y - 15 = 0,\ v_b: x - 4y + 21 = 0,\ v_c: 2x - y + 3 = 0$
(c) $t_a: 6x + 5y - 33 = 0,\ t_b: y - 5 = 0,\ t_c: 3x - y + 1 = 0$
(d) $\alpha = 49^o 24',\ \beta = 60^o 15',\ \gamma = 70^o 21'$

Příklad 2.
(a) $a: x = -1 + 3t, y = 5 + 2t, z = 2 + 4t,\ b: x = 3 - t, y = 3 + 4t, z = 6t,$
$c: x = 3 - 4t, y = 3 + 2t, z = 2t$
(b) $v_a: x = 3 - 2t, y = 3 + 3t, z = 0,\ v_b: x = -1 + 4t, y = 5 + t, z = 2,$
$v_c: x = 2 + t, y = 7 + t, z = 6 + t$
(c) $t_a: x = 3 - \frac{5}{2}t, y = 3 + 3y, z = 4t,\ t_b: x = -1 + \frac{7}{2}t, y = 5, z = 2 + t,$
$t_c: x = 2 - t, y = 7 - 3t, z = 6 - 5t$
(d) $\alpha = 47^o 43',\ \beta = 90^o,\ \gamma = 42^o 17'$
(e) $\rho: 2x + 11y - 7z - 39 = 0$

Příklad 3.
(a) $\| e \| = \sqrt{29}, \| f \| = \sqrt{53}$
(b) $\epsilon = 95^o 51'$

Příklad 4.
(a) $p \parallel q: x = 1 + 2t, y = 2 + 7t, z = 3 - t;\ k: x = 1 + 7t, y = 2 - 2t, z = 3$
(b) $\rho': 5x - 4y + z = 0$
(c) $23^o 31'$

Příklad 5. $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (-44, 80, -36), \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (-40, 56, -24)$

Příklad 6. (a) snížení objednávky na $\frac{1}{2}$ (b) $1.05 \cdot \vec{c}$ (c) celková cena nákupu

Kreativní úlohy

Příklad 1. $(1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,0),(0,0,0,0,1),(0,0,0,1,0)$

Příklad 2. $(1,0,0,0),(1,1,0,0),(0,1,0,0),(0,0,0,1)\ldots$

Příklad 3. Kružnice k(S,r) : S[1,3], $r=5$

Příklad 4. Koule o poloměru $r=1$

Příklad 5. Skalární součin dvou vektorů dá reálné číslo a to pak nelze skalárně násobit dalším vektorem.

Příklad 6. Nulový vektor

Příklad 7. Např. $\vec{v}=(-25,-5,10,0,0)$

Příklad 8. Je to norma vektoru u.

Příklad 9. 13,19

Příklad 10. 32

Příklad 11. musí platit vztah $0=\frac{1}{6}\mid(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}\mid$

Kapitola 2.2: Matice

Úlohy k řešení

Příklad 1.

(a) 2×4 (b) 4×2 (c) nemá řešení (d) 2×2 (e) 4×2

(f) 4×4 (g) 3×2 (h) nemá řešení (i) 2×2 (j) nemá řešení

Příklad 2.

$$U\cdot W=\begin{bmatrix}4&-2\\-3&13\end{bmatrix}\qquad V\cdot V=\begin{bmatrix}1&36\\0&25\end{bmatrix}\qquad W\cdot V=\begin{bmatrix}0&5\\-1&9\\-1&14\\3&-12\end{bmatrix}$$

$$V\cdot U=\begin{bmatrix}62&26&0&19\\35&15&0&10\end{bmatrix}\qquad W\cdot U=\begin{bmatrix}7&3&0&2\\1&1&0&-1\\8&4&0&1\\18&6&0&9\end{bmatrix}\qquad U^T\cdot V^T=\begin{bmatrix}62&35\\26&15\\0&0\\19&10\end{bmatrix}$$

$$V^T\cdot V^T=\begin{bmatrix}1&0\\36&25\end{bmatrix}\qquad U^T\cdot W^T=\begin{bmatrix}7&1&8&18\\3&1&4&6\\0&0&0&0\\2&-1&1&9\end{bmatrix}\qquad W^T\cdot U^T=\begin{bmatrix}4&-3\\-2&13\end{bmatrix}$$

$$V^T\cdot W^T=\begin{bmatrix}0&-1&-1&3\\5&9&14&-12\end{bmatrix}\qquad U\cdot U^T=\begin{bmatrix}3&8\\8&62\end{bmatrix}\qquad U^T\cdot U=\begin{bmatrix}50&22&0&13\\22&10&0&5\\0&0&0&0\\13&5&0&5\end{bmatrix}$$

$$V^T\cdot U=\begin{bmatrix}-1&-1&0&1\\44&24&0&1\end{bmatrix}\qquad U^T\cdot V=\begin{bmatrix}-1&44\\-1&24\\0&0\\1&1\end{bmatrix}\qquad W^T\cdot U^T=\begin{bmatrix}4&-3\\-2&13\end{bmatrix}$$

$$V\cdot V^T=\begin{bmatrix}82&45\\45&25\end{bmatrix}\qquad V^T\cdot V=\begin{bmatrix}1&-9\\-9&106\end{bmatrix}\qquad W\cdot V^T=\begin{bmatrix}9&5\\-1&0\\8&5\\30&15\end{bmatrix}$$

$$V\cdot W^T=\begin{bmatrix}9&-1&8&30\\5&0&5&15\end{bmatrix}\qquad W\cdot W^T=\begin{bmatrix}1&0&1&3\\0&1&1&-3\\1&1&2&0\\3&-3&0&18\end{bmatrix}\qquad W^T\cdot W=\begin{bmatrix}11&-8\\-8&11\end{bmatrix}$$

Příklad 5. $M \cdot N = [7]$, $N \cdot M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & -2 \\ 3 & 3 & 6 & 6 & -3 \\ 4 & 4 & 8 & 8 & -4 \end{bmatrix}$

Příklad 6. Chyba je v násobení 2. řádku s 2. sloupcem - prvek a_{22} výsledné matice je správně roven 5.

Příklad 7.

(a) Asociativnost platí $(H \cdot K) \cdot L = H \cdot (K \cdot L) = \begin{bmatrix} -5 \\ -34 \end{bmatrix}$

(b) Distributivnost platí $(H + K) \cdot L = H \cdot L + K \cdot L = \begin{bmatrix} 40 \\ -33 \end{bmatrix}$

(c) $H^3 - H^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $(H^2)^T - (H^T)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $L^T \cdot H \cdot L = [111]$, $H^8 = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, nemá řešení

Aplikační úlohy k řešení

Příklad 2.

jízdní řád, poštovní sazebník, matice vzdáleností mezi městy v autoatlasu, platová tabulka, matice určení třídy rizika úvěrové angažovanosti:

Míra zajištění

Bonita klienta

A	1	1	1	2	2
B	1	1	2	2	3
C	1	2	2	3	3
D	1	2	3	3	3
E	2	2	3	3	4
F	2	3	3	4	4
G	3	3	4	4	4

Příklad 3*.

(a) $\frac{100}{440} \cdot A = \begin{bmatrix} 15.9 & 27.8 & 4.5 \\ 6.8 & 26.8 & 18.2 \end{bmatrix} \%$, $\frac{100}{495} \cdot B = \begin{bmatrix} 13.1 & 32.3 & 6.1 \\ 5.1 & 28.3 & 15.2 \end{bmatrix} \%$

(b) je třeba matice sečíst $\frac{100}{440+495}(A + B) = \begin{bmatrix} 14.4 & 30.2 & 5.3 \\ 5.9 & 27.6 & 16.6 \end{bmatrix} \%$

Příklad 4.

(a) $N \cdot C = \begin{bmatrix} 27660 & 24655 \\ 40520 & 35175 \end{bmatrix}$. Z toho plyne, že by pan Zajíc v případě základních cen zaplatil celkem 27 660 Kč a v případě cen pro stálé zákazníky 24 655 Kč (obdobně pan Liška - 2. řádek).

(b) $N \cdot C = \begin{bmatrix} 17420 & 16620 & 16480 \\ 23876 & 22676 & 22580 \\ 11650 & 11100 & 11040 \end{bmatrix}$. Pan Čech (1. řádek) by v případě základních cen zaplatil celkem 17 420 Kč, v případě částečné výhody 16 620 Kč a v případě cen pro stálé zákazníky 16 480 Kč. Obdobně pan Němec (3. řádek), pan Polák (2. řádek).

(c) $N \cdot C = \begin{bmatrix} 18000 & 15750 \\ 24920 & 21780 \\ 12100 & 10700 \end{bmatrix}$

Příklad 5*.
(a) první řádek matice L udává normy práce pro jednotlivé etapy výroby člunu pro jednu osobu (stříhání, kompletace, expedice); první sloupec matice M dává mzdové hodinové nákladnu pro jednotlivé etapy výroby. Součin těchto dvou vektorů nám tedy dává celkové mzdové náklady na člun pro jednu osobu v pobočce FI.
(b) Součin matic $L \cdot M$ dává celkové náklady na finální produkt za obě pobočky.

Příklad 6.
$\begin{bmatrix} 0.85 \\ 0.20 \end{bmatrix} \cdot [0.12] = \begin{bmatrix} 10.2\% \\ 2.4\% \end{bmatrix}$, tj. u mužů kosmetiku již používajících vzroste prodej o 10.2%, zatímco u mužů, kteří tuto kosmetiku zatím nepoužívají vzroste prodej o pouhá 2.4%.

Příklad 7*.
(a) $A = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.75 \end{bmatrix}$; součin matic $B \cdot A = 0.425$ dává celkový počet lidí, používajících veřejnou dopravu. Po měsíci se tedy počet lidí využívajícíh veřejnou dopravu zvýšil z 25% na 42.5%, tj. o 17.5%
(b) změny po dvou měsících získáme součinem matic $B_1 \cdot A = \begin{bmatrix} 0.425 & 0.575 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.3 \end{bmatrix} = 0.5125$, tzn. po dvou měsících počet již bude použíat veřejnou dopravu 51.25% lidí (nárůst oproti prvnímu měs. o 8.75%). Podobně po třetím měs. dojde k nárůstu oproti druhému měs. o 4.375%.

Kreativní úlohy.

Příklad 1.
(a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
(b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Příklad 2.
řádkové součty - počty přihrávek vyslaných od jednotlivých hráčů; sloupcové součty - počty všech přihrávek přijatých daným konkrétním hráčem. Např. celkový počet přihrávek přijatých obránci - součet podtržených sloupcových součtů - hovoří o intenzitě tlaku na obranu nebo naopak celkový počet přihrávek přijatých neobránci - hovoří o intenzitě útoku atd.

Příklad 3.
$\frac{1}{2}(A+B) = \begin{bmatrix} 33 & 26 \\ 57 & 77 \end{bmatrix}$

Příklad 4.
(a) např. $X \in \{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}, \ldots\}$ (b) $X = [\frac{1}{13}]$ (c) $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Příklad 5.
(a) např. $U = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) matice z bodu (a), $V \cdot U = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Příklad 6.
(a) žádná (b) nilpotentní $\forall x \in \mathbf{R} : A^3 = 0$

Příklad 7*.
(a) The labor cost for producing one „model B“ calculator in California is
$(0.25, 0.20, 0.05) \cdot \begin{bmatrix} 15 \\ 12 \\ 4 \end{bmatrix} = \$6.35$

(b) $M \cdot N = \begin{bmatrix} 3.65 & 3.00 \\ 6.35 & 5.20 \end{bmatrix}$ - the whole costs for producing both model calculators.

Příklad 8.
$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

Příklad 9.
platí $(A+B)^2 = 2(A^2 + B^2)$

Příklad 10.
$X1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $X2 = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$ $X3 = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$ $X4 = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Příklad 11.
Pravděpodobnost, že bude v sobotu pršet je rovna prvku p_{11}^3 matice P^3, což je přibližně 12.7%.

Kapitola 2.3: Lineární rovnice a nerovnice

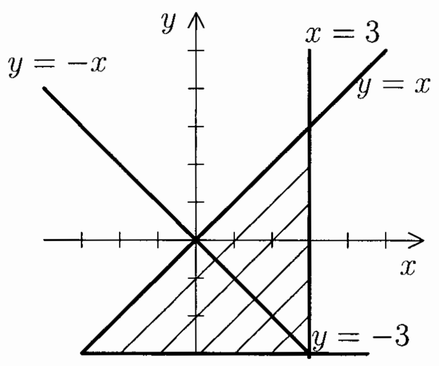
Úlohy k řešení

Příklad 1.
(a) $\vec{x} = \left(-\frac{13}{17}, \frac{29}{17}\right)$ (b) $\forall \vec{x} \in V_2 : (x_1, 4 + 3x_1)$ (c) nemá řeš. (d) $x_1 \geq -\frac{13}{17}, x_2 \leq \frac{29}{17}$
(e) nemá řeš.

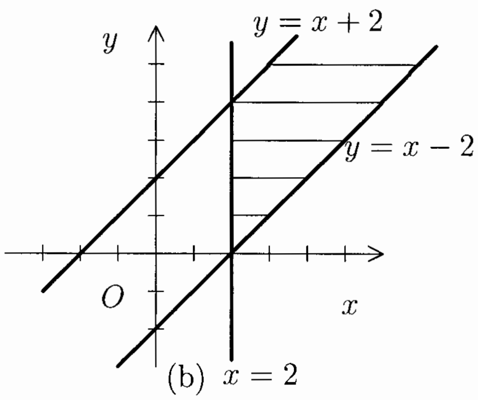
Příklad 2.
(a) $x_1 = \frac{47}{17}, x_2 = \frac{5}{17}$ (b) $x_1 = x_2 = 0$ (c) nekonečně mnoho řeš. $x_2 = t, x_1 = 2 + t, t \in \mathbf{R}$ (d) $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}$
(e) nemá řeš. (f) $x_1 = x_2 = 0$ (g) nemá řeš. (h) $x_1 = -1, x_2 = 2$

Příklad 3.
(a) $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$ (b) $-2 \leq x \leq 2,\ -1 < y < 1$
(c) $-2 < x < 2,\ -1 \leq y \leq 1$ (d) $0 < x < 1,\ y < 1 - x$

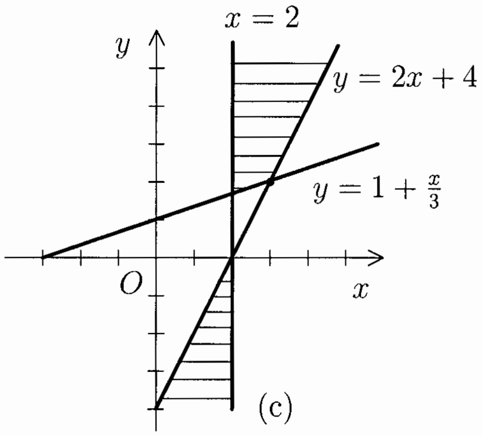
Příklad 4.

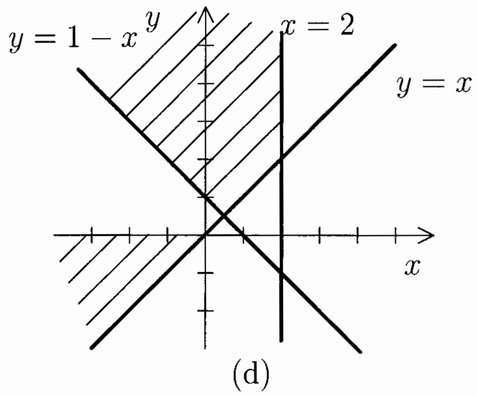


(a)



(b)





Příklad 5.

(a) $X = \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \end{bmatrix}$ (b) nemá řešení (c) $X = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

Příklad 6.

(a) lib. $X = \begin{bmatrix} x & 1+x \end{bmatrix}, x \in \mathbf{R}$ (b) $X = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ (c) $X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$

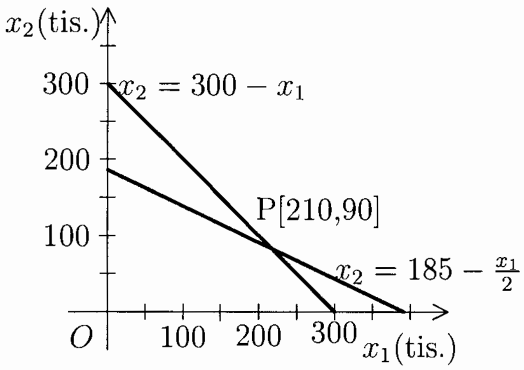
Aplikační úlohy k řešení

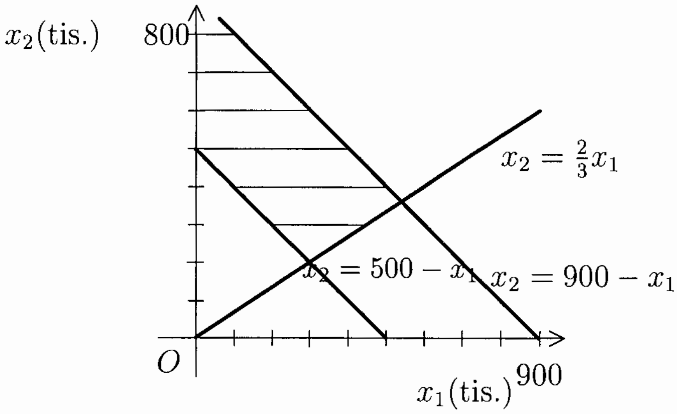
Příklad 1.

$x + y = 300000$
$0.10x + 0.20y = 39000$

Příklad 2.

$500 \leq x + y \leq 900$
$0.1x + 0.25y \geq 0.16(x + y)$





Příklad 3.

(a) $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.01 & 0.02 \\ 0.02 & 0.05 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.5 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 250, y = 100$, tzn. na dolu Vincenc se musí vytěžit 250 t a na dolu Anna 100 t.

(b) $\begin{matrix} x + 2y \geq 230 \\ 2x + 5y \leq 800 \end{matrix}$

Příklad 4.

$\begin{matrix} 10x + 2y \geq 84 \\ 8x + 4y \geq 120 \end{matrix}, \ 0 \leq x \leq 15$

Příklad 5.

$m = 13, c = 17$

Kreativní úlohy

Příklad 1.

(a) např. $\begin{matrix} x_1 - x_2 = -2 \\ 2x_1 - x_2 = 5 \end{matrix}$ (b) např. $\begin{matrix} x_1 - x_2 = -1 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{matrix}$ (c) $\begin{matrix} x_1 - x_2 = -2 \\ -6x_1 + 6x_2 = 12 \end{matrix}$

Příklad 2.

(a) $\begin{aligned} x_1 - x_2 &\geq -2 \\ 2x_1 - x_2 &\geq 5 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 0 \\ x_1 &< 1 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} x_1 - x_2 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 4 \end{aligned}$ (d) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &> -6 \\ -3x_1 - 3x_2 &< -18 \end{aligned}$

Příklad 3.

(a) $\begin{aligned} x &< 0 \\ y &< 0 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} -\tfrac{3x}{5} + y &\geq \tfrac{11}{5} \\ -\tfrac{4}{3}x + y &\leq \tfrac{11}{3} \\ \tfrac{1}{2}x + y &\leq \tfrac{11}{2} \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} -3x + 7y &\geq 4 \\ x + 5y &\leq 28 \\ -x + y &\leq 2 \\ -3x + y &\leq -2 \end{aligned}$ (d) $\begin{aligned} y &\leq 2 \\ y &\geq x \\ y &\geq -x \end{aligned}$ (e) $\begin{aligned} -\sqrt{3} + y &\leq \sqrt{3} \\ x\sqrt{3} + y &\leq \sqrt{3} \\ y &\geq 0 \end{aligned}$

Příklad 4.

(a) dvě různoběžné roviny - v případě, že jsou jejich normálové vektory lin. nezávislé nebo dvě rovnoběžné roviny - v případě, že jsou jejich normálové vektory lin. závislé.

(b) bod - v případě, že má soustava právě jedno řešení nebo přímka či rovina - v případě, že jsou rovnice navzájem lin. závislé.

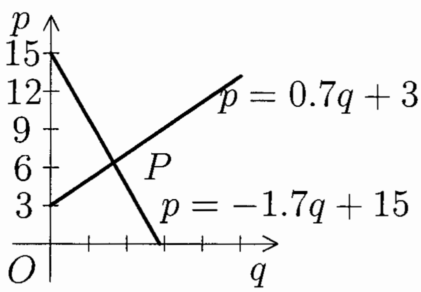
Příklad 5.

(a) $X = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ (b) nemá řešení

Příklad 6*.

(a) $q = 5, p = 6.5$

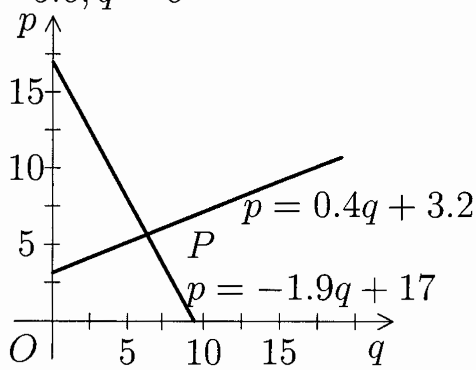
(b)



Příklad 7*.

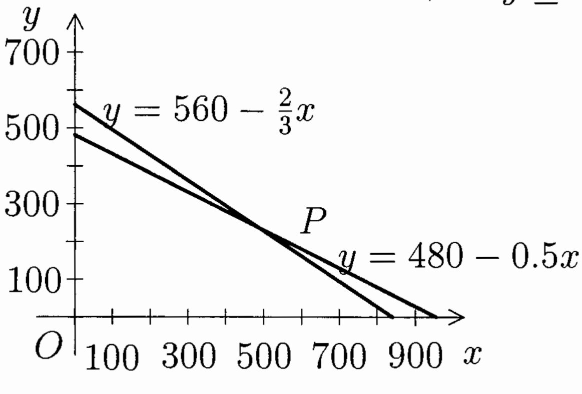
(a) $p = 5.6, q = 6$

(b)



Příklad 8*.

(a) $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.9 & 0.8 \\ 1.8 & 1.2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 864 & 672 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{aligned} 0.9x + 1.8y &\leq 864 \\ 0.8x + 1.2y &\leq 672 \end{aligned}$



Kontrolní otázky ke kapitole 2

Otázka 1.
Jednotkový je každý vektor, jehož norma je rovna 1. Jednotková matice je čtvercová matice, mající na hlavní diagonále 1 a mimo ni 0. Mají význam „jednotky“ při operacích s vektory (resp. maticemi).

Otázka 2.
jako nulový úhel

Otázka 3.
Plán města je rozdělen na čtverce, jejichž vodorovný rozměr je celé číslo a svislý rozměr písmeno, např. muzeum se nachází ve čtveci 3,A.

Otázka 4. nulová matice

Otázka 5. E, J, I

Otázka 6.
jakákoliv diagonála rovnoběžná s hlavní, např. v matici $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ hlavní diagonálu tvoří prvky a_{11}, a_{22}, vedlejší mohou tvořit prvky a_{12}, a_{23}.

Otázka 7.
Pouze čvercové matice mají počet řádků roven počtu sloupců, tj. lze je násobit samy se sebou.

Otázka 8. např. $x + 3 = 6$

Otázka 9. např. $x^2 + 3y = 12$

Otázka 10. $2x_1 - 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 7$

Kapitola 3.1: Lineární závislost a nezávislost

Úlohy k řešení

Příklad 1.
V Gaussově tvaru jsou matice ad (c), (e).

Příklad 2.
Ke třetímu řádku byl přičten druhý, od čtvrtému řádku odečten desetinásobek řádku druhého.

Příklad 3.

1.krok:	od druhého a třetího řádku odečten řádek první, ke čtvrtému řádku 1. řádek přičten
2.krok:	druhý řádek vynásoben -1
3.krok:	od třetího a čtvrtého řádku odečten řádek druhý
4.krok:	třetí řádek vynásoben $\frac{1}{2}$
5.krok:	od čtvrtého řádku odečten dvounásobek třetího
6.krok:	nulový řádek vyřazen

Příklad 4.

(a) 1	(b) 2	(c) 2	(d) 2	(e) 2	(f) 1
(g) 2	(h) 3	(i) 2	(j) 2	(k) 3	(l) 1
(m) 1	(n) 3	(o) 2	(p) 3	(q) 2	(r) 4
(s) 2	(t) 2	(u) 3	(v) 3	(w) 4	(z) 4

Příklad 5.

(a) LNZ	(b) LNZ	(c) LNZ	(d) LZ
(e) LNZ	(f) LNZ	(g) LNZ	(h) LNZ
(i) LNZ	(j) LNZ	(k) LZ	(l) LZ

Příklad 6. tak, aby vzniklá skupina byla závislá:

(a) $(6,6)$ (b) $(3,2,8)$ (c) $(-1.5,0,1,0)$
(d) $(3,3)$ (e) $(18,10,14)$ (f) $(-9,0,6,0,4.5,0,-3,0)$

tak, aby vzniklá skupina byla nezávislá:

(a) $(1,0)$ (b) $(1,0,1)$ (c) $(1,1,0,0)$
(d) $(2,2)$ (e) $(2,0,1)$ (f) $(-1,-1,0,0,1,1,0,0)$

Příklad 7.
$h(A)=h(B)=h(10A)=h(A+B)=h(2A-B)=h(B\cdot A^T)=h(A^T\cdot B)=h(A^T)=3$;
matice $A\cdot B, B\cdot B$ neexistují.

Aplikační úlohy k řešení

Příklad 1.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) nemá řešení (c) E (d) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

(f) E (g) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ (h) NŘ (i) E (j) nemá řešení

Kapitola 3.2: Podprostory prostoru V_n

Úlohy k řešení

Příklad 1.

(a) patří $\vec{v}_2$ (b) oba (c) žádný (d) žádný

Příklad 2.

(a) 2 (b) 2 (c) 2 (d) 4 (e) 3 (f) 3

Příklad 3.

(a) $\vec{v}_B=(\frac{3}{2},\frac{13}{2})$ (b) $\vec{v}_B=(-\frac{291}{8},\frac{53}{8})$ (c) $\vec{v}_B=(4,-2,7)$ (d) soubor netvoří bázi

Příklad 4.

(a) $\vec{v}_B=(\frac{23}{3},-\frac{7}{3})$ (b) $\vec{v}_B=(-\frac{19}{3},-\frac{16}{3})$ (c) $\vec{v}_B=(0,-13)$
(d) $\vec{v}_B=(-10,0)$ (e) $\vec{v}_B=(\frac{19}{26},\frac{31}{26})$ (f) nemá řešení

Příklad 5.

(a) $(1,0)$ (b) $(1,4,1)$ (c) $(3,-1,1,1,0),(3,-1,1,1,1),(3,0,0,0,0)$
(d) $(1,-1,1)$ (e) $(1,0,0,0,0),(1,1,0,0,0)$ (f) $(2,1,1,1)$

Aplikační úlohy k řešení

Příklad 1.

(a) 1 (b) 0 (c) 1 (d) 1 (e) 3 (f) 3

Příklad 2.

(a) V: přímka $x+y=0$; $V^\perp$: přímka k ní kolmá $x-y=0$
(b) V: celá rovina $\Rightarrow$ dim $V^\perp=0$
(c) V: přímka $x=t, y=-t, z=t$; $V^\perp$: rovina na danou přímku kolmá $x-y+z=0$
(d) V: rovina $-y+z=0$; $V^\perp$: přímka kolmá na tuto rovinu $x=0, y=-t, z=t$
(e) V: přímka $x=t, y=0, z=2t$; $V^\perp$: rovina na tuto přímku kolmá $x+2z=0$
(f) V: celý prostor $V_3 \Rightarrow$ dim $V^\perp=0$

Příklad 3.
(a) $\vec{v} = (1,3)$ (b) $\vec{v} = (-1,1)$ (c) $\vec{v} = (1,-1.3)$ (d) $\vec{v} = (1,0)$ (e) $\vec{v} = (0,1)$ (f) $\vec{v} = (1,2)$

Příklad 4.
(a) $(2,-4,1)$ (b) $(2,0,0)$ (c) $(2,-4,1),(1,-1,1)$ (d) $(2,-4,1),(-1,9,0)$
(e) $(1,0,2),(0,1,4)$ (f) $(2,0,-2),(0,1,-1)$ (g) $(1,0,1),(0,-1,-2)$ (h) $(-1,0,-1),(0,1,2)$

Kreativní úlohy ke kapitole 3

Příklad 1. Všechny podsoubory, které mají méně jak 3 prvky jsou lin. nezávislé, podsoubor S je lin. závislý.

Příklad 2. Pro prvky a_{23}, a_{26}, ve kterých je chyba platí $a_{23} + a_{26} = 0$, proto se tato numerická chyba neprojevila na kontrolním sloupci (dvě chyby se vynulovaly navzájem).

Příklad 3.
Bázi prostoru $M_{2\times 2}$ tvoří tyto matice: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$
Libovolnou lin. kombinaci matic prostoru $M_{2\times 2}$ lze pak vyjádřit tímto způsobem:
$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\dim(M_{2\times 2}) = 4.$

Příklad 4.
např. $S : (1,2),(1,2),(1,1),(1,2)$

Příklad 5.
Nezávislý soubor n-složkových vektorů musím mít $\leq$ n vektorů; pokud je počet vektorů >n je vždy lin. závislý.

Příklad 6.
Vektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ jsou ortogonální právě tehdy, když platí: $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$, $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = 0$, $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = 0$. Aby byly tyto vektory lin. nezávislé, musí existovat pouze triviální lin. kombinace těchto vektorů rovná $\vec{o}$. $\vec{o} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3$. Budeme-li postupně tento výraz skalárně násobit po sobě vektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$, dojdeme ke stejnému závěru jako v případě dvou vektorů v zadání: po skalárním vynásobení vektorem $\vec{v}_1$ dostaneme $0 = c_1 \mid\mid \vec{v}_1 \mid\mid^2 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cdot 0$ (užita ortogonalita), tzn. daná rovnost platila, musí být koeficient $c_1 = 0$. Podobně pro koeficienty c_2 a c_3.

Příklad 7. Navzájem ortogonálních vektorů je tolik, kolik je vektorů báze.

Příklad 8. (a) $x \in \mathbf{R} - \{25\}$ (b) $x = 25$

Příklad 9. Souřadnice vektoru $(1,-4)$ v dané bázi jsou $(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{6})$.

Příklad 10. např. $B_1 : (1,0),(0,1); B_2 : (2,1),(-4,-3)$.

Příklad 11. např. $(1,1),(-3,-1)$.

Příklad 12. $\vec{o}$

Příklad 13.
(a) $(1,1,0,0),(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},2,3)$ (b) $(0,1,1,0,0,),(1,0,0,1,0),(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0,1),(0,-\frac{1}{3},\frac{1}{3},0,\frac{1}{3})$
(c) $(1,1,1),(-\frac{4}{3},\frac{5}{3},-\frac{1}{3}),(0,0,0)$ (d) $(1,1,0,0),(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,0),(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3},1)$

Příklad 14.
(a) $x \in \mathbf{R} - \{0, -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{57}}{6}\}$ (b) $x \in \{0, -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{57}}{6}\}$ (c)nemá řešení

Příklad 15.
(a) $(1,1)$ (b) $(1,3),(3,1)$ (c) nelze (d) $(1,3),(3,-1)$

Kontrolní otázky ke kapitole 3

Otázka 1.

Jeden vektor je lin. závislý právě tehdy, když je nulový; jinak je nezávislý. Dva vektory $\vec{u}, \vec{v}$ jsou lin. závislé, právě tehdy, když platí $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$, jinak jsou lin. závislé.

Otázka 2.

Vezmeme-li lin. kombinaci daného souboru vektorů $c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \ldots + c_{n-1}\vec{u}_{n-1} + c_n\vec{o} = \vec{o}$, pak koeficient c_n může být nenulový (ostatní nulové). V tomto případě se však už nejedná o triviální lin. kombinaci, dané vektory musí být tedy lin. závislé.

Pokud máme v daném souboru dva vektory stejné (třeba $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$), pak pro jejich lin. kombinaci $\vec{o} = 1 \cdot \vec{u}_1 + (-1) \cdot \vec{u}_2 + c_3\vec{u}_3 + \ldots + c_n\vec{u}_n$, kde $c_3 = c_4 = \ldots = c_n = 0$ platí, že získáváme lin. kombinaci, která není triviální.

Otázka 3.

Hodnost nulové matice rovna 0, hodnost jednotkové matice $E_{n\times n}$ je n.

Otázka 4.

Soubor 4 vektorů prostoru V_n může mít hodnost ≤ 4, pokud $n \geq 4$ (ukázky jsou z V_4).
Příklady: čtyři nulové vektory - $h = 0$
$(1,1,1,1), (2,2,2,2), (3,3,3,3), (4,4,4,4)$ - $h = 1$
$(1,1,1,1), (1,2,0,0), (2,2,2,2), (2,4,0,0)$ - $h = 2$
$(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,1), (2,0,0,0)$ - $h = 3$
$(1,1,1,1), (1,1,1,0), (1,1,0,0), (1,0,0,0)$ - $h = 4$

Otázka 5.

Manipulace se sloupci je ekvivalentní manipulaci s řádky, stačí matici transponovat a z úpravy sloupců se stává úprava řádků, platí $h(A) = h(A^{\mathrm{T}})$.

Otázka 6.

V lib. V_n máme kanonickou bázi $\mathcal{E}_n$ a ta má n vektorů.

Otázka 7.

$\dim(P^{\perp}) = 1$, např. $\vec{v} = (1,2,3) \notin P \cup P^{\perp}$, jedině $\vec{o} \in P \cap P^{\perp}$.

Otázka 8. Triviální podprostor P je tvořený pouze nulovým vektorem, jeho dimenze je 0. $P^{\perp} = V_n$.

Otázka 9. 0 až 3.

Otázka 10. Jsou to $1, -3, 10$.

Otázka 11. Pokud známe bázi B, pak je jednodušší určit složky vektoru, když známe jeho souřadnice v bázi B.

Kapitola 4.1: Determinanty

Úlohy k řešení

Příklad 1.

(a) 10 (b) 1 (c) $a - b$ (d) -17

Příklad 2.

(a) 2 (b) 437 (c) 941 (d) $4a$ (e) 1 (f) $-9n$

Příklad 3.

(a) $x = \frac{9}{2}$ (b) $x = -\frac{1}{2}$ (c) $x = 8$ (d) $x \in \{\frac{5}{2}, \frac{2}{3}\}$ (e) $x \in \{2,3\}$ (f) $x = 2$

Příklad 4.

(a) 24 (b) 48 (c) 12 (d) 840 (e) 112 (f) 14 (g) $4t - z - y - x$ (h) 48

Příklad 5.
(a) 12 (b) 4 (c) -16 (d) 120 (e) 224 (f) 2 (g) 24 (h) 531

Aplikační úlohy k řešení

Příklad 1.
(a) $x_1 = \frac{42}{31}, x_2 = \frac{23}{31}$ (b) $x_1 = -\frac{75}{16}, x_2 = \frac{163}{16}$ (c) nemá řešení

Příklad 2.
(a) $(53, 154, 87)$ (b) $(0, 0, 0)$ (c) $(-6, 3, -6, 3)$ (d) $(-5, -7, -2, 8)$

Příklad 3.
(a) největší $A_2B_2C_2$, nejmenší $A_3B_3C_3$ (b) největší $A_2B_2C_2D_2$, nejmenší $A_3B_3C_3D_3$

Kreativní úlohy

Příklad 1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = -2$ **Příklad 2.** $\det A^{10} = (\det A)^{10} = (-1)^{10} = 1$

Příklad 3. $\begin{bmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 6 & 8 & 3 \\ 1 & 5 & 9 \end{bmatrix}$ **Příklad 4.** (a) $x = -\frac{1}{2}, \det = \frac{17}{4}$, (b) pro $x \to \pm\infty : \det \to \pm\infty$

Příklad 5. (a) $x = \frac{4}{3}$ (b) $z = \frac{617}{11}$ (c) $y = \frac{41}{3}$

Příklad 6.
(a) $5 = \pm\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 7 & 1 \end{vmatrix}$ (b) $100 = \pm\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ (c) $0 = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix}$

Příklad 7.
(a) $\det = 6 < \text{per} = 10$ (b) $\det = 16 > \text{per} = 0$ (c) $\det = -7 < per = 89$
(d) $\det = 0 < \text{per} = 64$ (e) $\det = -146 < \text{per} = 306$ (f) $\det = -3 < \text{per} = 9$

Příklad 8. Hodnost je 10. **Příklad 9.** např. $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 41 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Příklad 10. Ne, hodnost je pouze 2 **Příklad 11.** Je to reg. matice (hodnost = řád)

Kapitola 4.2: Inverzní matice.

Úlohy k řešení

Příklad 1.
(a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) sing. (c) sing. (d) $\begin{bmatrix} -\frac{31}{308} & -\frac{1}{154} \\ -\frac{1}{308} & \frac{5}{154} \end{bmatrix}$ (e) sing.

(f) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (g) sing. (h) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (i) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (j) sing.

Příklad 2.

(a) $\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{7}{2} & 3 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) matice se invertuje na sebe samu (c) $\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (g) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

Příklad 3. $A^{-2} \cdot A^{-3} = A^{-5} = \begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$.

Příklad 4.

$C^{-2} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $C^{-3} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $C^{-4} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Příklad 5.

(a) $r \neq 6; M^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2(r-3)} & \frac{r}{2(r-3)} \\ \frac{1}{r-3} & -\frac{3}{r-3} \end{bmatrix}$ (b) $r \in \mathbf{C} - \{\pm 2i\}, M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4+r^2} & -\frac{r}{4+r^2} \\ \frac{r}{4+r^2} & \frac{4}{4+r^2} \end{bmatrix}$

(c) $r \neq 0 \wedge r \neq -4, M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4+r} & -\frac{1}{4+r} \\ \frac{1}{4+r} & \frac{1}{4(4+r)} \end{bmatrix}$

Aplikační úlohy k řešení

Příklad 1.

(a) $X = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & \frac{22}{3} & 9 & \frac{28}{3} & \frac{43}{3} & \frac{52}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{8}{3} & -3 & -\frac{8}{3} & -\frac{14}{3} & -\frac{17}{3} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & \frac{5}{2} & \frac{23}{2} \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

Příklad 2.

(a) $X = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ (b) $X = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -8 & 3 \end{bmatrix}$ (c) $X = \begin{bmatrix} -11 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ (d) $X = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(e) $X = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{5}{2} & -2 \end{bmatrix}$ (f) $X = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ (g) $X = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ (h) $X = \begin{bmatrix} \frac{14}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{22}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$

Příklad 3. $X = \begin{bmatrix} 32 mil. \\ 27 mil. \end{bmatrix}$.

Příklad 4.

(i) $X = \begin{bmatrix} 12.4 mld \\ 9.2 mld \end{bmatrix}$ (ii) $X = \begin{bmatrix} 16.4 mld \\ 9.2 mld \end{bmatrix}$ (iii) $X = \begin{bmatrix} 25.2 mld \\ 15.6 mld \end{bmatrix}$

Příklad 5.

(i) $X = \begin{bmatrix} 18 mld \\ 15.6 mld \\ 22.4 mld \end{bmatrix}$ (ii) $X = \begin{bmatrix} 42 mld \\ 23.9 mld \\ 23.1 mld \end{bmatrix}$

Příklad 6. $X = \begin{bmatrix} 10 mld \\ 40 mld \end{bmatrix}$. **Příklad 7.** $X = \begin{bmatrix} 50.8\$ \\ 40.8\$ \\ 32.4\$ \end{bmatrix}$.

Kreativní úlohy

Příklad 1.

(a) např. $\begin{bmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1 \end{bmatrix}$ (b) např. $\begin{bmatrix} 1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1&0&0\\0&0&1\\0&1&0 \end{bmatrix}$

Příklad 2. $\det A = \frac{1}{\sqrt[3]{\det A^{-3}}} = \frac{1}{2}$.

Příklad 3.

po úpravě: $X = (B_1 + B_2) \cdot (A_1 + A_2)^{-1}, Y = B_1 - A_1 X$, může se stát, že matice $A_1 + A_2$ není regulární.

Příklad 4. $X = \begin{bmatrix} 28bil. \\ 26bil \end{bmatrix}$. **Příklad 5.** $X = \begin{bmatrix} 30bil. \\ 34bil. \\ 36bil \end{bmatrix}$.

Kontrolní otázky ke kapitole 4

Otázka 1. např. $\begin{bmatrix} 2&0&0&0&0&0&0\\0&2&0&0&0&0&0\\0&0&2&0&0&0&0\\0&0&0&2&0&0&0\\0&0&0&0&13&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$.

Otázka 2. -5 **Otázka 3.** neexistuje nebo je roven 0.

Otázka 4. singulárních. **Otázka 5.** taková neexistuje

Otázka 6. násobení matic není komutativní.

Otázka 7. např. $\begin{bmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&1\\0&1&0\\1&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&-1\\0&1&0\\1&0&0 \end{bmatrix}$.

Kapitola 5.1: Analýza soustavy lineárních rovnic

Aplikační úlohy k řešení

Příklad 1.

(i) $\begin{bmatrix} 1&-2&1\\3&-1&6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1\\x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\\3 \end{bmatrix}$

$(1,-2,1) \cdot \vec{x} = 1$
$(3,-1,6) \cdot \vec{x} = 3$

$\begin{bmatrix} 1\\3 \end{bmatrix} \cdot x_1 + \begin{bmatrix} -2\\-1 \end{bmatrix} \cdot x_2 + \begin{bmatrix} 1\\6 \end{bmatrix} \cdot x_3 = \begin{bmatrix} 1\\3 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 1&-2\\3&-1\\1&1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1\\x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\\3\\2 \end{bmatrix}$

$(1,-2) \cdot \vec{x} = 1$
$(3,-1) \cdot \vec{x} = 3$
$(1,1) \cdot \vec{x} = 2$

$\begin{bmatrix} 1\\3\\1 \end{bmatrix} \cdot x_1 + \begin{bmatrix} -2\\-1\\1 \end{bmatrix} \cdot x_2 = \begin{bmatrix} 1\\3\\2 \end{bmatrix}$

Příklad 2.

(i) $h(A) = h(A^*) < 3 \Rightarrow \infty$ řeš. (ii) $h(A) \neq h(A^*) \Rightarrow 0$ řeš.

Příklad 3.

(a) $h(A) = h(A^*) = 2 \Rightarrow!$ řeš. (b) $h(A) = 1, h(A^* = 2 \Rightarrow 0$ řeš.

(c) $h(A) = 1 = h(A^*) < 2 \Rightarrow \infty$ řeš. (d) $h(A) = h(A^*) = 3 \Rightarrow!$ řeš.

(e) $h(A) = 2 = h(A^*) \Rightarrow!$ řeš. (f) $h(A) = 3 = h(A^*) \Rightarrow!$ řeš.

(g) $h(A) = 3 = h(A^*) \Rightarrow \infty$ řeš.

Příklad 4.

(a) $p = 4 : h(A) = 1, h(A^*) = 2 \Rightarrow 0$ řeš., $p \neq 4 : h(A) = h(A^*) = 2 \Rightarrow !$ řeš

(b) $\forall p \in \mathrm{R}$ 0 řeš.

(c) $\forall p \in \mathbf{R} : h(A) = h(A^*) = 2 \Rightarrow !$ řeš.

Kapitola 5.2: Regulární soustava rovnic

Úlohy k řešení

Příklad 1.

(a) $k \neq \frac{1}{2}; x_1 = \frac{5k}{2k-1}, x_2 = -\frac{5}{2k-1}$

(b) $\forall k \in \mathbf{R} : x_1 = \frac{10k}{2k^2+1}, x_2 = -\frac{5}{2k^2+1}$

(c) $\forall k \in \mathbf{R} : x_1 = 3k, x_2 = -2k$

(d) $k \neq \frac{2}{3} : x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = -1$

(e) $k \in \mathbf{R} - \{2, 3\} : x_1 = \frac{2k^2-7k+6}{k^2-5k+6} = \frac{2k-3}{k-3}, x_2 = \frac{6-k}{6-5k+k^2}, x_3 = -\frac{k}{6-5k+k^2}$

Příklad 2.

Hodnoty parametrů neovlivňují hodnosti matic daných soustav, neovlivňují tedy ani jejich řešitelnost.

(a) $x_1 = -p + 25, x_2 = 2p - 25$ (b) $x_1 = 2p, x_2 = -\frac{p}{2}$ (c) $x_1 = 3p - q, x_2 = -2p + q$

(d)$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{a}{2}, x_2 = \frac{1}{2} + \frac{a}{2}, x_3 = \frac{5}{2} - \frac{a}{2}$ (e) $x_1 = -c + b, x_2 = -a + c, x_3 = a + c - b$

Příklad 3.

(a) $x = 1, y = 2, z = 3, u = -1$ (b) $x = 1, y = -1, t = 1, z = -1$

Aplikační úlohy k řešení

Příklad 1.

(a) $x = \frac{87}{13}, y = \frac{41}{13}$ (b) $x = 3, y = 4, z = 5$

(c) $x = \frac{4}{83}, y = \frac{22}{83}$ (d) $x = \frac{15}{13}, y = \frac{3}{13}, z = \frac{47}{13}$

(e) $x = 1, y = -1, z = -1, u = 1$ (f) $x = 1, y = -1, z = 1, u = -1, v = 1$

Příklad 2.

(a) $q = \frac{73}{30}, k = -\frac{5}{6}$ (b) $q = -\frac{1}{7}, k = \frac{16}{35}$ (c) $q = -\frac{3}{2}, k = 3$ (d) $q = \frac{1}{9}, k = \frac{19}{54}$

Příklad 3.

(a) $q = 3, k_1 = \frac{3}{2}, k_2 = -\frac{3}{2}$ (b) $q = \frac{2}{9}, k_1 = \frac{13}{27}, k_2 = 0$

Příklad 4*.

$x_1 \ldots$ hodiny agentury A, $x_2 \ldots$ hodiny agentury B

(a) $x_1 = 10, x_2 = 15$ (b) $x_1 = 15, x_2 = 10$ (c) $x_1 = -\frac{n}{20} + \frac{t}{20}, x_2 = \frac{3n}{40} - \frac{t}{40}$

Příklad 5*.

$x_1 \ldots$ počet člunů pro jednu osobu, $x_2 \ldots$ počet čl. pro dvě osoby, $x_3 \ldots$ pro 4 osoby: $x_1 = 20, x_2 = 220, x_3 = 100$.

Kapitola 5.3: Homogenní a nehomogenní soustavy

Úlohy k řešení

Příklad 1.

(a) $\dim(P) = 0$ (b) $\dim(P) = 1$ (c) $\dim(P) = 1$
(d) $\dim(P) = 1$ (e) $\dim(P) = 1$ (f) $\dim(P) = 2$

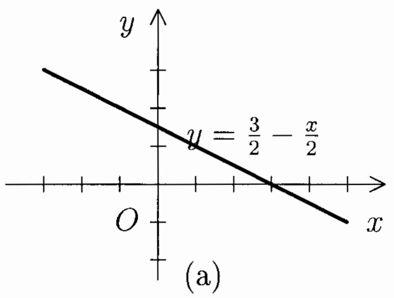
Příklad 2.

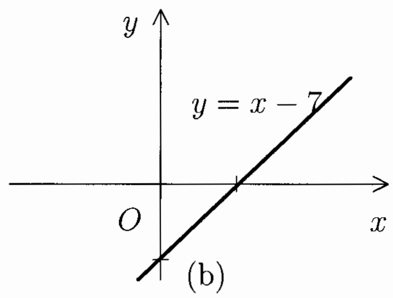
(a) $B : (0,0,0); x_1 = x_2 = x_3 = 0$ (b) $B : (-1,0,1); \vec{x} = c_1 \cdot (-1,0,1)$
(c) $B : (-1,1,1); \vec{x} = c_1 \cdot (-1,1,1)$ (d) $B : (-1,1); \vec{x} = c_1 \cdot (-1,1)$
(e) $B : (-10,7,6,1); \vec{x} = c_1 \cdot (-10,7,6,1)$
(f) $B : (0,-3,2,1), (1,-1,0,0); \vec{x} = c_1 \cdot (0,-3,2,1) + c_2 \cdot (1,-1,0,0)$

Příklad 3.

(a) $\vec{x} = c_1 \cdot (-1,-2,1) + (2,-1,0)$
(b) $\vec{x} = c_1 \cdot (-10,7,6,1) + (-101,71,51,0)$
(c) $\vec{x} = c_1 \cdot (-1,0,1) + (-2,11,0)$
(d) $\vec{x} = c_1 \cdot (-15,-3,1,0,26) + c_2 \cdot (8,4,0,1,-17) + (5,1,0,0,-9)$

Příklad 4.





Aplikační úlohy k řešení

Příklad 1.

(a) $B : (1,0,0,0,0), (0,-2,1,0,0), (0,-3,0,1,0), (0,-1,0,0,1)$ (b) $B : (1,0,0)$
(c) $B : (1,2,-1,0), (0,2,-1,1)$ (d) $B : (1,0,1,-2)$
(e) $B : (1,5)$ (f) $B : (1,0,0,0,0), (0,1,0,0,0), (0,0,0,0,1)$

Příklad 2.

$\vec{x} = c \cdot (0.5,-1.5,1) + (-1,5,0), c \in \mathbf{R}$

Příklad 3.

(a) $\vec{x} = c \cdot (1,-4,1) + (0,45,-10), c \in \mathbf{R}$ (b) $\vec{x} = c \cdot (1,-4,1) + (0,50,-10)$

Příklad 4.

$\vec{x} = c_1 \cdot (-0.22,-0.11,1,0) + c_2 \cdot (-0.72,0.26,0,1) + (233.3,41.67,0,0); c_1, c_2 \in \mathbf{R}$

Kreativní úlohy ke kapitole 5

Příklad 1. např. $0x_1 + 0x_2 = 1$

Příklad 2.

(a) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 8 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 12 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$

Příklad 3.
(a) $(1,0,0,0,0),(0,-2,1,0,0),(0,-\frac{3}{5},-\frac{6}{5},1,0),(0,-\frac{1}{4},-\frac{1}{7},-\frac{3}{14},1)$ (b) $(1,0,0)$
(c) $(0,2,-1,1),(1,\frac{1}{3},-\frac{1}{6},-\frac{5}{6})$ (d) $(1,0,1,-2)$
(e) $(1,5)$ (f) $(1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0),(0,0,0,0,1)$

Příklad 4*. $\vec{x}=c_1\cdot(1,-2,1,0)+c_2\cdot(0,0,-1,1)+(0,-1,6,0)$

Příklad 5*. $\vec{x}=(7,\frac{13}{2})$

Kontrolní otázky ke kapitole 5

Otázka 1.
např. soustava $\begin{array}{r} 2x_1+x_2=0 \\ -4x_1-2x_2=1 \end{array}$

Otázka 2.
právě jedno (Cramerovým pravidlem jsou řešitelné soustavy regulární)

Otázka 3.
Když obsahuje pouze jednu neznámou s koeficientem různým od 0.

Otázka 4.
(a) nekonečně mnoho nebo žádné
(b) žádné, právě jedno nebo nekonečně mnoho
(c) žádné, nekonečně mnoho nebo právě jedno
(d) žádné nebo nekonečně mnoho

Otázka 5.
(a) $\begin{array}{r} x+y=0 \\ x-2y=0 \end{array}$ (b) $\begin{array}{r} x+y=0 \\ 2x+2y=0 \end{array}$ (c) $\begin{array}{r} x+y=1 \\ x-2y=3 \end{array}$ (d) $\begin{array}{r} x+y=1 \\ 2x+2y=2 \end{array}$
(e) $\begin{array}{r} x+y=1 \\ 2x+2y=2 \end{array}$ (f) $\begin{array}{r} x+y=1 \\ 2x+2y=0 \end{array}$ (g) $\begin{array}{r} x+y=114 \\ x-y=108 \end{array}$ (h) $\begin{array}{r} x+y=0 \\ 2x+2y=0 \end{array}$

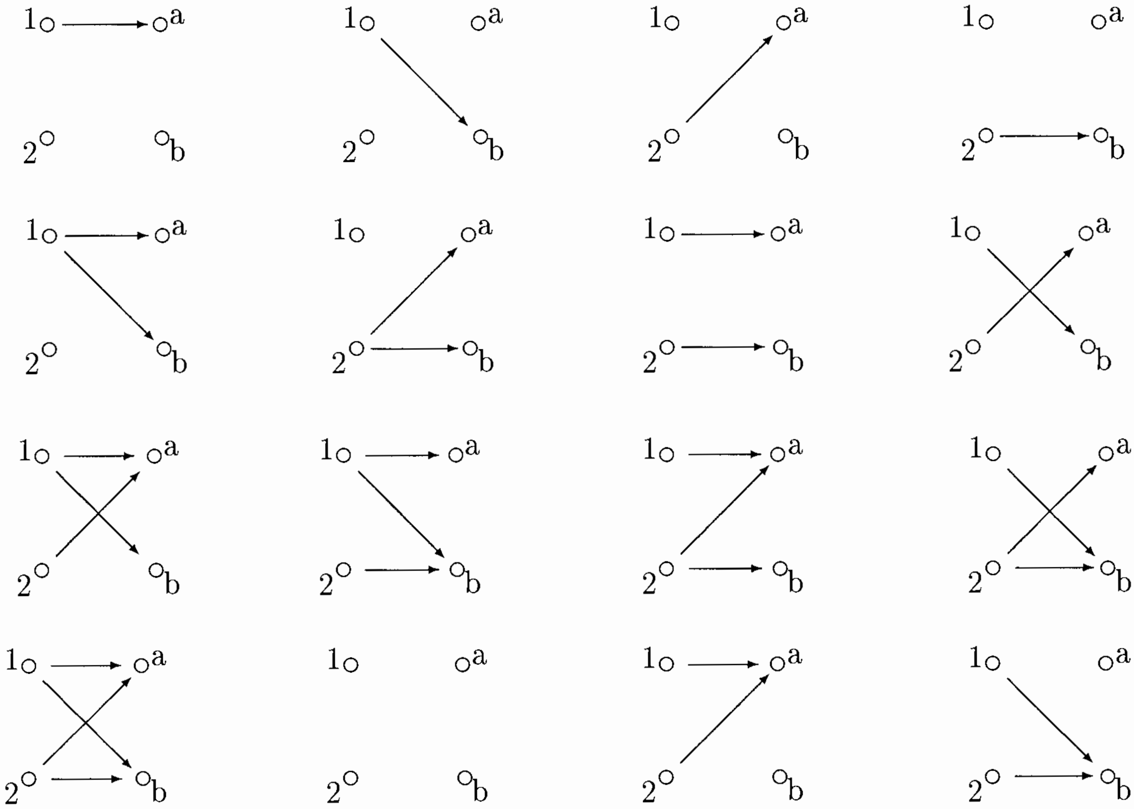
Otázka 6.
$$\begin{array}{r} x-y+z=0 \\ -x+\ \ z=0 \\ 3x-3y+3z=0 \end{array}$$

Kapitola 6.1: Relace

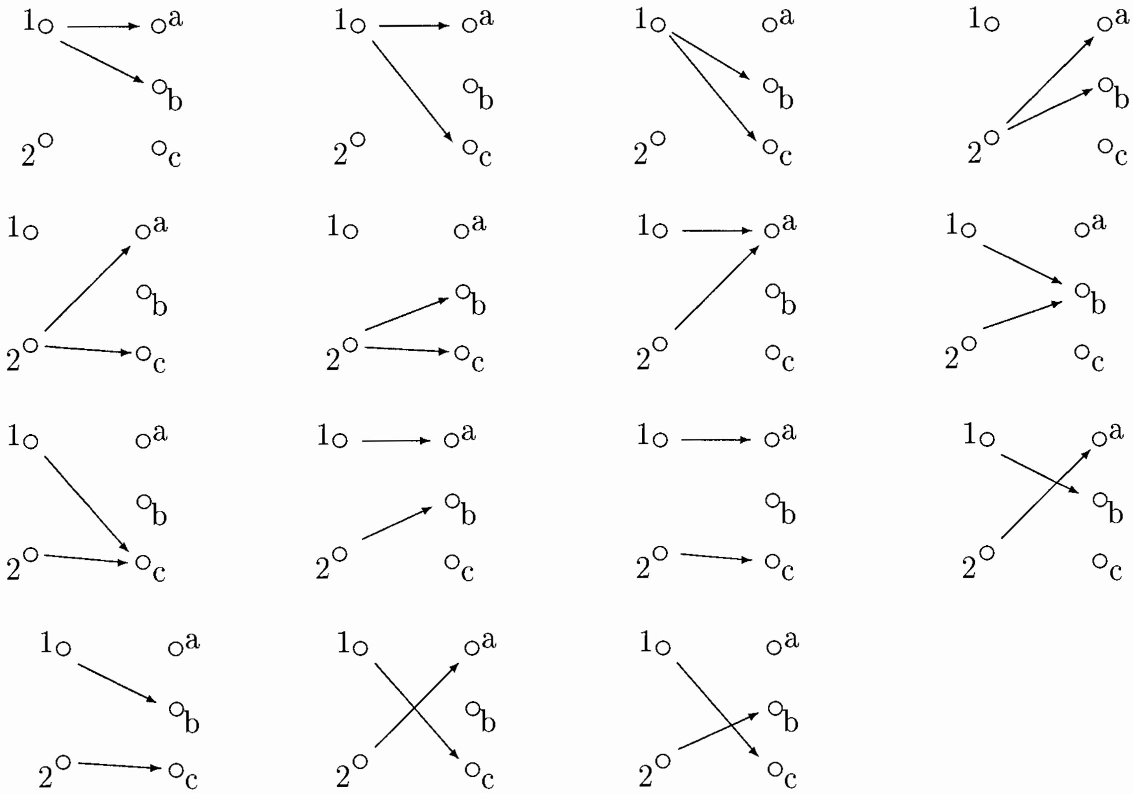
Úlohy k řešení

Příklad 1.

Počet relací z množiny $\{1,2\}$ do množiny $\{a,b\}$ je $2^{2\cdot 2} = 16$.



Příklad 2.



Příklad 3.

(a) matice sousednosti

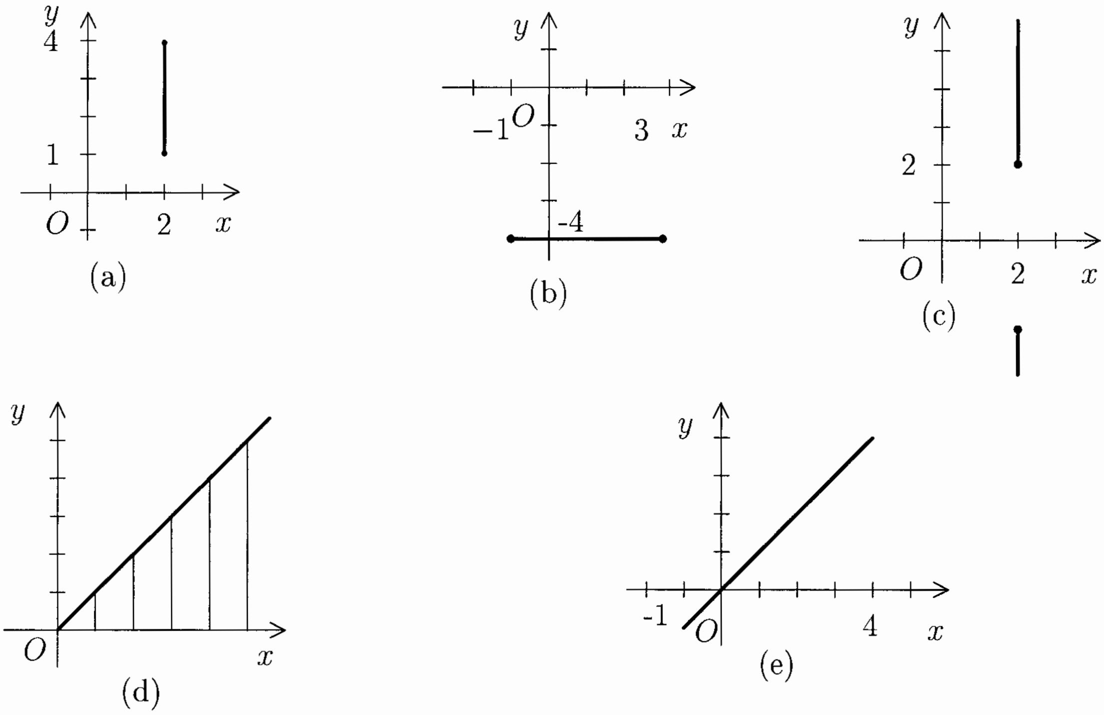
$\alpha : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\alpha^{-1} : \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\beta : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\beta^{-1} : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\gamma : \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\gamma^{-1} : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(b) nejvyšší počet restrikcí $2^3 \cdot 2^3 = 64$ má relace β

(c) $\alpha \circ \beta$ nelze, $\beta \circ \alpha = \{[1,a],[1,b],[2,c]\}$, $\beta \circ \gamma$ nelze, $\gamma \circ \beta = \{[a,1],[a,2],[b,1],[b,2],[c,1]\}$, $\alpha \circ \gamma = \{[a,a],[a,b],[a,c],[b,c],[c,a],[c,b]\}$, $\gamma \circ \alpha = \{[1,1],[1,2],[2,1]\}$

Příklad 4.



Příklad 5.

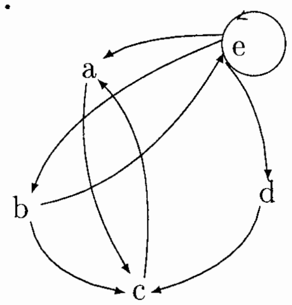
(a) $\sigma = \emptyset$, (b) $\sigma = \{[4,\sqrt{3}],[4,-\sqrt{3}],[3,2],[3,-2]\}$, (c) $\sigma = \{[3,2],[-2,-3]\}$

Příklad 6.

(a) $\sigma^{-1} = \{[3,5],[5,3]\}$ (b) $\sigma^{-1} = \{[7,0],[4,3]\}$ (c) $\sigma^{-1} = \{[3,5],[-3,-5]\}$

(d) $\sigma^{-1} = \{[3,4],[-3,-4],[-3,4],[3,-4]\}$ (e) $\sigma^{-1} = \{\left[\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right]\}$

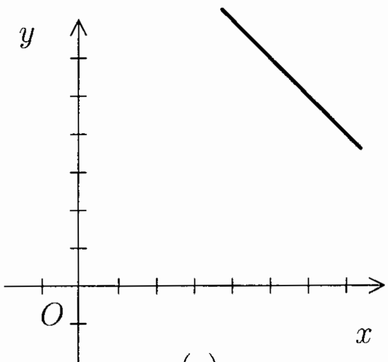
Příklad 7.



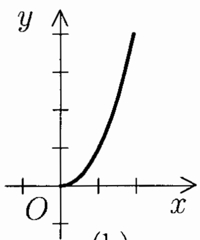
relace není symetrická, reflexivní, tranzitivní ani antisymetrická;
$\sigma^{-1} = \{[c,a],[c,b],[e,b],[a,c],[c,d],[a,e],[b,e],[d,e],[e,e]\}$,
$\sigma \circ \sigma = \{[a,a],[b,a],[b,e],[b,d],[b,b],[c,c],[d,a],[e,a],[e,b],[e,c],[e,d],[e,e]\}$,
$\sigma \circ \sigma \circ \sigma = \{[a,c],[b,a],[b,b],[b,c],[b,d],[b,e],[c,a],[d,c],[e,a],[e,b],[e,c],[e,d],[e,e]\}$

Příklad 8.
$\sigma_2 \; o \; \sigma_1 = \{[3,4]\}$, $\sigma_1 \; o \; \sigma_2 = \emptyset$

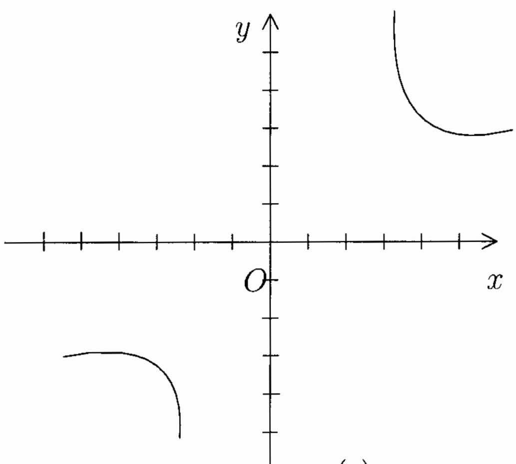
Příklad 9.



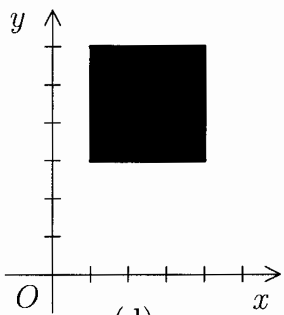
(a)



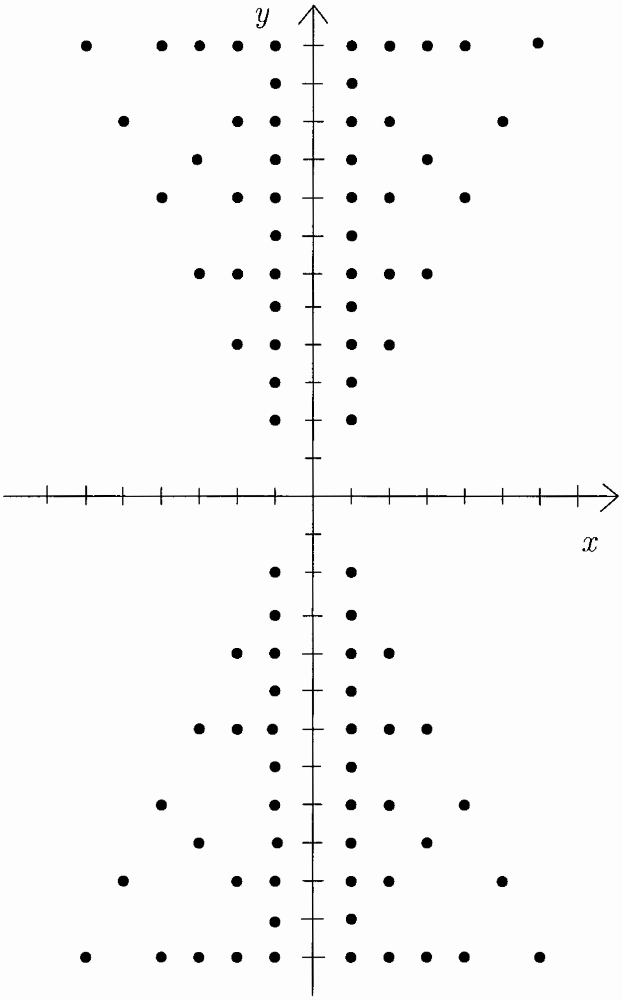
(b)

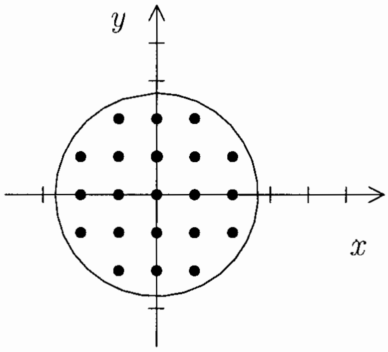


(c)



(d)





Příklad 10. relace (a),(b),(c) nemají žádnou z uvedených vlastností, relace (d) je reflexivní a tranzitivní, relace (e) reflexivní a symetrická, relace (f) symetrická.

Kapitola 6.2: Zobrazení

Úlohy k řešení

Příklad 1. 0.125

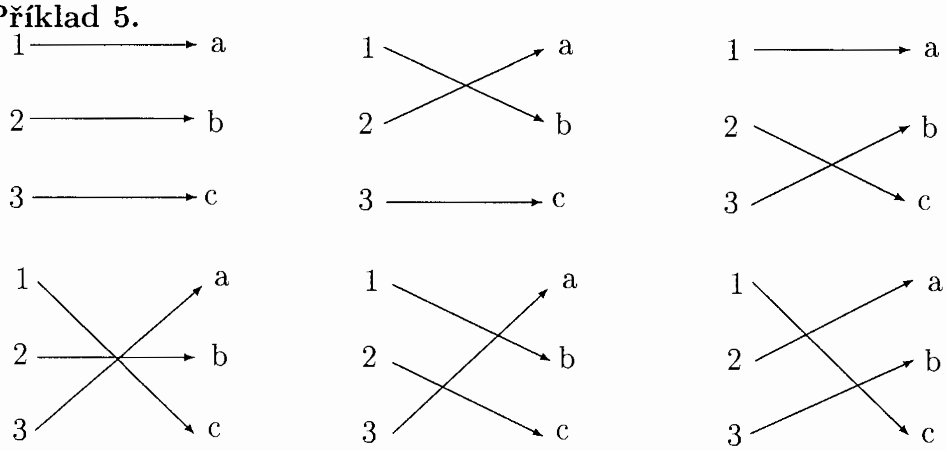
Příklad 2. ano

Příklad 3. injekcí z X do Y je 12, surjekcí z Y do X je 14.

Příklad 4.

(a) 0 (b) $\frac{15}{16}$ (c) 0 (d) $\frac{1}{16}$

Příklad 5.



Příklad 6. jsou

Příklad 7.

(a) $y = \frac{x}{3} - \frac{5}{3}$ (b) $y = 1 - 2x$ (c) $y = \frac{1}{x}$

(d) $y = \frac{2x-4}{1+x}$ (e) $y = \frac{1}{x-1}$ (f) $y = x^2$ pro $x \in (0, +\infty)$

Příklad 8.

(a) $f \circ g : y = 11 - 15x, g \circ f : y = 9 - 15x$ (b) $f \circ g : y = \frac{1}{x} + 2, g \circ f : y = \frac{1}{x+2}$

(c) $f \circ g : y = \frac{\sqrt{x}}{4}, g \circ f : y = \frac{\sqrt{x}}{2}$ (d) $f \circ g : y = 1 + \frac{2}{\sqrt{x}}, g \circ f : y = 2\sqrt{1 + \frac{4}{x}}$

Příklad 9.

zobrazení (a),(b),(c),(d); zobrazení (e), (f) až po restrikci def. oboru.

Kapitola 6.3: Reálná funkce

Úlohy k řešení

Příklad 1.

(a) $\mathbf{R} - \{-1\}$ (b) $(-\infty, -2\rangle \cup \langle 0, 2\rangle$ (c) $(-1, 1\rangle$

(d) $(-\infty, -3\rangle \cup (3, +\infty)$ (e) $x \in \langle 0, \frac{\pi^2}{4}\rangle \cup \langle \frac{\pi^2}{4}(4k-1)^2, \frac{\pi^2}{4}(4k+1)^2\rangle, k \in \mathbf{N}$ (f) $x \neq k\frac{\pi}{2}$

Příklad 2.

(a) $(-\infty, -\sqrt{5}\rangle \cup \langle 0, \sqrt{5}\rangle$ (b) $\langle -7, 0\rangle$

(c) $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$ (d) $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$

(e) $(4, +\infty)$ (f) $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

(g) $x \in \langle 2k^2\pi^2, \pi^2(1+2k)^2\rangle, k \in \mathrm{Z}, k \geq 0$ (h) $\cup\langle 2k\pi, \pi + 2k\pi\rangle, k \in \mathbf{Z}$

(i) $x \neq \frac{2k+1}{2}, x \in \mathbf{N}$ (j) $(-\frac{1}{3}, 1)$

(k) $\cup(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi), k \in \mathbf{Z}$ (l) $\langle k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\rangle, k \in \mathrm{Z}$

Příklad 3.

$g_1 \circ g_2 \circ g_3 : y = \cos\sqrt{1 - (\ln x)^2}$, $g_2 \circ g_1 \circ g_3 : y = \cos\ln\sqrt{1 - x^2}$, $g_1 \circ g_3 \circ g_2 : y = \sqrt{1 - (\cos\ln x)^2}$, $g_3 \circ g_1 \circ g_2 : y = \sqrt{1 - (\ln\cos x)^2}$, $g_2 \circ g_3 \circ g_1 : y = \ln(\cos\sqrt{1 - x^2})$, $g_3 \circ g_2 \circ g_1 : y = \ln\sqrt{1 - (\cos x)^2}$

Příklad 4.

f_1 lichá, f_2 sudá, f_3 sudá, f_4 pro $x \in \langle -1, 1\rangle$ lichá

Příklad 5. $h \circ g : y = 3^{2x}$, $g \circ h : y = 3^{x^2}$

Příklad 6. periodické (a),(d)

Příklad 7.

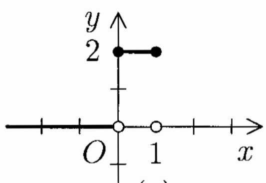
(a) $y = \frac{x}{3} - \frac{19}{3}; \mathbf{R}$ (b) $y = -\sqrt{x}; \langle 0, +\infty)$

(c) $y = \sqrt{x - 1.5}; \langle 1.5, +\infty)$ (d) $y = 2^{\frac{1}{x}}; \mathbf{R} - \{0\}$

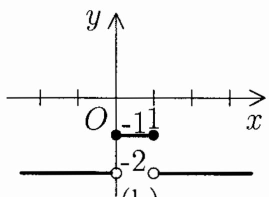
(e) $y = x^2 + 9; \langle 0, +\infty)$ (f) $y = \frac{3}{x} - 3; x \neq 0$

(g) $y = \sqrt{25 - x^2}; \langle -5, 5\rangle$ (h) $y = e^x - 3; \mathbf{R}$

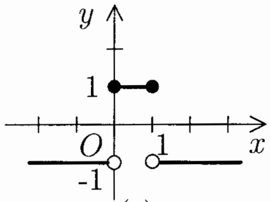
Příklad 8.



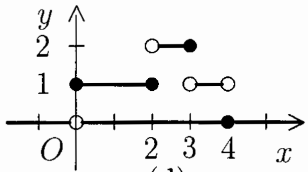
(a)



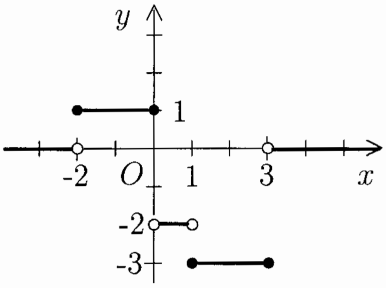
(b)


y
1
O
1
x
-1

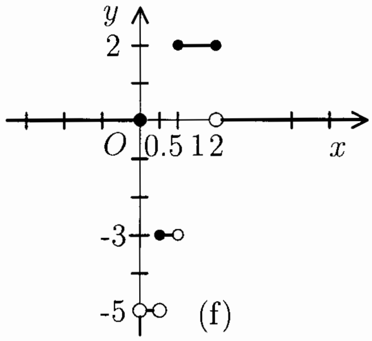
(c)


y
2
1
O
2 3 4
x

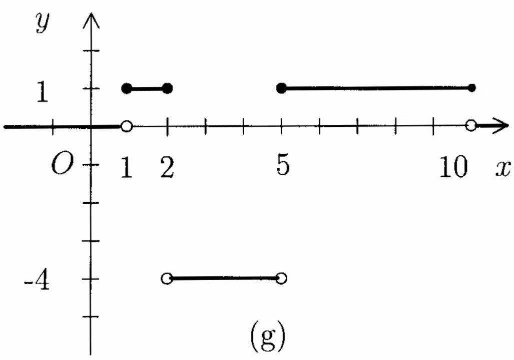
(d)


y
1
-2
O
1
3
x
-2
-3

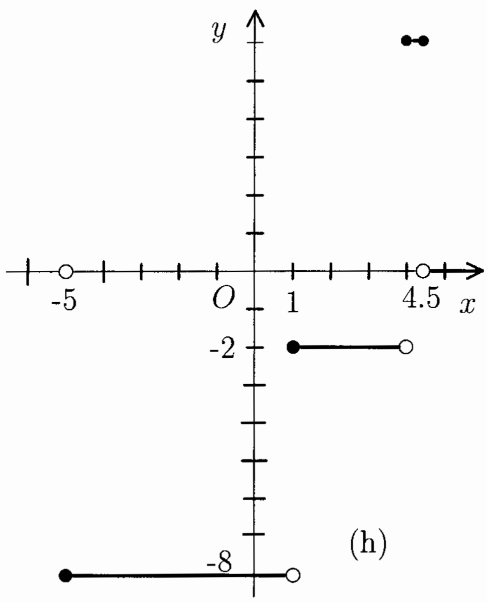
(e)


y
2
O
0.5
1 2
x
-3
-5

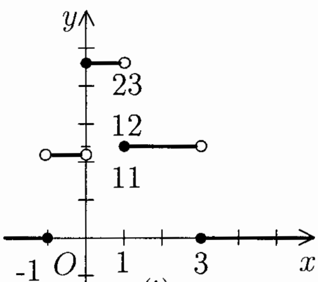
(f)


y
1
O
1 2
5
10
x
-4

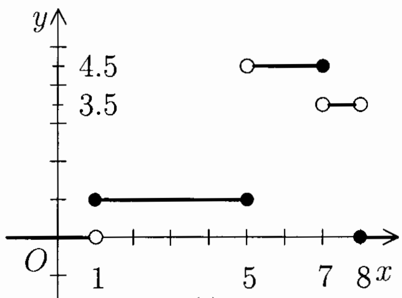
(g)


y
-5
O
1
4.5
x
-2
-8

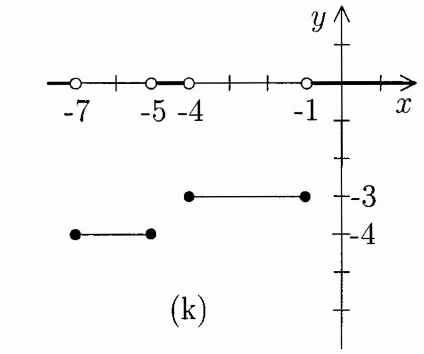
(h)


y
23
12
11
-1
O
1
3
x

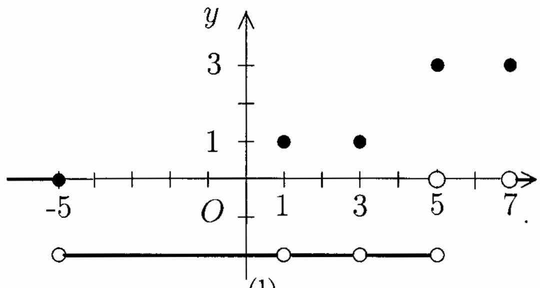
(i)


y
4.5
3.5
O
1
5
7
8
x

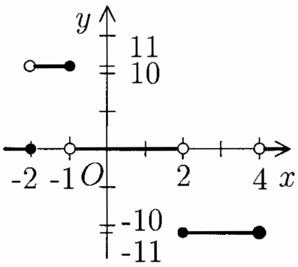
(j)


y
x
-7
-5 -4
-1
-3
-4

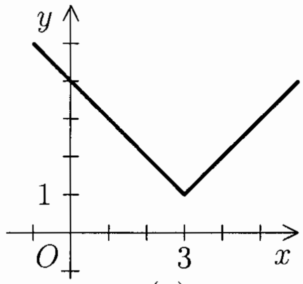
(k)


y
3
1
-5
O
1
3
5
7
x

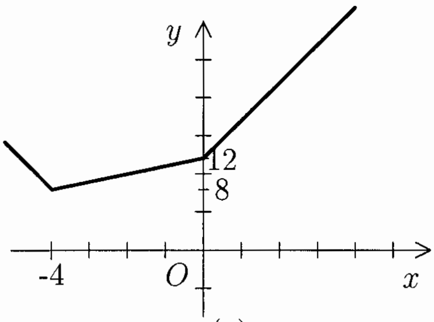
(l)


y
11
10
-2 -1 O
2
4 x
-10
-11

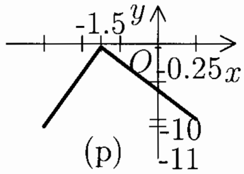
(m)


y
1
O
3
x

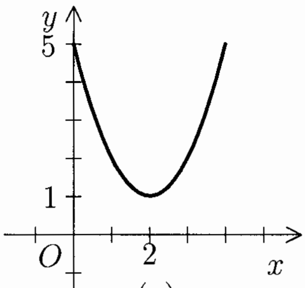
(n)


y
12
8
-4
O
x

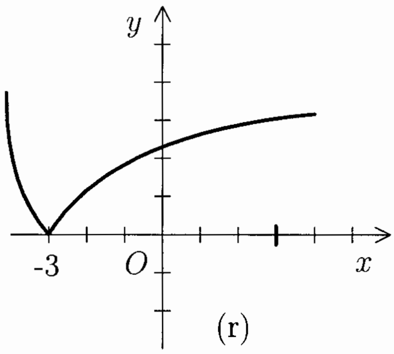
(o)


-1.5
y
O
0.25
x
-10
-11

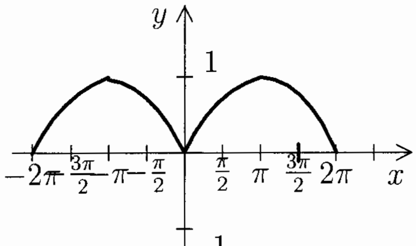
(p)


y
5
1
O
2
x

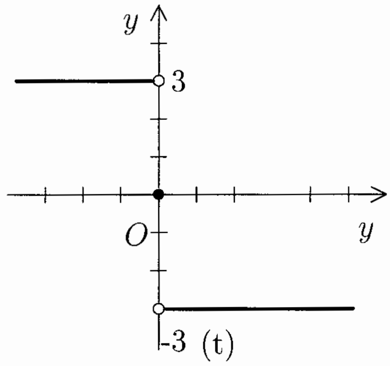
(q)


y
-3
O
x

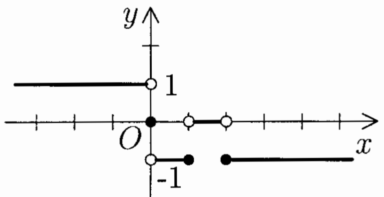
(r)



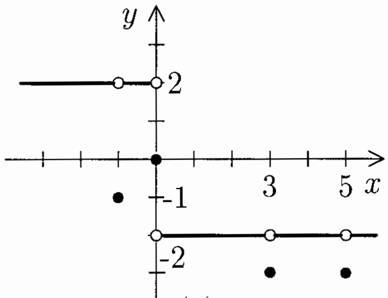
(s)



(t)



(u)



(v)

Kreativní úlohy ke kapitole 6

Příklad 1.

$\sigma_5 \circ \sigma_2$ „x je tetou z matčiny strany“, $\sigma_3 \circ \sigma_3$ „x je prarodič y“, $\sigma_1 \circ \sigma_2$ „x je dědem y“, $\sigma_4 \circ \sigma_3$ „x je strýcem y“, $\sigma_4 \circ \sigma_2$ „x je strýcem y“

Příklad 2.

$\sigma_1 = \{[a,b],[b,a]\}$

např. $\sigma_2 = \{[1,2],[2,1],[2,2]\}$; jsou symetrické.

$\sigma_3 = \{[a,2],[b,1],[2,a],[1,b]\} atd.$

Příklad 3.

např. $I_1 = \langle -2, 3\rangle \to I_2 = \langle -1, 4\rangle$

Příklad 4.

např. $f_1 : \mathbf{N} \to N_1 : y = 2x - 1; f_2 : \mathbf{N} \to N_2 : y = 2x$

Příklad 5.

a) např. identické zobr., středová souměrnost, osová souměrnost; b) např. stejnolehlost se středem S daného šestiúhelníku; c) např. kolmý průmět na přímku A_1A_2.

Příklad 6.

σ je prosté zobr., ale není permutace.

Příklad 7. $p : y = \frac{10}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 - \frac{29}{6}x + 2$

Příklad 8.

$K = \{k : y = \frac{2}{x-a}; a \in \langle -18, -1\rangle\}$

Příklad 9.

Kruhovou výseč s největším obsahem mají kruhy o poloměrech $x = \frac{s}{4}$.

Příklad 10.

Osobní vlak dorazí za 4.125 h, rychlík za 3.722 h.

Kontrolní otázky ke kapitole 6

Otázka 1.
násobení je komutativní, tj. $2^{p \cdot q} = 2^{q \cdot p}$

Otázka 2.
$r = \{[0, A], [0, B], [0, AB], [0, 0], [A, A], [B, B], [AB, AB], [A, AB], [B, AB]\}$

Otázka 3.
Není-li relace zobrazením, má v nějakém řádku 2 nebo více jedniček.

Otázka 4.
Relace $\rho \circ \rho$ a $\rho^{-1} \circ \rho$ lze složit vždy.

Otázka 5.
Pro každé $r \in \mathbf{R} : det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & r \end{bmatrix} = r$. Dané zobrazení je tedy surjekcí.

Otázka 6.
Funkce $y = x^3$ je na celém svém definičním oboru prostá, lze k ní tedy bez problémů zavést funkci inverzní $y = \sqrt[3]{x}$. Funkce $y = x^2$ není na celém svém definičním oboru prostá, zavádíme k ní funkci inverzní jen na části jejího definičního oboru, na které je prostá, tj. na $\langle 0, +\infty)$.

Otázka 7.
Do skupiny elementárních funkcí řadíme konstantu, obecnou mocninu, exponencielu, logaritmus, goniometrické funkce, cyklometrické funkce, hyperbolické funkce a funkce, které lze z těchto odvodit pomocí základních operací a skládáním.

Otázka 8.
např. $y = \frac{1}{x}, y = x, y = -x$

Otázka 9. $s(\mathbf{R}) = \{-1, 0, 1\}$

Otázka 10.
Funkce sin dosahuje pouze hodnot z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$.

Kapitola 7.1: Posloupnosti

Úlohy k řešení

Příklad 1.
(a) $2, 2, 2, 2, 2$ (b) $5, 0, -5, -10, -15$ (c) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}$
(d) $8, 6, 2, -6, -22$ (e) $0, \frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}, 0$ (f) $-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}, -\frac{27}{8}, \frac{81}{16}, -\frac{243}{32}$

Příklad 2.
(a) $a_n = 3n - 2$ (b) $a_n = \frac{1}{n^2}$ (c) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

Příklad 3.
(a) shora omez., kles. (b) shora omez., kles. (c)neomez., alternující
(d) omez., rost. (e) omez., alternující

Příklad 4.
(a) $n \to \infty : a_n \to 1$ (b) $n \to \infty : a_n \to 1$ (c) $n \to \infty : a_n \to \infty$
(d) $n \to \infty : a_n \to 0$ (e) $n \to \infty : a_n \to e$

Příklad 5.
(a) ∞ (b) 0 (c) 0 (d) neexistuje (e) neexistuje (f) neexistuje
(g) 0 (h) neexistuje (i) 0 (j) 5 (k) neexistuje (l) 100

Příklad 6.
(a) 2 (b) ∞ (c) 2 (d) -1 (e) 3 (f) 0
(g) ∞ (h) ∞ (i) 0 (j) 0 (k) 0 (l) $-\infty$

Příklad 7.
$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=4$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=-2$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=3$
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{1}{3}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{b_n}=\sqrt{3}$

Příklad 8.
(a) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-2k)=\infty$, $\lim\limits_{k\to\infty}(n-2k)=-\infty$
(b) $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{n}{k}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{k}=\infty$
(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+k}{n-2k}=1$, $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{n+k}{n-2k}=-\frac{1}{2}$
(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\ldots=(\frac{1}{2})^k$, $\lim\limits_{k\to\infty}\ldots=(\frac{1}{2})^n$
(e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+3}{k^2-3}=\infty$, $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{n^2+3}{k^2-3}=0$
(f) $\lim\limits_{n\to\infty}(kn^2-k)=\infty$, $\lim\limits_{k\to\infty}(kn^2-k)=\infty$ pro $n>1$, a dále $\ldots=0$ pro $n=1$

Aplikační úlohy k řešení

Příklad 1.
Při jednoduchém úrokování vzroste vklad za 10 let na 418 000 Kč, při složeném úrokování vzroste přibližně na 520 820 Kč. Zdvojnásobí se při jednoduchém úrokování za přibližně 11 let, při složeném za 8 let.

Příklad 2.
Při ročním odpisu 7% bude zůstatková hodnota stroje za 15 let asi 841 752 Kč. Aby zbyla stejná zůstatková hodnota musíme lineárně odepisovat ročně 110 550 Kč.

Příklad 3.
Za dva dny bude v kolonii (17. generace) 327.68 mil. bakterií. Množství bakterií překročí 5 mil. přibližně za 30 hod. (11. genrace).

Příklad 4.
(a) $y_n=-1\cdot(-2)^n$
(b) $y_n=-\frac{3}{2}\cdot 2^n+5\cdot 3^n$
(c) $y_n=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}-3$
(d) $y_n=\frac{49}{27}\cdot 3^n+(-3-n)\cdot 2^n$

Příklad 5.
(a) $p_n=\frac{118}{3}(-0.5)^n+\frac{80}{3}$, ceny kolísají v posloupnosti $7; 36.5; 21.75\ldots$ s limitní cenou $\frac{80}{3}\doteq 26.7$ Kč.
(b) $p_n=-\frac{10}{3}(-1.5)^n+2$, cena nemůže nabývat záporné hodnoty $\Rightarrow$ nemá řešení.

Kapitola 7.2: Nekonečné řady

Úlohy k řešení

Příklad 1.
(a) $\frac{738}{2520}$ $\doteq$ (b) $\doteq 1.55$ (c) 1 (d) $\frac{10}{11}$ (e) $\doteq 2.71$ (f) $\doteq 5.02$
2.93

Příklad 2.
(a) $\frac{2}{3}$ (b) 3 (c) 4 (d) $\frac{4}{5}$ (e) $\frac{11}{4}$ (f) $\doteq 0.791$

Příklad 3.
(a) $\doteq 11.33$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{3}{2}$ (d) $\frac{3}{2}$

Příklad 4.
$\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{1}{8}+\frac{3}{32}\ldots=\frac{7}{4}$
$(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots)+(\frac{3}{8}+\frac{3}{16}+\frac{3}{32}+\ldots)=\frac{7}{4}$
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+3\cdot\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{7}{4}$
$1+3\cdot\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$

Příklad 5.
(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7}{n(n+1)} + \frac{2}{3^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7}{n(n+1)} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$; obě řady jsou podle d'Alembertova kritéria konvergentní.
(b) řada podle Cauchyova kritéria diverguje.
(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8^n} - \frac{1}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8^n} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; obě řady jsou konvergentní jak už víme.
(d) řada diverguje k $-\infty$.
(e) na tuto řadu nelze aplikovat d'Alembertovo ani Cauchyovo kritérium; posl. část součtů osciluje: $-1, 0, -1, 0 - 1, 0, \ldots$.

Příklad 6.
(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2}{n^2+2n} = 3$, řada diverguje k ∞
(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n}{5n-1} = \frac{3}{5}$, řada diverguje k ∞
(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+0.3^n} = 1$, řada diverguje k ∞

Příklad 7.
(a) konverguje (majoranta $\frac{1}{n^2}$) (b) diverguje (minoranta $\frac{1}{n}$) (c) diverguje (d'Alemb.)
(d) diverguje (nutná podm.) (e) konverguje (d'Alemb.) (f) konverguje (d'Alemb.)

Aplikační úlohy k řešení

Příklad 1.
(a) $\frac{1}{9}$ (b) $\frac{7}{33}$ (c) $\frac{311}{99}$ (d) $\frac{5141}{999}$ (e) $\frac{26911}{9900}$ (f) $\frac{32071}{9900}$

Příklad 2.
S měsíčním připisováním úroků naspoříme přibližně za tři roky 34806 Kč; druhá varianta dá přibližně 35 490 Kč.

Příklad 3.
Celkový objem dané nekonečné řady krychlí je $\frac{8}{7}$ dm^3, celkový povrch 8 dm^3.

Kreativní úlohy ke kapitole 7

Příklad 1. (uvádíme vždy jednu možnost)
(a) $a_{n+1} = 2a_n + 1$ (b) $a_{n+1} = 5a_n - 2$ (c) $a_{n+1} = a_n^2 + 2$

Příklad 2. $1227, 12, 3, 3, 3 \ldots$

Příklad 3.
(a) 0 (b) ∞ (c) $\frac{10}{3}$ (d) 2048 (e) $-\frac{1}{64}$ (f) $\frac{1}{2}$

Příklad 4.
(a) 1 (b) ∞ (c) 1 (d) 0 (e) 3

Příklad 5.
celkem 167 772.15 Kč.

Příklad 6.
(a) $y_n = -\frac{2}{3} \cdot 3^n + 2 \cdot 2^n$ (b) $y_n = (3 - \frac{n}{2}) \cdot 2^n$
(c) $y_n = 2^{n-1}$ (d) $y_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$

Příklad 7.
If the Indians had been able to invest the money at 5% compounded yearly they'd have today (1996) approximately 16605.5 mil. dollars

Příklad 8. The result after one year of savings will be approximately 25618.70 Kč.

Příklad 9.
The number of bacteria in a culture will increase to by 11.61% after 1 hour, i.e. to $a_n = 5000 \cdot \left(\sqrt[10]{3}\right)^n$ after n hours. It means the number will increase to 45000 after 20 hours and the number will be over 80000 after approximately 25 hours.

Příklad 10. The total cost of the loan over 10 months is 5275 DM.

Kontrolní otázky ke kapitole 7

Otázka 1. $d = 0$

Otázka 2. $\mid q \mid < 1$

Otázka 3. určujeme limitu částečných součtů

Otázka 4.
Termíny se používají u sčítání nekonečných řad s nezáp. členy. Majoranta (resp. minoranta) = řada ohraničující danou řadu shora (resp. zdola), tj. $\sum b_n$ je majorantou (resp. minorantou) řady $\sum a_n$ právě tehdy, když $\forall n \in \mathbf{N} : b_n \geq a_n$ (resp. $b_n \leq a_n$).

Otázka 5. Podílové kritérium dává limitu = 0, odmocninové také (pokud ovšem umíte limitu posloupnosti $\{\sqrt[n]{n!}\}$, která je $+\infty$.)

Seznam použitých zdrojů

[Bic79] Bican, L.: Lineární algebra, SNTL, Praha 1979

[Čer89] Černá, B.: Matematika (Lineární algebra), skriptum VŠZ, Brno 1989

[Eva89] Evans, C.W.: Engineering Mathematics, London 1989

[Gil78] Gillman, L. – McDowell, R.H.: Calculus, Toronto 1978

[Klů95] Klůfa, J. – Coufal, J.: Matematické struktury (Matematika A pro VŠE), skriptum, Praha 1995

[Ný89] Nýdl, V. – Slavík, V.: Matematika, skriptum pro Agronomickou fakultu VŠZ, Praha 1989

[Prá71] Prágerová, A.: Diferenční rovnice, Praha, SNTL 1971

[Škr89] Škrášek,J. – Tichý, Z.: Základy aplikované matematiky I., SNTL, Praha 1989

[Zie87] Ziegler, M.R. – Barnett, R.A.: College Mathematics, New York, 1987

konzultace s firmou „Š + H Ložiska“, Č. Budějovice

Název:	**MATEMATIKA** **Část 1 - Matematické struktury**
Autor:	**Doc. RNDr. Václav Nýdl, CSc.** **Mgr. Renata Lexová**
Vydavatel:	**Jihočeská univerzita** **Zemědělská fakulta** **České Budějovice**
Nakladatel:	**JU ZF České Budějovice**
Vydání:	**1. vydání, 1996**
Počet stran:	**147**
AA:	**10**
Náklad:	**350 výtisků**
Tisk:	**DTP Č. Budějovice**

Tato publikace neprošla jazykovou úpravou v redakci nakladatelství.
Za věcnou a jazykovou správnost díla odpovídají autoři.

ISBN 80-7040-193-1

ISBN 80-7040-193-1

9 788070 401934