JIHOČESKÁ UNIVERZITA
V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH
Ekonomická fakulta

MATEMATIKA I – MATHEMATICS I

(Matematické struktury – Mathematical Structures)

Cvičení – Seminar
bilingvní text – bilingual text

doc. RNDr. Václav NÝDL, CSc.
PhDr. Marek ŠULISTA
Vivian WHITE-BARAVALLE, M. A.

České Budějovice

2007

MATEMATIKA I - MATHEMATICS I

(Matematické struktury - Mathematical structures)

Cvičení - Seminar

•

bilingvní text - bilingual text

doc. RNDr. Václav NÝDL, CSc.
PhDr. Marek ŠULISTA
Vivian WHITE-BARAVALLE, M. A.

Oponent: **doc. RNDr. Jan COUFAL, CSc.**

Katedra matematiky

VŠE Praha

ISBN 978-80-7040-983-1

Obsah

TÉMA - TOPIC 1-2 Značení, vektory a matice - Notations, vectors, and matrices 4
TÉMA - TOPIC 3 Hodnost - Rank 12
TÉMA - TOPIC 4 Čtvercové matice - Square matrices 20
TÉMA - TOPIC 5 Soustavy lineárních rovnic - Systems of linear equations . . . 28
TÉMA - TOPIC 6 Relace, zobrazení, funkce - Relations, mappings, functions . 36
TÉMA - TOPIC 7 Posloupnosti a řady - Sequences and series 44
VÝSLEDKY - RESULTS 52
ODKAZY - REFERENCES 54

TÉMA 1-2. Značení, vektory a matice

Značení

$\mathcal{V}_1 \vee \mathcal{V}_2$ nebo $\mathcal{V}_1 \wedge \mathcal{V}_2$ ...	logická disjunkce nebo konjunkce výroků $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$,
$\{a, b, c\}$ ...	množina obsahující prvky a, b, c,
$x \in M$ nebo $x \notin M$	prvek x patří nebo nepatří do množiny M,
$\mathbf{N}$ a $\mathbf{R}$ ...	množina všech přirozených a množ. všech reálných čísel,
(a, b) nebo $\langle a, b\rangle$ ...	otevřený nebo uzavřený interval,
$\langle a, b)$, $(a, b\rangle$ ...	dva druhy polouzavřených (polootevřených) intervalů.

Aritmetické vektory

V_n ...	prostor všech aritmetických n-složkových vektorů (vektorů dimenze n),
v_i ...	i-tá složka vektoru $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

Základní operace s vektory

Sčítání/odčítání	$\vec{u} \pm \vec{v} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \pm (v_1, v_2, \ldots, v_n) = (u_1 \pm v_1, u_2 \pm v_2, \ldots, u_n \pm v_n)$
Násobení číslem	$c \cdot \vec{v} = c \cdot (v_1, v_2, \ldots, v_n) = (c \cdot v_1, c \cdot v_2, \ldots, c \cdot v_n)$
Norma	$\lVert\vec{v}\rVert = \lVert(v_1, v_2, \ldots, v_n)\rVert = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$
Skalární součin	$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \cdot (v_1, v_2, \ldots, v_n) = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \ldots + u_n \cdot v_n$
Vektorový součin	$\vec{u} \times \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$

Vzorec pro úhel dvou nenulových vektorů $\vec{u}$ **a** $\vec{v}$ **:** $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\lVert\vec{u}\rVert \cdot \lVert\vec{v}\rVert}.$

Poznámky

- $\vec{o} = (0, 0, \ldots, 0)$ se nazývá nulový vektor. Vektor $\vec{v}$ se nazývá jednotkový, je-li $\lVert\vec{v}\rVert = 1$.
- Vektory $\vec{u}, \vec{v}$ se nazývají ortogonální (kolmé), jestliže jejich skalární součin je 0.
- Vektory $\vec{u}, \vec{v}$ se nazývají paralelní (rovnoběžné), jestliže existuje číslo c tak, že $\vec{u} = c \cdot \vec{v}$.
- Vektorový součin $\vec{u} \times \vec{v}$ je definován pouze ve V_3.

Matice

Typ matice A ...	udává počet řádků a počet sloupců (píšeme $m \times n$),
a_{ij} ...	prvek matice A, který je v řádku i a sloupci j,
Hlavní diagonála v A	tvořena všemi prvky matice A tvaru a_{ii},
Nulová matice O ...	má všechny prvky rovny nule,
Čtvercová matice ...	jakákoliv matice typu $n \times n$ (mluvíme též o matici řádu n),
Jednotková m. E ...	čtvercová matice s diag. prvky rovnými 1, ostatní jsou nuly.

Základní maticové operace

Transponování	je-li $Z = A^{\mathrm{T}}$ a A je typu $m \times n$, pak je Z typu $n \times m$ a vždy $z_{ij} = a_{ji}$,
Sčítání/odčítání	je-li $Z = A \pm B$, pak A, B, Z jsou stejného typu a $z_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$,
Násobení číslem	je-li $Z = c \cdot A$, pak A, Z jsou stejného typu a $z_{ij} = c \cdot a_{ij}$,
Násobení matic	je-li $Z = A \cdot B$, A typu $m \times s$, B typu $s \times n$, pak je Z typu $m \times n$ a vždy $z_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{is} \cdot b_{sj}$.

Poznámky

- Platí $A + O = O + A = A$ a $A \cdot O = O \cdot A = O$, kdykoliv jsou operace definovány.
- Pro každou matici A je $A \cdot E = E \cdot A = A$, jestliže lze operace provést.
- Mocninu čtvercové matice získáme opakovaným násobením, např. $A^4 = A \cdot A \cdot A \cdot A$.

TOPIC 1-2. Notations, Vectors, and Matrices

Notations

$\mathcal{V}_1 \vee \mathcal{V}_2$ or $\mathcal{V}_1 \wedge \mathcal{V}_2$ ...	the logical disjunction or conjunction of propositions $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$,
$\{a, b, c\}$ ...	the set containing elements a, b, c,
$x \in M$ or $x \notin M$	element x belongs or does not belong to set M,
$\mathbf{N}$ and $\mathbf{R}$ ...	the set of all natural and the set of all real numbers,
(a, b) or $\langle a, b\rangle$ ...	an open or a closed interval,
$\langle a, b)$, $(a, b\rangle$ ...	two kinds of half-closed (half-open) intervals.

Arithmetic vectors

V_n ...	the space of all arithmetic n-component vectors (n-dimensional vectors),
v_i ...	the i-th component of vector $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

Basic operations on vectors

Addition/subtraction	$\vec{u} \pm \vec{v} = (u_1, \ldots, u_n) \pm (v_1, \ldots, v_n) = (u_1 \pm v_1, \ldots, u_n \pm v_n)$
Multiplication by c	$c \cdot \vec{v} = c \cdot (v_1, \ldots, v_n) = (c \cdot v_1, \ldots, c \cdot v_n)$
Norm	$\lVert\vec{v}\rVert = \lVert(v_1, v_2, \ldots, v_n)\rVert = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$
Dot product	$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1, \ldots, u_n) \cdot (v_1, \ldots, v_n) = u_1 \cdot v_1 + \ldots + u_n \cdot v_n$
Cross product	$(u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$

The formula for the angle of two non-zero vectors $\vec{u}$ and $\vec{v}$: $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\lVert\vec{u}\rVert \cdot \lVert\vec{v}\rVert}$.

Notes

- $\vec{o} = (0, 0, \ldots, 0)$ is called the zero vector. Vector $\vec{v}$ is called a unit vector if $\lVert\vec{v}\rVert = 1$.
- Vectors $\vec{u}, \vec{v}$ are called orthogonal (perpendicular) if their dot product is equal to 0.
- Vectors $\vec{u}, \vec{v}$ are called parallel if there exist a number c such that $\vec{u} = c \cdot \vec{v}$.
- The cross product $\vec{u} \times \vec{v}$ is defined only in V_3.

Matrices

Size of matrix A ...	gives the number of rows and columns (write $m \times n$, read "m by n")
a_{ij} ...	the entry of matrix A which can be found in row i and column j,
Principal diagonal in A	consists of all entries of A in the form a_{ii},
Null matrix O ...	has all the enries equal to zero,
Square matrix ...	any $n \times n$ matrix (we also talk about a matrix of order n),
Unit matrix E ...	a square matrix with diagonal entries equal to 1, the others are 0s.

Basic matrix operations

Transposing	if $Z = A^{\mathrm{T}}$ and A is an $m \times n$ matrix then Z is an $n \times m$ matrix and always $z_{ij} = a_{ji}$,
Addition/subtraction	if $Z = A \pm B$ then A, B, Z have the same size and $z_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$,
Multiplication by c	if $Z = c \cdot A$ then A, Z have the same size and $z_{ij} = c \cdot a_{ij}$,
Matrix multiplication	if $Z = A \cdot B$, where A is an $m \times s$ matrix, B is a $s \times n$ matrix then Z is an $m \times n$ matrix and always $z_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{is} \cdot b_{sj}$.

Notes

- $A + O = O + A = A$ and $A \cdot O = O \cdot A = O$ hold whenever the operations are defined.
- For every matrix A there is $A \cdot E = E \cdot A = A$, if the operations can be performed.
- The power of a square matrix can be obtained by means of repeated multiplication, e. g. $A^4 = A \cdot A \cdot A \cdot A$.

ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad 1. Dány $\vec{a} = (1, 3, -5)$, $\vec{b} = (6, 1, 1)$ a $\vec{c} = (-1, 1.2, 0, -2)$, $\vec{d} = (2, -2.4, 0, 4)$.

(a) Které z daných dvojic vektorů jsou rovnoběžné nebo ortogonální?

(b) Vypočtěte $\vec{a} \times \vec{b}$ a $\vec{c} \times \vec{d}$. (c) Řešte rovnici $4\vec{c} + 2\vec{x} = \vec{d}$.

Řešení. (a) Vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ nejsou rovnoběžné. Pokud ano, pak (kvůli 1. komponentě) nutně $\vec{b} = 6 \cdot \vec{a}$, což není pravda. Vektory $\vec{c}$ a $\vec{d}$ jsou rovnoběžné, protože $d = (-2) \cdot \vec{c}$.

Ortogonalita se testuje skalárním součinem:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 3, -5) \cdot (6, 1, 1) = 1 \cdot 6 + 3 \cdot 1 + (-5) \cdot 1 = 6 + 3 - 5 = 4 \neq 0.$ Analogicky je $\vec{c} \cdot \vec{d} = -2 - 2.88 + 0 - 8 = -12.88 \neq 0$. Žádná z daných dvojic vektorů není ortogonální.

(b) $\vec{a} \times \vec{b} = (1, 3, -5) \times (6, 1, 1) = (3 \cdot 1 - (-5) \cdot 1, (-5) \cdot 6 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 1 - 3 \cdot 6) = (8, -31, -17)$.
Vektorový součin $\vec{c} \times \vec{d}$ není definován (vektory nejsou 3-složkové).

(c) "Převedeme" $4\vec{c}$ na pravou stranu a pak dělíme obě strany rovnice 2:
$\vec{x} = \frac{1}{2}(\vec{d} - 4\vec{c}) = \frac{1}{2} \cdot [(2, -2.4, 0, 4) - 4 \cdot (-1, 1.2, 0, -2)] = \frac{1}{2} \cdot (6, -2.4, 0, 12) = (3, -1.2, 0, -6)$.

Příklad 2. Určete úhly $\triangle ABC$ v prostoru, když $A = [1, -1, 2]$, $B = [3, 3, 3]$, $C = [1, 2, 3]$.

Řešení. Úhel α je úhel mezi vektory $\vec{u} = \vec{AB} = B - A = [3, 3, 3] - [1, -1, 2] = (2, 4, 1)$ a $\vec{AC} = C - A = [1, 2, 3] - [1, -1, 2] = (0, 3, 1)$.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{2 \cdot 0 + 4 \cdot 3 + 1 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 1^2} \cdot \sqrt{0^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{13}{\sqrt{21 \cdot 10}} \doteq 0.8971.$$

Na kalkulačce pomocí inverzní funkce $\cos^{-1}$ najdeme (nastavit úhlové jednotky na stupně!) hodnotu $\alpha \doteq 26.2°$.

Analogicky určíme úhel β mezi vektory $\vec{BA} = A - B = [1, -1, 2] - [3, 3, 3] = (-2, -4, -1)$ a $\vec{BC} = C - B = [1, 2, 3] - [3, 3, 3] = (-2, -1, 0)$. Vyjde $\beta = 38.7°$.

Úhel γ mezi vektory $\vec{CA} = A - C$ a $\vec{CB} = C - B$ vyjde $115.1°$.

Příklad 3. Dány matice $R = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Řešte maticovou rovnici $3R + 2X = S$,

(b) Vypočtěte matice $R \cdot S$, $W = R \cdot S^{\mathrm{T}}$, $S^{\mathrm{T}} \cdot R$, $Z = W^2$.

Řešení. (a) Matici $3R$ "převedeme" na pravou stranu a pak celou rovnici dělíme 2:

$$X = \tfrac{1}{2}(S - 3R) = \tfrac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 3 & 3 \\ 6 & -3 & 3 \end{bmatrix}\right) = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 & -1 & 1 \\ -6 & 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & \frac{5}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

(b) Součin $R \cdot S$ není definován, neboť R má 3 sloupce, ale S má jen 2 řádky. Dále

$$W = R \cdot S^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 & 3 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 5 + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 4 & 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 3 \\ 12 & -1 \end{bmatrix}$$

$$S^{\mathrm{T}} \cdot R = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 3 + 0 \cdot 2 & 5 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) & 5 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 & 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ 4 \cdot 3 + 1 \cdot 2 & 4 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & 4 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 5 & 5 \\ 10 & 0 & 4 \\ 14 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$Z = W^2 = W \cdot W = \begin{bmatrix} 21 & 3 \\ 12 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 21 & 3 \\ 12 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 477 & 60 \\ 240 & 37 \end{bmatrix}.$$

EXAMPLES

Example 1. Given $\vec{a} = (1,3,-5)$, $\vec{b} = (6,1,1)$ and $\vec{c} = (-1,1.2,0,-2)$, $\vec{d} = (2,-2.4,0,4)$.

(a) Which of the couples of vectors above are parallel or orthogonal?

(b) Calculate $\vec{a} \times \vec{b}$ and $\vec{c} \times \vec{d}$. (c) Solve the equation $4\vec{c} + 2\vec{x} = \vec{d}$.

Solution. (a) Vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$ are not parallel. If so, then (because of the 1st component) necessarily $\vec{b} = 6 \cdot \vec{a}$ which is not true. Vectors $\vec{c}$ and $\vec{d}$ are parallel because $d = (-2) \cdot \vec{c}$. The orthogonality is tested by means of the dot product:
$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1,3,-5) \cdot (6,1,1) = 1 \cdot 6 + 3 \cdot 1 + (-5) \cdot 1 = 6 + 3 - 5 = 4 \neq 0.$ Analogously, $\vec{c} \cdot \vec{d} = -2 - 2.88 + 0 - 8 = -12.88 \neq 0$. None of the given couples are orthogonal vectors.

(b) $\vec{a} \times \vec{b} = (1,3,-5) \times (6,1,1) = (3 \cdot 1 - (-5) \cdot 1, (-5) \cdot 6 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 1 - 3 \cdot 6) = (8,-31,-17)$. The cross product $\vec{c} \times \vec{d}$ is not defined (the vectors are not 3-dimensional).

(c) We "move" $4\vec{c}$ to the right side and then divide both sides of the equation by 2:
$\vec{x} = \frac{1}{2}(\vec{d} - 4\vec{c}) = \frac{1}{2} \cdot [(2,-2.4,0,4) - 4 \cdot (-1,1.2,0,-2)] = \frac{1}{2} \cdot (6,-2.4,0,12) = (3,-1.2,0,-6)$.

Example 2. In space, determine the measures of angles in $\triangle ABC$ if $A = [1,-1,2]$, $B = [3,3,3]$, $C = [1,2,3]$.

Solution. Angle α is the angle between vectors $\vec{u} = \vec{AB} = B - A = [3,3,3] - [1,-1,2] = (2,4,1)$ and $\vec{AC} = C - A = [1,2,3] - [1,-1,2] = (0,3,1)$.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{2 \cdot 0 + 4 \cdot 3 + 1 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 1^2} \cdot \sqrt{0^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{13}{\sqrt{21 \cdot 10}} \doteq 0.8971.$$

On the calculator, using the inverse function $\cos^{-1}$ we find (don't forget to set on the degree mode for angles first!) the value $\alpha \doteq 26.2°$.

Analogously, we calculate angle β between vectors $\vec{BA} = A - B = [1,-1,2] - [3,3,3] = (-2,-4,-1)$ and $\vec{BC} = C - B = [1,2,3] - [3,3,3] = (-2,-1,0)$. We obtain $\beta = 38.7°$.

The angle γ between vectors $\vec{CA} = A - C$ and $\vec{CB} = C - B$ is $\doteq 115.1°$.

Example 3. Given matrices $R = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Solve the matrix equation $3R + 2X = S$,

(b) Calculate the matrices $R \cdot S$, $W = R \cdot S^{\mathrm{T}}$, $S^{\mathrm{T}} \cdot R$, $Z = W^2$.

Solution. (a) We "move" matrix $3R$ to the right side and then divide the equation by 2:

$$X = \tfrac{1}{2}(S - 3R) = \tfrac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 3 & 3 \\ 6 & -3 & 3 \end{bmatrix}\right) = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 & -1 & 1 \\ -6 & 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & \frac{5}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

(b) The product $R \cdot S$ is not defined, because R has 3 columns, but S has only 2 rows. Further,

$$W = R \cdot S^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 & 3 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 5 + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 4 & 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 3 \\ 12 & -1 \end{bmatrix}$$

$$S^{\mathrm{T}} \cdot R = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 3 + 0 \cdot 2 & 5 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) & 5 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 & 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ 4 \cdot 3 + 1 \cdot 2 & 4 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & 4 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 5 & 5 \\ 10 & 0 & 4 \\ 14 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$Z = W^2 = W \cdot W = \begin{bmatrix} 21 & 3 \\ 12 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 21 & 3 \\ 12 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 477 & 60 \\ 240 & 37 \end{bmatrix}.$$

ÚLOHY K ŘEŠENÍ

Úloha 1.1. Pro každý výrok týkající se intervalů reálných čísel rozhodněte zda je pravdivý nebo nepravdivý.

(a) $(-3, +\infty)$ je otevřený interval.
(b) Množina všech řešení nerovnice $x^2 - 4x \leq 0$ je polouzavřený interval.
(c) Průnik dvou uzavřených intervalů je vždy uzavřený interval.
(d) Sjednocení dvou intervalů je vždy interval.

Úloha 1.2. Dány vektory $\vec{u} = (-2, 0, 8)$, $\vec{v} = (1, 2, 1)$, $\vec{w} = (-1, -1, 3)$, $\vec{z} = (1, 0, -4)$.

(a) Vypočtěte normy vektorů $2\vec{u} - 3\vec{v}$, $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$, $\vec{w} \times 2\vec{z}$, a $(\vec{w} \times \vec{v}) \times u$,

(b) z vektorů $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}$ vyberte dvojice vektorů rovnoběžných nebo ortogonálních.

Úloha 1.3. Řešte vzhledem k $\vec{x}$ ($\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}$ jsou vektory z Úlohy 1.2).

(a) $2\vec{z} - \vec{x} = 3\vec{x}$,
(b) $2\vec{w} + \frac{1}{2}\vec{x} = \vec{w}$
(c) $2(\vec{u} + \vec{x}) - 3(\vec{v} + \vec{x}) = \vec{w} + \vec{x}$,
(d) $\vec{u} + 2\vec{x} = \vec{o}$, kde $\vec{o}$ má 3 složky.

Úloha 1.4. Najděte neznámé reálné číslo r.

(a) $\|(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, r)\| = 2$
(b) $(2, r, 3, -r)$ a $(-1, 2, 1, 8)$ jsou ortogonální,
(c) $(1, -1, 0, r)$ je jednotkový vektor,
(d) norma vektoru $(0, 4, r, 4)$ je větší než 6,
(e) $(1, -3)$ a $(r, 6)$ jsou paralelní,
(f) skalární součin vektorů $(r, 8, 0), (r, -r, 2)$ je -12.

Úloha 1.5. V rovině dány body $A = [-1, 3]$, $B = [1, 10]$, $C = [8, 2]$, $D = [0, -1]$.

(a) V $\triangle ABC$ vypočtěte velikost všech jeho úhlů.

(b) Ve čtyřúhelníku $ABCD$ najděte velikost úhlu mezi jeho úhlopříčkami.

Úloha 1.6. A je matice typu 2×4, B je matice typu 2×3 a C je matice typu 3×2. Najděte typ matice X.

(a) $3A + X^{\mathrm{T}} = A$
(b) $X = B^{\mathrm{T}} - 3C$
(c) $X = A^{\mathrm{T}} \cdot B$
(d) $X = B^{\mathrm{T}} \cdot C^{\mathrm{T}}$
(e) $X = C \cdot B \cdot C$
(f) $X = A^3$

Úloha 1.7. Pro čtvercové matice $P = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 10 & -2 \end{bmatrix}$ najděte matici Y.

(a) $Y = Q - P^{\mathrm{T}}$
(b) $P - Y = P \cdot Q$
(c) $Y^{\mathrm{T}} = P^2$
(d) $3P + Y^{\mathrm{T}} = Q$
(e) $Y = P \cdot Q + Q \cdot P$
(f) $Y = P \cdot Q^{\mathrm{T}}$
(g) $3P - Y = Q^{\mathrm{T}} + Y$
(h) $Y = P^6$
(i) $Y = Q^2(P^{\mathrm{T}})^3$

Úloha 1.8. Pro matice A, B níže vypočtěte (jestliže existují) následující matice:

$A \cdot B$, $B \cdot A$, $A^{\mathrm{T}} \cdot B^{\mathrm{T}}$, $B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}}$, $A \cdot A^{\mathrm{T}}$, $B^{\mathrm{T}} \cdot B$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

PROBLEMS TO SOLVE

Exercise 1.1. For each proposition concerning intervals of real numbers decide if it is true or false.

(a) $(-3, +\infty)$ is an open interval.
(b) The set of all solutions of the inequality $x^2 - 4x \leq 0$ is a half-closed interval.
(c) The intersection of two closed intervals is always a closed interval.
(d) The union of two intervals is always an interval.

Exercise 1.2. Given vectors $\vec{u} = (-2, 0, 8)$, $\vec{v} = (1, 2, 1)$, $\vec{w} = (-1, -1, 3)$, $\vec{z} = (1, 0, -4)$.

(a) Calculate the norms of vectors $2\vec{u} - 3\vec{v}$, $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$, $\vec{w} \times 2\vec{z}$, and $(\vec{w} \times \vec{v}) \times u$,

(b) from vectors $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}$ choose couples of parallel or orthogonal vectors.

Exercise 1.3. Solve for $\vec{x}$ ($\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}$ are vectors from Exercise 1.2).

(a) $2\vec{z} - \vec{x} = 3\vec{x}$, (b) $2\vec{w} + \frac{1}{2}\vec{x} = \vec{w}$
(c) $2(\vec{u} + \vec{x}) - 3(\vec{v} + \vec{x}) = \vec{w} + \vec{x}$, (d) $\vec{u} + 2\vec{x} = \vec{o}$, where $\vec{o}$ has 3 components.

Exercise 1.4. Always find the unknown real number r.

(a) $\|(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, r)\| = 2$ (b) $(2, r, 3, -r)$ and $(-1, 2, 1, 8)$ are orthogonal,

(c) $(1, -1, 0, r)$ is a unit vector, (d) the norm of vector $(0, 4, r, 4)$ is greater than 6,

(e) $(1, -3)$ and $(r, 6)$ are parallel, (f) the dot product of vectors $(r, 8, 0), (r, -r, 2)$ is -12.

Exercise 1.5. In the plane, given points $A = [-1, 3]$, $B = [1, 10]$, $C = [8, 2]$, $D = [0, -1]$.

(a) In $\triangle ABC$, calculate the measures of all its angles.

(b) In quadrilateral $ABCD$, find the measure of the angle between its diagonals.

Exercise 1.6. A is a 2×4 matrix, B is a 2×3 matrix, and C is a 3×2 matrix.
Find the size of matrix X.

(a) $3A + X^{\mathrm{T}} = A$ (b) $X = B^{\mathrm{T}} - 3C$ (c) $X = A^{\mathrm{T}} \cdot B$

(d) $X = B^{\mathrm{T}} \cdot C^{\mathrm{T}}$ (e) $X = C \cdot B \cdot C$ (f) $X = A^3$

Exercise 1.7. For square matrices $P = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ and $Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 10 & -2 \end{bmatrix}$, find matrix Y.

(a) $Y = Q - P^{\mathrm{T}}$ (b) $P - Y = P \cdot Q$ (c) $Y^{\mathrm{T}} = P^2$

(d) $3P + Y^{\mathrm{T}} = Q$ (e) $Y = P \cdot Q + Q \cdot P$ (f) $Y = P \cdot Q^{\mathrm{T}}$

(g) $3P - Y = Q^{\mathrm{T}} + Y$ (h) $Y = P^6$ (i) $Y = Q^2 (P^{\mathrm{T}})^3$

Exercise 1.8. For matrices A, B below compute (if they exist) the following matrices:
$A \cdot B$, $B \cdot A$, $A^{\mathrm{T}} \cdot B^{\mathrm{T}}$, $B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}}$, $A \cdot A^{\mathrm{T}}$, $B^{\mathrm{T}} \cdot B$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Minitest MT1-2

1. Dány dva intervaly reálných čísel $I = \langle -3, 4)$, $J = (3, 5)$ a reálné číslo $r = 3$.
Nyní jsou dány 3 výroky: $\mathcal{V}_1 :\ I \cup J$ je interval, $\mathcal{V}_2 :\ r \in I \cap J$, $\mathcal{V}_3 = \mathcal{V}_1 \wedge \mathcal{V}_2$.
Určete, které z výroků $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$, $\mathcal{V}_3$ jsou nepravdivé.

(A) všechny, **(B)** žádný z nich, **(C)** pouze $\mathcal{V}_1$ **(D)** právě $\mathcal{V}_2$ a $\mathcal{V}_3$.
(E) Žádná z uvedených odpovědí není správná.

2. Porovnejte normy následujících vektorů z různých vektorových prostorů
$\vec{p} = (2, -3)$, $\vec{q} = (2, -2, 2)$, $\vec{r} = (0, -1, 2, 2)$.

(A) $\|p\| < \|q\| < \|r\|$ **(B)** $\|q\| < \|r\| < \|p\|$ **(C)** $\|r\| < \|q\| < \|p\|$ **(D)** $\|r\| < \|p\| < \|q\|$.
(E) Žádný z uvedených výroků není pravdivý.

3. Dány vektory $\vec{p} = (1, 2, 3)$, $\vec{q} = (2, 2, 1)$, $\vec{r} = (-1, 0, 3)$. Výsledek $(\vec{q} \times \vec{p}) \cdot \vec{r}$ je

(A) -2 **(B)** 2 **(C)** $(-4, 0, 6)$ **(D)** $(4, 0, -6)$. **(E)** Jiný než uvedeno.

4. Najděte množinu všech hodnot $x \in \mathbf{R}$, pro něž jsou vektory
$\vec{a} = (1, -1, x, -2)$ a $\vec{b} = (5, 4, x, x)$ ortogonální.

(A) $\emptyset$ **(B)** $\{-1\}$ **(C)** $\{1\}$ **(D)** $\{-1, 1\}$. **(E)** Žádná z uvedených množin.

5. V prostoru dány body $A = [1, -1, 0]$, $B = [-3, 1, 1]$ a $C = [2, 1, 9]$.
Vypočtěte velikost úhlu β v $\triangle ABC$ a zaokrouhlete na nejbližší celý stupeň.

(A) $70°$ **(B)** $71°$ **(C)** $72°$ **(D)** $73°$ **(E)** $74°$.

6. P je matice typu 3×2 matrix, Q je typu 2×3. Najděte typ matice $Q \cdot \left(3P - 2Q^{\mathbf{T}}\right)$.

(A) 2×2 **(B)** 3×3 **(C)** 2×3 **(D)** 3×2. **(E)** Žádný z uvedených.

7. Určete počet chyb ve výsledku následujícího násobení matic

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 12 \\ -1 & 1 & -16 \end{bmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{bmatrix} 11 & 0 & 135 \\ -5 & 4 & -98 \end{bmatrix}$$

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** více než 3.

8. Pro $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ řešte maticovou rovnici $2A^{\mathrm{T}} - X = B \cdot A$.

Potom hodnota prvku x_{21} je

(A) -4 **(B)** 4 **(C)** -8 **(D)** 8. **(E)** Není žádná z uvedených.

9. Pro zadanou matici $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ vypočtěte její mocninu M^4.

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **(B)** $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ **(C)** $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ **(D)** $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ **(E)** $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$.

Minitest MT1-2

1. Given two intervals of real numbers $I = \langle -3, 4)$, $J = (3, 5)$ and real number $r = 3$.
Now, given 3 propositions: $\mathcal{V}_1 :\ I \cup J$ is an interval, $\mathcal{V}_2 :\ r \in I \cap J$, $\mathcal{V}_3 = \mathcal{V}_1 \wedge \mathcal{V}_2$.
Determine, which of the propositions $\mathcal{V}_1,\ \mathcal{V}_2,\ \mathcal{V}_3$ are false.

(A) all of them, **(B)** none of them, **(C)** only $\mathcal{V}_1$ **(D)** just $\mathcal{V}_2$ and $\mathcal{V}_3$.
(E) None of the above answers is correct.

2. Compare the norms of the following vectors from different vectors spaces
$\vec{p} = (2, -3),\ \vec{q} = (2, -2, 2),\ \vec{r} = (0, -1, 2, 2)$.

(A) $\|p\| < \|q\| < \|r\|$ **(B)** $\|q\| < \|r\| < \|p\|$ **(C)** $\|r\| < \|q\| < \|p\|$ **(D)** $\|r\| < \|p\| < \|q\|$.
(E) None of the above propositions is true.

3. Given vectors $\vec{p} = (1, 2, 3), \vec{q} = (2, 2, 1)$, and $\vec{r} = (-1, 0, 3)$. The result of $(\vec{q} \times \vec{p}) \cdot \vec{r}$ is

(A) -2 **(B)** 2 **(C)** $(-4, 0, 6)$ **(D)** $(4, 0, -6)$. **(E)** None of the above.

4. Find the set of all values of $x \in \mathbf{R}$ for which the vectors
$\vec{a} = (1, -1, x, -2),\ \vec{b} = (5, 4, x, x)$ are orthogonal.

(A) $\emptyset$ **(B)** $\{-1\}$ **(C)** $\{1\}$ **(D)** $\{-1, 1\}$. **(E)** None of the above.

5. In space, given points $A = [1, -1, 0]$, $B = [-3, 1, 1]$, and $C = [2, 1, 9]$.
Determine the measure of angle β in $\triangle ABC$ and round it to the nearest degree.

(A) $70°$ **(B)** $71°$ **(C)** $72°$ **(D)** $73°$ **(E)** $74°$.

6. P is a 3×2 matrix and Q is a 2×3 matrix. Find the size of matrix $Q \cdot \left(3P - 2Q^{\mathbf{T}}\right)$.

(A) 2×2 **(B)** 3×3 **(C)** 2×3 **(D)** 3×2. **(E)** None of the above.

7. Determine the number of errors in the result of the following matrix multiplication

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 12 \\ -1 & 1 & -16 \end{bmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{bmatrix} 11 & 0 & 135 \\ -5 & 4 & -98 \end{bmatrix}$$

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** more than 3.

8. For $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ solve the matrix equation $2A^{\mathrm{T}} - X = B \cdot A$.

Then the value of the entry x_{21} is

(A) -4 **(B)** 4 **(C)** -8 **(D)** 8. **(E)** None of the above.

9. For the given matrix $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ calculate its power M^4.

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **(B)** $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ **(C)** $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ **(D)** $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ **(E)** $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$.

TÉMA 3. Hodnost

Soubory vektorů ve V_n

$\mathcal{S}: \vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k}$	soubor vektorů; záleží na pořadí, vektory se mohou opakovat,
Lineární kombinace ...	lin. kombinace souboru $\mathcal{S}$ s koeficienty $c_1, c_2, \ldots, c_k$ je vektor $\vec{v} = c_1 \cdot \vec{v_1} + c_2 \cdot \vec{v_2} + \ldots + c_k \cdot \vec{v_k}$,
Triviální kombinace ...	všechny koeficienty rovny 0 (výsledkem je nulový vektor $\vec{o}$),
Netriviální kombinace	má aspoň jeden koeficient nenulový,
$\langle\langle \mathcal{S} \rangle\rangle$ ...	lineární obal souboru $\mathcal{S}$, tj. množina všech lineárních kombinací v $\mathcal{S}$,
Závislý soubor $\mathcal{S}$ ...	$\vec{o}$ lze z něj získat nějakou netriviální kombinací,
Nezávislý soubor $\mathcal{S}$ ...	$\vec{o}$ lze z něj získat pouze triviální kombinací,
$P = \langle\langle \mathcal{G} \rangle\rangle$ ...	P je podprostor prostoru V_n, $\mathcal{G}$ je systém generátorů podprostoru P,
Báze podprostoru P	každý nezávislý systém generátorů podprostoru P,
Souřadnice vektoru $\vec{v}$ v bázi $\mathcal{B}$	jediný soubor koeficientů $c_1, \ldots, c_k$ takový, že $\vec{v} = c_1 \cdot \vec{b_1} + \ldots + c_k \cdot \vec{b_k}$, kde $\mathcal{B}: \vec{b_1}, \ldots, \vec{b_k}$,
$h(\mathcal{S})$ ...	hodnost souboru $\mathcal{S}$ = velikost jeho maximálního nezáv. podsouboru,
$h(A)$ ...	hodnost matice A = hodnost souboru všech řádkových vektorů A,
$\dim(P)$ ...	dimenze podprostoru P = počet vektorů libovolné jeho báze.

Poznámky

- Prázdný soubor považujeme za nezávislý s hodností 0. V závislém souboru je jeden z vektorů lin. kombinací ostatních, v nezávislém souboru takový vektor neexistuje.
- $\mathcal{S}$ mající k vektorů je závislý, právě když $h(\mathcal{S}) < k$; je nezávislý, právě když $h(\mathcal{S}) = k$.
- Vektor $\vec{v}$ patří do lin. obalu souboru $\mathcal{S}$, právě když nezvyšuje jeho hodnost.
- Hodnost souboru vektorů určujeme pomocí hodnosti matice. Dimenze podprostoru je dána hodností jeho libovolného systému generárorů. Speciálně je $\dim(V_n) = n$.
- Bázi podprostoru P dostaneme odstraněním závislých vektorů ze systému generátorů.
- Úloha na určení souřadnic vektoru v bázi vede na soustavu rovnic.

Určení hodnosti matice

Matice je v Gaussově tvaru, jestliže neobsahuje nulový řádek a každý řádek má více levých nul než řádek předchozí (např. E). Hodnost matice v Gaussově tvaru je rovna počtu jejích řádků. Každou nenulovou matici lze upravit na Gaussův tvar – hodnost zůstane stejná. Tak můžeme určit hodnost každé matice.

Ekvivalentní úpravy matice (operace (1) - (4) se mohou lze opakovat).

(1) Libovolně změnit pořadí řádků.

(2) Násobit libovolný řádek nenulovým číslem (tedy i dělit).

(3) K libovolnému řádku přičíst (tedy i odečíst) lineární kombinaci ostatních řádků.

(4) Odstranit (nebo i připojit) nulový řádek.

Poznámky

- V matici v Gaussově tvaru se řádky po sobě jdoucí mohou lišit o více než jednu levou nulu. Navíc už její první řádek může obsahovat jednu nebo více levých nul.
- Jedině nulové matice mají hodnost 0.
- Ekvivalentní úpravy lze provádět i se sloupci matice (ale my to nikdy neděláme!).
- Pro každou matici $h(A) = h(A^{\mathbf{T}})$, což souvisí s předchozí poznámkou.

TOPIC 3. Rank

Systems of vectors in V_n

$\mathcal{S}:\ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$	a system of vectors; the order matters, the vectors can repeat,
Linear combination ...	lin. combination of system $\mathcal{S}$ with coefficients $c_1, c_2, \ldots, c_k$ is vector $\vec{v} = c_1 \cdot \vec{v_1} + c_2 \cdot \vec{v_2} + \ldots + c_k \cdot \vec{v_k}$,
Trivial combination ...	all its coefficients equal 0 (the result is the zero vector $\vec{o}$),
Non-trivial combination	has at least one non-zero coefficient,
$\langle\langle \mathcal{S} \rangle\rangle$ ...	the linear span of $\mathcal{S}$, i. e. the set of all lin. comb. of vectors in $\mathcal{S}$,
Dependent system $\mathcal{S}$ ...	$\vec{o}$ can be obtained as some non-trivial combination,
Independent system $\mathcal{S}$	$\vec{o}$ can be obtained as the trivial combination only,
$P = \langle\langle \mathcal{G} \rangle\rangle$ ...	P is a subspace of V_n, $\mathcal{G}$ is its system of generators,
Basis of subspace P	any independent sytem of generators,
Coordinates of vector $\vec{v}$ with respect to basis $\mathcal{B}$	the unique system of coefficients $c_1, \ldots, c_k$ such that $\vec{v} = c_1 \cdot \vec{b_1} + \ldots + c_k \cdot \vec{b_k}$ where $\mathcal{B} : \vec{b_1}, \ldots, \vec{b_k}$,
$h(\mathcal{S})$ ...	the rank of system $\mathcal{S}$= the size of its maximal indep. subsystem,
$h(A)$ ...	the rank of matrix A= the rank of the system of all its row vectors,
$\dim(P)$ ...	the dimension of subspace P = the number of vectors in any basis.

Notes

- The empty system is supposed to be independent with rank 0. In a dependent system, one of the vectors is a lin. combination of the others, in an indep. system, such a vector doesn't exist.
- $\mathcal{S}$ having k vectors is dependent if and only if $h(\mathcal{S}) < k$; it is indep. if and only if $h(\mathcal{S}) = k$.
- Vector $\vec{v}$ belongs to the span of system $\mathcal{S}$, if and only if it does not increase its rank.
- The rank of a system of vectors is determined by means of the rank of a matrix. The dimension of a subspace is the rank of any system of generators. Especially, $\dim(V_n) = n$.
- A basis of subspace P can be obtained by removing dep. vectors from a system of generators.
- The problem of finding coordinates of a vector leads to a system of equations.

Determining the rank of a matrix

A matrix is in the Gaussian (echelon) form if it doesn't have a zero row and any row contains more left zeros than the previous one (e. g. E). The rank of a matrix in the Gaussian form equals the number of rows. Each non-zero matrix can be tranformed into a matrix in the Gaussian form – the rank is the same. In this way, we can determine the rank of any matrix.

Equivalent transformations of (row operations on) a matrix
(operations (1) - (4) can be repeated)

(1) To change the order of rows arbitrarily. (4) Remove (or even to join) a zero-row.
(2) To multiply any row by a non-zero number (thus also to divide).
(3) To add to any row (thus also to subtract from) a lin. combination of the other rows.

Notes

- In a matrix in the Gaussian form, two consecutive rows can differ by more than one left zero. Moreover, already the first row of such matrix can have one or more left zeros.
- Only zero matrices have their rank equal to zero.
- Equivalent transformations are also possible for the columns of a matrix. (But we never do it!)
- For every matrix $h(A) = h(A^{\mathbf{T}})$ which is connected to the previous note.

ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad 1. Určete hodnost matice $M = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Řešení. Řádkovými úpravami převedeme matici M na Gaussův tvar.

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -6 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{bmatrix} \Rightarrow h(M) = 3.$$

Vysvětlení: 1. krok: od 1. řádku odečten 3. řádek; 2. krok: od 2. řádku odečten 2-násobek prvního, od 3. řádku odečten 3-násobek prvního, od 4. řádku odečten 1. ř.;

3. krok: od 3. řádku odečten 2. ř., od 4. řádku odečten 2. ř. a 4. řádek potom vyškrtnut.

Příklad 2. V prostoru V_3 je dán soubor vektorů $\mathcal{S} : (2,1,2), (4,3,-1), (2,0,7)$. Označme $P = \ll \mathcal{S} \gg$. Zjistěte hodnost souboru $\mathcal{S}$ a rozhodněte, zda je závislý nebo nezávislý. Dále určete dimenzi podprostoru P a najděte nějakou jeho bázi.

Řešení. Vektory souboru $\mathcal{S}$ uspořádáme do matice a určíme její hodnost.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad h(\mathcal{S}) = 2.$$

Vysvětlení: 1. krok: od 2. řádku odečten 2-násobek prvního, od 3. řádku odečten 1. ř.;
2. krok: ke 3. řádku přičten 2. ř.; 3. krok: vyškrtnut 3.ř.

Soubor $\mathcal{S}$ je závislý, neboť má 3 vektory a $h(\mathcal{S}) = 2$. Dále je $\dim(P) = h(\mathcal{S}) = 2$. Bází podprostoru P může být soubor vektorů výsledné matice tj. $\mathcal{B} : (2,1,2), (0,1,-5)$.

Příklad 3. Ve V_4 je dán soubor vektorů $\mathcal{R} :$ $(1,2,-1,2)$, $(2,2,3,2)$, $(1,2,1,1)$. Zjistěte, zda vektor $\vec{v} = (1,0,2,1)$ patří do lineárního obalu tohoto souboru.

Řešení. Nejdříve převedeme soubor $\mathcal{R}$ do Gaussova tvaru:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Tedy $h(\mathcal{R}) = 3$. A nyní připojíme vektor $\vec{v}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{bmatrix}.$$

Hodnost je opět 3 a tedy se nezměnila. To znamená, že $\vec{v} \in \ll \mathcal{R} \gg$.

Příklad 4. Ve V_2 jsou dány 2 báze, $\mathcal{A} :$ $\vec{a}_1 = (1,2), \vec{a}_2 = (-1,3)$, $\mathcal{B} : \vec{b}_1 = (2,-3), \vec{b}_2 = (5,1)$. Souřadnice vektoru $\vec{w}$ v bázi $\mathcal{A}$ jsou $-2, 4$. Určete souřadnice vektoru $\vec{w}$ v bázi $\mathcal{B}$.

Řešení. Nejdříve si vypočteme složky vektoru $\vec{w}$: $\vec{w} = (-2) \cdot \vec{a}_1 + 4 \cdot \vec{a}_2 = (-6, 8)$. Nyní hledáme čísla c_1, c_2 tak, aby platilo $\vec{w} = c_1 \cdot \vec{b}_1 + c_2 \cdot \vec{b}_2$, tj. $(-6,8) = c_1 \cdot (2,-3) + c_2 \cdot (5,1)$. Tedy dostáváme soustavu 2 rovnic o dvou neznámých, kterou vyřešíme adiční metodou:

$$\begin{array}{ll} \text{rovnice pro 1. složku:} & 2c_1 + 5\,c_2 = -6 \\ \text{rovnice pro 2. složku:} & -3c_1 + c_2 = 8 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 2c_1 + 5c_2 = -6 \\ 15c_1 - 5c_2 = -40 \end{array} \Rightarrow 17c_1 = -46 \Rightarrow c_1 = -\tfrac{46}{17}.$$

Z původní rovnice pro 2. složku je potom: $c_2 = 8 + 3 \cdot c_1 = 8 - \frac{138}{17} = -\frac{2}{17}$.

Souřadnice vektoru $\vec{w}$ v bázi $\mathcal{B}$ jsou $c_1 = -\frac{46}{17}$, $c_2 = -\frac{2}{17}$.

Zkouška správnosti: $\left(-\frac{46}{17}\right) \cdot (2,-3) + \left(-\frac{2}{17}\right) \cdot (5,1) = \left(-\frac{102}{17}, \frac{136}{17}\right) = (-6,8) = \vec{w}$.

EXAMPLES

Example 1. Determine the rank of matrix $M = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Solution. We use the row operations to get matrix M into the Gausian form.

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -6 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{bmatrix} \Rightarrow h(M) = 3.$$

Explanation: Step 1: from r. 1 subtracted r. 3; Step 2: from r. 2 subtracted 2-multiple of r. 1; from r. 3 subtracted 3-multiple of r. 1; from r. 4 subtracted r. 1;

Step 3: from r. 3 subtracted r. 2, from r. 4 subtracted r. 2 and then r. 4 deleted.

Example 2. In the space V_3 given system of vectors $\mathcal{S} : (2,1,2), (4,3,-1), (2,0,7)$. Denote $P = \ll \mathcal{S} \gg$. Find out the rank of system $\mathcal{S}$ and decide if it is dependent of independent. Further, determine the dimension of subspace P and find some of its bases.

Solution. We arrange the vectors of system $\mathcal{S}$ into a matrix and determine its rank.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad h(\mathcal{S}) = 2.$$

Explanation: Step 1: from r. 2 subtracted 2-multiple of r. 1, from r. 3 subtracted r. 1;

Step 2: to r. 3 added r. 2; Step 3: deleted r. 3.

$\mathcal{S}$ is dependent because it has 3 vectors and $h(\mathcal{S}) = 2$. Further, $\dim(P) = h(\mathcal{S}) = 2$. A basis of subspace P can be $\mathcal{B} : (2,1,2), (0,1,-5)$ from the resulting matrix.

Example 3. In V_4, given system of vectors $\mathcal{R} :\ (1,2,-1,2),\ (2,2,3,2),\ (1,2,1,1)$. Find out, if vector $\vec{v} = (1,0,2,1)$ belongs to the span of this system.

Solution. First, we transform system $\mathcal{R}$ into the Gaussian form:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{Thus, } h(\mathcal{R}) = 3. \quad \text{And now, we join vector } \vec{v}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{bmatrix}.$$

The rank is again 3, thus it hasn't changed. It means that $\vec{v} \in \ll \mathcal{R} \gg$.

Example 4. In V_2, given bases $\mathcal{A} : \vec{a}_1 = (1,2), \vec{a}_2 = (-1,3)$, $\mathcal{B} : \vec{b}_1 = (2,-3), \vec{b}_2 = (5,1)$. The coordinates of vector $\vec{w}$ with respect to $\mathcal{A}$ are $-2, 4$. Find the coordinates of $\vec{w}$ with resp. to $\mathcal{B}$.

Solution. First, we calculate the components of $\vec{w}$: $\vec{w} = (-2) \cdot \vec{a}_1 + 4 \cdot \vec{a}_2 = (-6, 8)$. Now, we will find c_1, c_2 such that $\vec{w} = c_1 \cdot \vec{b}_1 + c_2 \cdot \vec{b}_2$, i. e. $(-6,8) = c_1 \cdot (2,-3) + c_2 \cdot (5,1)$. We get a system of 2 equations in 2 variables and solve it by means of the addition method:

$$\begin{array}{lrcl} \text{equation for the 1st comp.}: & 2c_1 + 5c_2 &=& -6 \\ \text{equation for the 2nd comp.}: & -3c_1 + c_2 &=& 8 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} 2c_1 + 5c_2 &=& -6 \\ 15c_1 - 5c_2 &=& -40 \end{array} \Rightarrow 17c_1 = -46 \Rightarrow c_1 = -\tfrac{46}{17}.$$

From the original equation for the 2nd component: $c_2 = 8 + 3 \cdot c_1 = 8 - \frac{138}{17} = -\frac{2}{17}$.

The coordinates of vector $\vec{w}$ with respect to basis $\mathcal{B}$ are $c_1 = -\frac{46}{17},\ c_2 = -\frac{2}{17}$.

Check: $\left(-\frac{46}{17}\right) \cdot (2,-3) + \left(-\frac{2}{17}\right) \cdot (5,1) = \left(-\frac{102}{17}, \frac{136}{17}\right) = (-6,8) = \vec{w}$.

ÚLOHY K ŘEŠENÍ

Úloha 3.1. Rozhodněte, které z následujících matic jsou v Gaussově tvaru.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Úloha 3.2. Co se stalo s jednotlivými řádky matice? $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & -20 \end{bmatrix}$

Úloha 3.3. Pomocí výpočtu hodnosti rozhodněte u zadaných souborů, zda jsou závislé nebo nezávislé a určete $\dim(\ll \mathcal{S} \gg)$:

(a) $\mathcal{S}:\ (1,2,3,4),\ (0,0,0,0)$ (b) $\mathcal{S}:\ (1,0,1),\ (0,1,1),\ (-1,2,1)$

(c) $\mathcal{S}:\ (1,2,1),\ (0,1,2),\ (1,2,3)$ (d) $\mathcal{S}:\ (1,0,-1,1),\ (1,-2,0,2),\ (1,1,11,1)$

Úloha 3.4. Určete hodnosti všech matic v úloze 3.1.

Úloha 3.5. Jsou dány dvě matice $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$

Určete hodnosti matic: A, B, $A+B$, $2A-B$, $A\cdot B$, $B\cdot A^{\mathrm{T}}$, A^{T}, $B\cdot B^{\mathrm{T}}$.

Úloha 3.6. Rozhodněte, který ze zadaných dvou vektorů patří do lin. obalu souboru $\mathcal{S}$

(a) $\vec{v}_1 = (1,5)$, $\vec{v}_2 = (-6,2)$, $\mathcal{S}:\ (3,-1),(-3,1),(12,-4),(-24,8)$
(b) $\vec{v}_1 = (1,4,7)$, $\vec{v}_2 = (0,-1,-2)$, $\mathcal{S}:\ (1,2,3),(1,1,1),(2,5,8),(2,2,2)$
(c) $\vec{v}_1 = (1,2,1,2)$, $\vec{v}_2 = (1,1,1,1)$, $\mathcal{S}:\ (0,1,1,1),(0,1,-3,1),(1,2,1,-4)$,
(d) $\vec{v}_1 = (1,0,0,0,1)$, $\vec{v}_2 = (1,1,1,1,2)$, $\mathcal{S}:\ (1,0,1,0,1),(1,1,0,0,1),(0,1,1,1,1)$.

Úloha 3.7. Určete dimenzi podprostoru zadaného souborem generátorů $\mathcal{S}$ a najděte nějakou jeho bázi.

(a) $\mathcal{S}:\ (3,-1),(-3,1),(12,-4),(-24,8),(1,1)$
(b) $\mathcal{S}:\ (1,2,3),(1,1,1),(2,5,8),(2,2,2)$
(c) $\mathcal{S}:\ (1,1,1,1),(0,1,1,1),(0,1,-3,1),(1,2,1,-4)$,
(d) $\mathcal{S}:\ (1,0,2,0,1),(1,2,0,0,1),(0,1,1,1,1)$,
(d) $\mathcal{S}:\ (0,0,1,1,1,1,1),(0,0,1,1,0,0,0),(0,0,0,0,0,1,1),(0,0,1,1,0,1,1)$.

Úloha 3.8. Rozhodněte, zda $\mathcal{B}$ je báze příslušného prostoru V_n, a jestliže ano, najděte souřadnice vektoru $\vec{v}$ v této bázi.

(a) $\vec{v} = (11,5)$, $\mathcal{B}:\ (3,-1),(1,1)$ (b) $\vec{v} = (10,43)$, $\mathcal{B}:\ (1,-1),(7,1)$

(c) $\vec{v} = (4,2,9)$, $\mathcal{B}: (1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)$, (d) $\vec{v} = (7,5,2)$, $\mathcal{B}: (1,0,1),(0,1,0),(1,1,1)$.

Úloha 3.9. Vektor $\vec{v}$ má v bázi $\mathcal{A}$ souřadnice -6, 7. Určete jeho souřadnice v bázi $\mathcal{B}$.

(a) $\mathcal{A}:\ (0,-1),(0,1)$, $\mathcal{B}: (1,0),(0,-1)$ (b) $\mathcal{A}:\ (4,4),(2,2)$, $\mathcal{B}: (1,1),(0,1)$
(c) $\mathcal{A}:\ (4,1),(2,1)$, $\mathcal{B}: (1,3),(9,1)$ (d) $\mathcal{A}:\ (2,1),(7,7)$, $\mathcal{B}: (1,-1),(-3,3)$

PROBLEMS TO SOLVE

Exercise 3.1. Decide which of the following matrices are in the Gaussian form.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Exercise 3.2. What has happened to the rows? $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & -20 \end{bmatrix}$

Exercise 3.3. Finding the rank, decide if the given systems are dependent or independent and determine $\dim(\ll \mathcal{S} \gg)$:

(a) $\mathcal{S}:\ (1,2,3,4),\ (0,0,0,0)$ (b) $\mathcal{S}:\ (1,0,1),\ (0,1,1),\ (-1,2,1)$

(c) $\mathcal{S}:\ (1,2,1),\ (0,1,2),\ (1,2,3)$ (d) $\mathcal{S}:\ (1,0,-1,1),\ (1,-2,0,2),\ (1,1,11,1)$

Exercise 3.4. Calculate the rank of all matrices from Exercise 3.1.

Exercise 3.5. Given two matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$

Find the ranks of matrices: A, B, $A+B$, $2A-B$, $A \cdot B$, $B \cdot A^{\mathrm{T}}$, A^{T}, $B \cdot B^{\mathrm{T}}$.

Exercise 3.6. Find out which of the given two vectors belong to the lin. span of the system $\mathcal{S}$.

(a) $\vec{v}_1 = (1,5)$, $\vec{v}_2 = (-6,2)$, $\mathcal{S}:\ (3,-1),(-3,1),(12,-4),(-24,8)$
(b) $\vec{v}_1 = (1,4,7)$, $\vec{v}_2 = (0,-1,-2)$, $\mathcal{S}:\ (1,2,3),(1,1,1),(2,5,8),(2,2,2)$
(c) $\vec{v}_1 = (1,2,1,2)$, $\vec{v}_2 = (1,1,1,1)$, $\mathcal{S}:\ (0,1,1,1),(0,1,-3,1),(1,2,1,-4)$,
(d) $\vec{v}_1 = (1,0,0,0,1)$, $\vec{v}_2 = (1,1,1,1,2)$, $\mathcal{S}:\ (1,0,1,0,1),(1,1,0,0,1),(0,1,1,1,1)$.

Exercise 3.7. Determine the dimension of the subspace described by its generators $\mathcal{S}$ and find some of its bases.

(a) $\mathcal{S}:\ (3,-1),(-3,1),(12,-4),(-24,8),(1,1)$
(b) $\mathcal{S}:\ (1,2,3),(1,1,1),(2,5,8),(2,2,2)$
(c) $\mathcal{S}:\ (1,1,1,1),(0,1,1,1),(0,1,-3,1),(1,2,1,-4)$,
(d) $\mathcal{S}:\ (1,0,2,0,1),(1,2,0,0,1),(0,1,1,1,1)$,
(d) $\mathcal{S}:\ (0,0,1,1,1,1,1),(0,0,1,1,0,0,0),(0,0,0,0,0,1,1),(0,0,1,1,0,1,1)$.

Exercise 3.8. Decide if $\mathcal{B}$ is a basis of a corresponding V_n, and, if so, calculate the coordinates of vector $\vec{v}$ with respect to this basis.

(a) $\vec{v} = (11,5)$, $\mathcal{B}:\ (3,-1),(1,1)$ (b) $\vec{v} = (10,43)$, $\mathcal{B}:\ (1,-1),(7,1)$

(c) $\vec{v} = (4,2,9)$, $\mathcal{B}: (1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)$, (d) $\vec{v} = (7,5,2)$, $\mathcal{B}: (1,0,1),(0,1,0),(1,1,1)$.

Exercise 3.9. The coordinates of vector $\vec{v}$ with respect to basis $\mathcal{A}$ are -6, 7. Compute its coordinates with respect to basis $\mathcal{B}$.

(a) $\mathcal{A}:\ (0,-1),(0,1)$, $\mathcal{B}: (1,0),(0,-1)$ (b) $\mathcal{A}:\ (4,4),(2,2)$, $\mathcal{B}: (1,1),(0,1)$

(c) $\mathcal{A}:\ (4,1),(2,1)$, $\mathcal{B}: (1,3),(9,1)$ (d) $\mathcal{A}:\ (2,1),(7,7)$, $\mathcal{B}: (1,-1),(-3,3)$

Minitest MT3

1. Lineární kombinace vektorů $\vec{v_1} = (3, 5, -2, 0), \vec{v_2} = (-1, 7, 13, -3), \vec{v_3} = (1, 0, -2, 3)$ s koefficienty $c_1 = 2, c_2 = -3, c_3 = -1$ je

(A) $(-8, -11, -41, 6)$ **(B)** $(8, 11, -41, 6)$ **(C)** $(8, -11, -41, 6)$
(D) $(8, -11, -41, -6)$. **(E)** Není žádná z uvedených.

2. Kolik z následujících čtyřech souborů vektorů ve V_3 je nezávislých?

$S_1 : (1, 0, 1), (2, 0, 3), (-1, 0, 0)$, $S_2 : (-3, 2, 1), (0, 0, 4), (0, -1, 0)$,

$S_3 : (-1, 1, 0), (1, 0, 5), (0, -3, 6)$, $S_4 : (1, 1, 1), (1, -1, 0), (0, 0, 9)$

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** všechny.

3. Kolik z vektorů $\vec{m} = (3, 2, 5)$, $\vec{n} = (5, 6, 7)$, $\vec{p} = (1, 0, -1)$, $\vec{r} = (0, -1, 3)$ patří do lineárního obalu souboru $\mathcal{S} : (1, 3, 2), (2, -1, 3)$?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** všechny.

4. Dány tři matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Vyberte, co je správně.

(A) $h(A \cdot B) = h(C \cdot A) < h(A \cdot C)$ **(B)** $h(A \cdot B) < h(C \cdot A) < h(A \cdot C)$
(C) $h(A \cdot B) = h(A \cdot C) < h(C \cdot A)$ **(D)** $h(A \cdot B) < h(A \cdot C) = h(C \cdot A)$.
(E) Žádný vztah není správný.

5. Dány matice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 & 8 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 7 & 9 \\ 4 & 5 & -6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Hodnost matice $P \cdot Q$ je **(A)** 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 5.

6. Kolik výpočetních chyb bylo uděláno v níže uvedeném postupu?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 9 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 12 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -54 \end{pmatrix}$$

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** více než 3.

7. Ve V_4 je zadán podprostor P pomocí systému generátorů:
$\mathcal{G} : (-1, 1, 0, -1), (2, 2, 1, 3), (-1, 0, 1, 1), (0, 4, 1, 1)$. Dimenze podprostoru P je

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4.

8. Dány dvě báze ve V_2, totiž $\mathcal{A} : (1, 1), (1, 3)$, $\mathcal{B} : (-1, 1), (4, 2)$.
Souřadnice vektoru $\vec{v}$ v bázi $\mathcal{A}$ jsou $1, -1$ a souřadnice vektoru $\vec{w}$ v bázi $\mathcal{B}$ jsou -2, 1.
Potom norma vektoru $2\vec{v} + 3\vec{w}$ je

(A) $\sqrt{17}$ **(B)** $2\sqrt{17}$ **(C)** $\sqrt{85}$ **(D)** $2\sqrt{85}$. **(E)** Není žádná z uvedených.

9 Dány dvě báze ve V_3 $\mathcal{A} : (0, 1, 3), (1, 1, 2), (1, 1, 4)$, $\mathcal{B} : (2, 1, 3), (1, 2, 2), (1, -1, 0)$.
Souřadnice vektoru $\vec{v}$ v bázi $\mathcal{B}$ jsou -3, -5, 2.
Potom souřadnice vektoru $\vec{v}$ v bázi $\mathcal{A}$ jsou

(A) 0, -1, 4 **(B)** -3, -5, 2 **(C)** 0, -1, 1 **(D)** 1, -1, 1. **(E)** Jiné než uvedeno.

Minitest MT3

1. Linear combination of vectors $\vec{v_1} = (3, 5, -2, 0), \vec{v_2} = (-1, 7, 13, -3), \vec{v_3} = (1, 0, -2, 3)$ with coefficients $c_1 = 2, c_2 = -3, c_3 = -1$ is

(A) $(-8, -11, -41, 6)$ **(B)** $(8, 11, -41, 6)$ **(C)** $(8, -11, -41, 6)$
(D) $(8, -11, -41, -6)$. **(E)** None of the above.

2. How many of the following four systems of vectors in V_3 are independent?

$S_1 : (1, 0, 1), (2, 0, 3), (-1, 0, 0)$, $S_2 : (-3, 2, 1), (0, 0, 4), (0, -1, 0)$,
$S_3 : (-1, 1, 0), (1, 0, 5), (0, -3, 6)$, $S_4 : (1, 1, 1), (1, -1, 0), (0, 0, 9)$

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** all of them.

3. How many of vectors $\vec{m} = (3, 2, 5)$, $\vec{n} = (5, 6, 7)$, $\vec{p} = (1, 0, -1)$, $\vec{r} = (0, -1, 3)$ belong to the linear span of the system $\mathcal{S} : (1, 3, 2), (2, -1, 3)$?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** all of them.

4. Given three matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Choose what is correct (we use the symbol "h" for the rank).

(A) $h(A \cdot B) = h(C \cdot A) < h(A \cdot C)$ **(B)** $h(A \cdot B) < h(C \cdot A) < h(A \cdot C)$
(C) $h(A \cdot B) = h(A \cdot C) < h(C \cdot A)$ **(D)** $h(A \cdot B) < h(A \cdot C) = h(C \cdot A)$.
(E) None of the above is correct.

5. Given matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 & 8 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 7 & 9 \\ 4 & 5 & -6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

The rank of matrix $P \cdot Q$ is **(A)** 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 5.

6. How many errors in calculations were made in the procedure below?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 9 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 12 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -54 \end{pmatrix}$$

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** more than 3.

7. In V_4, given subspace P spanned by the system:
$\mathcal{G} : (-1, 1, 0, -1), (2, 2, 1, 3), (-1, 0, 1, 1), (0, 4, 1, 1)$. The dimension of subspace P is

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4.

8. Given two bases of V_2, namely $\mathcal{A} : (1, 1), (1, 3)$, $\mathcal{B} : (-1, 1), (4, 2)$.
The coordinates of vector $\vec{v}$ with respect to basis $\mathcal{A}$ are 1, -1, and the coordinates of vector $\vec{w}$ with respect to basis $\mathcal{B}$ are -2, 1. Then the norm of vector $2\vec{v} + 3\vec{w}$ is

(A) $\sqrt{17}$ **(B)** $2\sqrt{17}$ **(C)** $\sqrt{85}$ **(D)** $2\sqrt{85}$. **(E)** None of the above.

9 Given two bases of V_3 $\mathcal{A} : (0, 1, 3), (1, 1, 2), (1, 1, 4)$, $\mathcal{B} : (2, 1, 3), (1, 2, 2), (1, -1, 0)$.
The coordinates of vector $\vec{v}$ with respect to basis $\mathcal{B}$ are -3, -5, 2.
Then the coordinates of vector $\vec{v}$ with respect to basis $\mathcal{A}$ are

(A) 0, -1, 4 **(B)** -3, -5, 2 **(C)** 0, -1, 1 **(D)** 1, -1, 1. **(E)** None of the above.

TÉMA 4. Čtvercové matice

Řád čtvercové m. A	je počet jejích řádků (sloupců), tj. A je typu $n \times n$,
$\det(A)\ldots$	determinant čtvercové matice A,
$A_{ij}\ldots$	algebraický doplněk prvku a_{ij} ve čtvercové matici A,
$\overline{A}, \mathrm{adj}(A)\ \ldots$	matice adjungovaná k matici A,
$A^{-1}\ \ldots$	matice inverzní k matici A (platí $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$),
Regulární matice ...	hodnost je rovna jejímu řádu, determinant není roven nule; pouze regulární matice má matici inverzní,
Singulární matice ...	hodnost je menší než její řád, determinant se rovná nule.

Poznámky

- Algebraický doplněk A_{ij} v A se počítá jako $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(S_{A,i,j})$, kde $S_{A,i,j}$ je submatice matice A, kterou z ní získáme vyškrtnutím i-tého řádku a j-tého sloupce.
- Matici adjungovanou k A sestavujeme z doplňků a pak ještě transponujeme. Každá čtvercová matice má matici adjungovanou.
- Determinanty vyšších řádů počítáme rozvojem.

Výpočet determinantu

Řád 2 (křížové pravidlo): $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \cdot d - c \cdot b,$ řád 3 (Sarrusovo pravidlo):

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

Rozvoj podle řádku i: $\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$

Rozvoj podle sloupce j: $\det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{3j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$

Poznámky

- Při přehazování řádků v A se může změnit znaménko $\det(A)$. Z řádku lze vytknout číslo před celý determinant. Determinant se nemění, když k řádku přičteme (odečteme) lineární kombinaci řádků ostatních.
- Pro libovolné matice řádu n platí $\det(A) = \det(A^{\mathrm{T}})$, $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Výpočet inverzní matice k matici regulární

Pomocí matice adjungované: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \overline{A}$

Eliminací: $\Big[A \mid E \Big] \sim \ldots \sim \ldots \sim \Big[E \mid A^{-1} \Big]$

Poznámky

- Pro druhý řád je: $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$
- Výpočet inverzní matice může být dosti časově náročný.
- Je-li A regulární matice, můžeme řešit maticovou rovnici $A \cdot X = B$ takto:
  $A \cdot X = B \longrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \longrightarrow E \cdot X = A^{-1} \cdot B \longrightarrow X = A^{-1} \cdot B.$
- Je-li A regulární matice, můžeme řešit maticovou rovnici $X \cdot A = B$ takto:
  $X \cdot A = B \longrightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \longrightarrow X \cdot E = B \cdot A^{-1} \longrightarrow X = B \cdot A^{-1}.$

TOPIC 4. Square Matrices

Order of square m. A	is the number of its rows (columns), i. e. A is an $n \times n$ m.,
$\det(A) \ldots$	determinant of A,
$A_{ij} \ldots$	the co-factor (or algebraic complement) of entry a_{ij} in A
$\overline{A}, \mathrm{adj}(A) \ldots$	the adjoint matrix of A,
$A^{-1} \ldots$	the inverse matrix of A (there is $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$),
Non-singular matrix ...	the rank is equal to the order, the determinant is not equal to zero; only a regular matrix has its inverse,
Singular matrix ...	the rank is less than the order, the determinant equals zero.

Notes

- The co-factor A_{ij} in A is calculated as $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(S_{A,i,j})$, where $S_{A,i,j}$ is the submatrix of A obtained by deleting of the i-th row and the j-th column from it.
- The adjoint matrix of A is first formed by the co-factors and then transposed. Every square matrix has its adjoint matrix.
- Higher order determinants are calculated by the development (the Laplace expansion).

Calculation of the determinant

Order 2 (the "cross" multiplication): $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \cdot d - c \cdot b$, order 3 (the Sarrus rule):

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

Development by row i: $\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$

Development by column j: $\det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{3j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$

Notes

- If the rows of A are permuted then the $\det(A)$ can change its sign. A factor common to all the entries of a row can be taken before the whole $\det(A)$. The value of the determinant does not change if to a given row a linear combination of the other rows is added.
- For any matrices of order n there is $\det(A) = \det(A^{\mathrm{T}})$, $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Calculation of the inverse to a regular matrix

By means of the adjoint matrix: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \overline{A}$

Elimination: $\begin{bmatrix} A \mid E \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} E \mid A^{-1} \end{bmatrix}$

Notes

- The computation of the inverse matrix can be quite time-spending.
- For order 2 there is: $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$
- If A is a regular matrix, the matrix equation $A \cdot X = B$ can be solved like: $A \cdot X = B \longrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \longrightarrow E \cdot X = A^{-1} \cdot B \longrightarrow X = A^{-1} \cdot B$.
- If A is a regular matrix, the matrix equation $X \cdot A = B$ can be solved like: $X \cdot A = B \longrightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \longrightarrow X \cdot E = B \cdot A^{-1} \longrightarrow X = B \cdot A^{-1}$.

ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad 1. Pro matici M vpravo

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) determinantem testujte singulárnost,
(b) sestavte $\overline{M}$ a z ní M^{-1}, (c) vypočtěte eliminací M^{-1}.

Řešení. (a) Sarrusovým pravidlem určíme $\det(M)$. Je-li nulový, je M singulární matice.

$\det(M) = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 5 \cdot 4 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot 1 - (0 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot 4 \cdot 1 + 5 \cdot 0 \cdot 3) = 2 \neq 0$ (matice je regulární).

(b) Počítáme všechny doplňky M_{ij}: $M_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot (2 \cdot 3 - 4 \cdot 1) = 2.$

$$M_{12} = (-1)^3 \det \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = -(0 \cdot 3 - 4 \cdot 0) = 0, \qquad M_{13} = (-1)^4 \det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 0,$$

$$M_{21} = (-1)^3 \det \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = -(5 \cdot 3 - 0 \cdot 1) = -15, \qquad M_{22} = (-1)^4 \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 1 \cdot 3 - 0 \cdot 0 = 3,$$

$$M_{23} = (-1)^5 \det \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -(1 \cdot 1 - 5 \cdot 0) = -1, \qquad M_{31} = (-1)^4 \det \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 5 \cdot 4 - 0 \cdot 2 = 20,$$

$$M_{32} = (-1)^5 \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = -(1 \cdot 4 - 0 \cdot 0) = -4, \qquad M_{33} = (-1)^6 \det \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot 2 - 5 \cdot 0 = 2.$$

Z doplňků sestavíme matici, kterou transponujeme. Tak získáme $\overline{M}$, a z ní snadno M^{-1}.

$$\overline{M} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -15 & 3 & -1 \\ 20 & -4 & 2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & -15 & 20 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \qquad M^{-1} = \frac{1}{\det M} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -15 & 20 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -15/2 & 10 \\ 0 & 3/2 & -2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c)
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -10 & 1 & -5/2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -15/2 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1 \end{array}\right]$$

Příklad 2. Výpočet determinantu 4. řádu provedeme (po úpravě matice) rozvojem podle třetího sloupce. Je mnoho jiných možností výpočtu tohoto determinantu.

Řešení. (Klíč. jednička je a_{13}) $\det A = \det \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} =$

$$= a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33} + a_{43} \cdot A_{43} = 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} + 0 + 0 + 0 = -28.$$

Příklad 3. Řešte rovnici $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot X - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 2X.$

Řešení. Rovnici postupně upravujeme; na levé straně vytkneme matici X doprava za závorku. Nakonec budeme potřebovat inverzní matici, která se v případě 2. řádu určí snadno :

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot X - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 2X \quad \longrightarrow \quad \left(\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) X = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad X = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zkouška. Levá strana $= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot X - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ Pravá strana $= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 2X = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}.$

EXAMPLES

Example 1. For matrix M (a) test its singularity using the det., (b) create $\overline{M}$ and M^{-1} from it, (c) calculate M^{-1} by elimination.
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solution. (a) We evaluate $\det(M)$ using the Sarrus rule. If the result is zero, M is singular.
$\det(M) = 1\cdot2\cdot3+5\cdot4\cdot0+0\cdot0\cdot1-(0\cdot2\cdot0+1\cdot4\cdot1+5\cdot0\cdot3) = 2 \neq 0$ (the matrix is non-singular).

(b) We calculate all the cofactors M_{ij}: $M_{11} = (-1)^{1+1}\cdot\det\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot(2\cdot3-4\cdot1) = 2.$

$$M_{12} = (-1)^3 \det\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = -(0\cdot3-4\cdot0) = 0, \qquad M_{13} = (-1)^4 \det\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0\cdot1-2\cdot0 = 0,$$
$$M_{21} = (-1)^3 \det\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = -(5\cdot3-0\cdot1) = -15, \qquad M_{22} = (-1)^4 \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 1\cdot3-0\cdot0 = 3,$$
$$M_{23} = (-1)^5 \det\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -(1\cdot1-5\cdot0) = -1, \qquad M_{31} = (-1)^4 \det\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 5\cdot4-0\cdot2 = 20,$$
$$M_{32} = (-1)^5 \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = -(1\cdot4-0\cdot0) = -4, \qquad M_{33} = (-1)^6 \det\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 1\cdot2-5\cdot0 = 2.$$

We create the cofactor matrix, and then transpose it. Thus we obtain $\overline{M}$, and M^{-1} from it.
$$\overline{M} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -15 & 3 & -1 \\ 20 & -4 & 2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & -15 & 20 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \qquad M^{-1} = \frac{1}{\det M}\cdot\begin{bmatrix} 2 & -15 & 20 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -15/2 & 10 \\ 0 & 3/2 & -2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c)
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -10 & 1 & -5/2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -15/2 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1 \end{array}\right]$$

Example 2. The evaluation of a det. of order 4 is done (after a matrix transformation) by means of the development by the third row. There are many other ways to evaluate this determinant.

Solution. (The pivot entry is a_{13})
$$\det A = \det\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} =$$
$$= a_{13}\cdot A_{13}+a_{23}\cdot A_{23}+a_{33}\cdot A_{33}+a_{43}\cdot A_{43} = 1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\det\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}+0+0+0 = -28.$$

Example 3. Solve the equation $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\cdot X - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 2X.$

Solution. We gradually transform the equation; on the left side we factor out X after the brackets. At the end, we need the inverse matrix, which, in the case of order 2, is easy to obtain :
$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\cdot X - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 2X \longrightarrow \left(\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - 2\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)X = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\cdot X = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow X = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = -\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Check. Left Side $= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\cdot X - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ Right Side $= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 2X = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}.$

ÚLOHY K ŘEŠENÍ

Úloha 4.1. Vypočtěte determinat a rozhodněte, zda matice je regulární.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 2 \\ 1 & 9 & -7 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 11 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \\ -1 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Úloha 4.2.

(a) Pro matici A z úlohy 4.1. vypočtěte hodnotu součtu

$$A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{21} + A_{22} + A_{23} + A_{31} + A_{32} + A_{33}.$$

(b) Pro matici B z úlohy 4.1. vypočtěte matici adjungovanou a z ní matici inverzní.

(c) Pro matici B z úlohy 4.1. vypočtěte eliminací matici inverzní.

Úloha 4.3. Počítejte determinanty rozvojem.

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(d)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Úloha 4.4. Vypočtěte inverzní matice metodou eliminační a proveďte zkoušku správnosti.

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(d)} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Úloha 4.5. Řešte maticové rovnice a proveďte zkoušky správnosti.

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} - X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{(c)}\ X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \qquad \text{(d)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{(e)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \text{(f)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{(g)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = X \qquad \text{(h)}\ X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 3X$$

PROBLEMS TO SOLVE

Exercise 4.1. Evaluate the determinant and decide if the matrix is non-singular.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 2 \\ 1 & 9 & -7 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 11 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \\ -1 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Exercise 4.2.

(a) For matrix A from 4.1. calculate the value of the sum
$A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{21} + A_{22} + A_{23} + A_{31} + A_{32} + A_{33}$.

(b) For matrix B from 4.1. calculate its adjoint matrix and then the inverse B^{-1}.

(c) For matrix B from 4.1. calculate its inverse by means of elimination.

Exercise 4.3. Evaluate the determinants using the Laplace expansion.

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(d)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercise 4.4. Using the elimination method, compute the inverse matrix and check your result.

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(d)} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Exercise 4.5. Solve matrix equations and check your results.

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} - X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{(c)} \; X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \qquad \text{(d)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{(e)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \text{(f)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{(g)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = X \qquad \text{(h)} \; X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 3X$$

Minitest MT4

1.

Kolik z následujících matic $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ má matici inverzní?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4.

2.

Jsou-li $K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, potom $K^{-1} \cdot L =$

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **(B)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **(C)** $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ **(D)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ **(E)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

3.

Je dána matice $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Vypočítejte součet $M_{11} + M_{12} + M_{22}$.

(A) -2 **(B)** -1 **(C)** 0 **(D)** 1 **(E)** 2.

4.

Vyřešte rovnici $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$. Součet $x_{11} + x_{12}$ je roven

(A) -2 **(B)** -1 **(C)** 0 **(D)** 1 **(E)** 4.

5.

Najděte všechny hodnoty parametru p, pro něž matice $\begin{bmatrix} 1 & 1 & p & 2 \\ 1 & 2 & 0 & p \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ má matici adjungovanou.

(A) Žádné p **(B)** všechna p **(C)** $p \in \mathbf{R} - \{0\}$ **(D)** $p \in \mathbf{R} - \{1, -1\}$.
(E) Žádná z uvedených odpovědí není pravdivá.

6.

Jsou dány matice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Potom $(AB)^{-1}$ je

(A) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **(B)** $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ **(C)** $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ **(D)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ **(E)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

7.

Řešte rovnici $\det \begin{bmatrix} x-1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 0 & x+3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 4$. Řešení je

(A) $x = 1$ **(B)** $x = 2$ **(C)** $x = 11$ **(D)** $x = 12$. **(E)** Není žádné z uvedených.

8.

Hodnota determinantu matice $K = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & -4 \end{bmatrix}$ je

(A) -240 **(B)** -120 **(C)** 120 **(D)** 240. **(E)** Není žádná z uvedených.

Minitest MT4

1.

How many of the matrices $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ have their inverse?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4.

2.

If $K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, then $K^{-1} \cdot L =$

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **(B)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **(C)** $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ **(D)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ **(E)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

3.

Given matrix $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Calculate the value of the sum $M_{11} + M_{12} + M_{22}$.

(A) -2 **(B)** -1 **(C)** 0 **(D)** 1 **(E)** 2.

4.

Solve the equation $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$. The sum $x_{11} + x_{12}$ equals

(A) -2 **(B)** -1 **(C)** 0 **(D)** 1 **(E)** 4.

5.

Find all the values of parameter p for which the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 1 & p & 2 \\ 1 & 2 & 0 & p \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ has its adjoint matrix.

(A) No value of p **(B)** all values of p **(C)** $p \in \mathbf{R} - \{0\}$ **(D)** $p \in \mathbf{R} - \{1, -1\}$.
(E) None of the answers above is correct.

6.

Given matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Then $(AB)^{-1}$ is

(A) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **(B)** $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ **(C)** $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ **(D)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ **(E)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

7.

Solve the equation $\det \begin{bmatrix} x-1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 0 & x+3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 4$. The solution is

(A) $x = 1$ **(B)** $x = 2$ **(C)** $x = 11$ **(D)** $x = 12$. **(E)** None of the above.

8.

The value of the determinant of matrix $K = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & -4 \end{bmatrix}$ is

(A) -240 **(B)** -120 **(C)** 120 **(D)** 240. **(E)** None of the above.

TÉMA 5. Soustavy lineárních rovnic

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & +\ldots+ & a_{1n}\,x_n & = b_1 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & +\ldots+ & a_{2n}\,x_n & = b_2 \\ \ldots & & \ldots & & & \ldots \\ a_{m1}\,x_1 & + & a_{m2}\,x_2 & +\ldots+ & a_{mn}\,x_n & = b_m \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad A^* = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

A a A^* ...	matice soustavy a rozšířená matice soustavy,
m, n	počet rovnic, počet neznámých (proměnných),
$\vec{b}$...	$= (b_1, b_2, \ldots, b_m)$, vektor pravých stran,
$\vec{x}$ ...	$= (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, vektor neznámých,
Řešení ...	jakýkoliv vektor $\vec{x}$, který splňuje všechny rovnice,
$h(A) = h(A^*)$	Frobeniova podmínka; soustava je řešitelná $\Leftrightarrow$ F. p. je splněna,
Regulární soustava	tj. $h(A) = h(A^*) = n = m$; taková soustava má jediné řešení.

Poznámky

- Je-li $h(A) = h(A^*) < n$, soustava má nekonečně mnoho řešení.
- Je-li $h(A) = h(A^*) = n$, soustava má jediné řešení.

Metody řešení regulární soustavy rovnic

Cramerovo pravidlo. Označíme A_j matici, která vznikne, když v A nahradíme j-tý sloupec sloupcem pravých stran. Potom je $x_j = \det(A_j)/\det(A)$.

Gaussova eliminace. Rozšířenou matici soustavy upravíme na Gaussův tvar. Pak z nových rovnic postupně vypočítáváme x_n, x_{n-1} až x_1.

$$\left[\, A \mid \vec{b}^{\mathrm{T}} \,\right] \sim \ldots \sim \ldots \sim \left[\, A' \mid \vec{c}^{\mathrm{T}} \,\right]$$

Jordanova eliminace. Rozšířenou matici soustavy upravujeme, až na místě matice A dostaneme matici E. Pak na místě vektoru pravých stran $\vec{b}^{\mathrm{T}}$ je přímo řešení $\vec{x}^{\mathrm{T}}$.

$$\left[\, A \mid \vec{b}^{\mathrm{T}} \,\right] \sim \ldots \sim \ldots \sim \left[\, E \mid \vec{x}^{\mathrm{T}} \,\right]$$

Užití inverzní matice. Řešíme matic. rov. $A \cdot \vec{x}^{\mathrm{T}} = \vec{b}^{\mathrm{T}}$ vynásobením obou stran zleva A^{-1}.

$$A \cdot \vec{x}^{\mathrm{T}} = \vec{b}^{\mathrm{T}} \longrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x}^{\mathrm{T}} = A^{-1} \cdot \vec{b}^{\mathrm{T}} \longrightarrow E \cdot \vec{x}^{\mathrm{T}} = A^{-1} \cdot \vec{b}^{\mathrm{T}} \longrightarrow \vec{x}^{\mathrm{T}} = A^{-1} \cdot \vec{b}^{\mathrm{T}}.$$

Homogenní soustava, tj. $\vec{b} = \vec{o}$

Množina všech řešení je podprostor H ve V_n a $\dim(H){=}k{=}n{-}h(A)$. Po úpravě Gaussovou eliminací rozlišíme **bázické** a **nebázické proměnné**. Vhodnou volbou nebázických proměnných postupně získáme vektory $\vec{h}_1, \ldots, \vec{h}_k$ tvořící bázi podprostoru H.

Obecné řešení je $\vec{h} = c_1 \cdot \vec{h}_1 + \ldots + c_k \cdot \vec{h}_k$, kde $c_1, \ldots, c_k$ jsou libovolné konstanty.

Nehomogenní soustava, tj. $\vec{b} \neq \vec{o}$

Je třeba získat jakékoliv jedno (tzv. částečné) řešení $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ této soustavy (např. Gaussovou eliminací a volbou nebázických proměných rovných nule).

Dále je třeba vyřešit příslušnou homogenní soustavu - najít její obecné řešení $\vec{h}$.

Pak platí schéma *Obecné řeš. = částečné řeš. + homogenní řeš.* což znamená, že obecné řešení je $\vec{x} = \vec{p} + \vec{h} = \vec{p} + c_1 \cdot \vec{h}_1 + \ldots + c_k \cdot \vec{h}_k$ ($c_1, \ldots, c_k$ jsou libovolné konstanty).

TOPIC 5. Systems of Linear Equations

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & +\ldots+ & a_{1n}\,x_n & = b_1 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & +\ldots+ & a_{2n}\,x_n & = b_2 \\ \ldots & & \ldots & & & \ldots \\ a_{m1}\,x_1 & + & a_{m2}\,x_2 & +\ldots+ & a_{mn}\,x_n & = b_m \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad A^* = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

A and A^* ...	the system matrix and the augmented matrix,
m, n	the number of equations, the number of unknowns (variables),
$\vec{b}$...	$= (b_1, b_2, \ldots, b_m)$, the right side vector,
$\vec{x}$ ...	$= (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, the variable vector,
Solution ...	any vector $\vec{x}$ satisfying all equations,
$h(A) = h(A^*)$	the Frobenius condition; the system is solvable $\Leftrightarrow$ the F.c. is satisfied,
Regular system	i. e. $h(A) = h(A^*) = n = m$; such a system has a unique solution.

Notes

- If $h(A) = h(A^*) < n$ then the system has infinitely many solutions.
- If $h(A) = h(A^*) = n$ then the system has a unique solution.

Methods of solving regular systems of equations

The Cramer rule. Denote by A_j the matrix obtained by subtituting the j's column in A with the right-side column. Then $x_j = \det(A_j)/\det(A)$.

The Gauss elimination. The augmented matrix is transformed into an echelon form. Then, from the new system of equations, we gradually get the values of x_n, x_{n-1} to x_1.

$$\left[\, A \mid \vec{b}^{\mathrm{T}} \,\right] \sim \ldots \sim \ldots \sim \left[\, A' \mid \vec{c}^{\mathrm{T}} \,\right]$$

The Jordan elimination. We transform the augmented matrix until we have the unit matrix E were A was originally. Then the solution vector $\vec{x}^{\mathrm{T}}$ appears on the place of $\vec{b}^{\mathrm{T}}$.

$$\left[\, A \mid \vec{b}^{\mathrm{T}} \,\right] \sim \ldots \sim \ldots \sim \left[\, E \mid \vec{x}^{\mathrm{T}} \,\right]$$

The use of the inverse matrix. We solve the matrix equation $A\cdot\vec{x}^{\mathrm{T}} = \vec{b}^{\mathrm{T}}$ by multiplying both its sides by A^{-1} from the left.

$$A\cdot\vec{x}^{\mathrm{T}} = \vec{b}^{\mathrm{T}} \;\longrightarrow\; A^{-1}\cdot A\cdot\vec{x}^{\mathrm{T}} = A^{-1}\cdot\vec{b}^{\mathrm{T}} \;\longrightarrow E\cdot\vec{x}^{\mathrm{T}} = A^{-1}\cdot\vec{b}^{\mathrm{T}} \;\longrightarrow\; \vec{x}^{\mathrm{T}} = A^{-1}\cdot\vec{b}^{\mathrm{T}}.$$

The Homogeneous System, i.e. $\vec{b} = \vec{o}$

The set of all solutions is a subspace H of V_n and $\dim(H) = k = n - h(A)$. After the Gauss' elimination we distinguish **the leading** and **the free** variables. Using an appropriate choice of the values of free variables we get the vectors $\vec{h}_1, \ldots, \vec{h}_k$ forming a basis of H.

The general solution is $\vec{h} = c_1\cdot\vec{h}_1 + \ldots + c_k\cdot\vec{h}_k$, where $c_1, \ldots, c_k$ are arbitrary constants.

The Inhomogeneous System, i.e. $\vec{b} \neq \vec{o}$

We must obtain one (particular) solution $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ of the system (e.g. using Gauss' elimination and then choosing the values of all free variables equal to zero).

Then it is necessary to solve the **associated** homogeneous system - to give its general solution $\vec{h}$. We use the scheme *General = Partial + Homogeneous* which means that the general solution is $\vec{x} = \vec{p} + \vec{h} = \vec{p} + c_1\cdot\vec{h}_1 + \ldots + c_k\cdot\vec{h}_k$ ($c_1, \ldots, c_k$ arbitrary constants).

ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad 1. Řešte regulární soustavu 3 rovnic o 3 neznámých x_1, x_2, x_3

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(a) Cramerovým pravidlem, (b) Gaussovou a Jordanovou eliminací, (c) pomocí matice inverzní.

Řešení. (a) Cramerovo pravidlo (soustava je skutečně regulární, neboť $\det A = -2 \neq 0$).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$x_1 = \tfrac{\det A_1}{\det A} = \tfrac{-1}{-2} = \tfrac{1}{2}, \quad x_2 = \tfrac{\det A_2}{\det A} = \tfrac{-3}{-2} = \tfrac{3}{2}, \quad x_3 = \tfrac{\det A_3}{\det A} = \tfrac{5}{-2} = -\tfrac{5}{2}.$$

(b) Gaussova a Gauss-Jordanova eliminace.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= -1. \\ 2x_3 &= -5 \end{aligned}$$

Nyní má matice soustavy Gaussův tvar. Z poslední rovnice okamžitě dostaneme $x_3 = -\frac{5}{2}$. Tuto hodnotu dosadíme do druhé rovnice a dostaneme $x_2 - \frac{5}{2} = -1$, takže $x_2 = \frac{3}{2}$. Nakonec získané hodnoty x_2, x_3 dosadíme do první rovnice a dostaneme $x_1 + 2 \cdot \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = 1$, tj $x_1 = \frac{1}{2}$. Pokračujeme v eliminaci dále a na pravé straně upravené matice získáme přímo řešení.

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} \end{array}\right].$$

(c) Inverzní matici A^{-1} připravíme předem pomocí matice adjungované nebo eliminací.

$$A \cdot \vec{x}^{\mathrm{T}} = \vec{b}^{\mathrm{T}} \longrightarrow \vec{x}^{\mathrm{T}} = A^{-1} \cdot \vec{b}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

Příklad 2. Pro zadanou nehomogenní soustavu 4 rovnic o 5 neznámých x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 prověřte platnost Frobeniovy podmínky a najděte její obecné řešení.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 &= 3 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 5x_5 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 &= 7 \end{aligned}$$

Řešení.
$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Tedy $h(A^*) = 3$. Zakryjeme poslední sloupeček a máme $h(A) = 3$. Tedy $h(A) = h(A^*) = 3 < 5$, Frobeniova podmínka je splněna a soustava má nekonečně mnoho řešení. Po úpravě Gaussovou eliminací má tvar vpravo. Bázické proměnné jsou x_1, x_2, x_4. Pro nebázické proměnné zvolíme x_3=0, x_5=0 a vypočteme postupně x_4=3, x_2= − 8, $x_1 = 20$. Máme partikulární řešení $\vec{p} = (20, -8, 0, 3, 0)$ nehomogenní soustavy.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 1 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 1 \\ x_4 + x_5 &= 3 \end{aligned}$$

Pro příslušnou **homogenní** soustavu (vpravo dole) je množina všech řešení podprostor H prostoru V_5 a $\dim(H) = 5 - h(A) = 2$. Najdeme dva vektory $h_1 = (?, ?, 1, ?, 0)$, $h_2 = (?, ?, 0, ?, 1)$ jeho báze.

Vektor $\vec{h}_1$: zvolíme x_3=1, x_5=0 $\rightarrow$ x_4=0, x_2= − 1, x_1=1.

Vektor $\vec{h}_2$: zvolíme x_3=0, x_5=1 $\rightarrow$ x_4= − 1, x_2= − 1, x_1=0.

Tedy $\vec{h}_1 = (1, -1, 1, 0, 0)$, $\vec{h}_2 = (0, -1, 0, -1, 1)$.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 0 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 0 \\ x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Obecné řešení **nehomogenní** soustavy: $\vec{x} = \vec{p} + c_1\vec{h}_1 + c_2\vec{h}_2$, kde c_1, c_2 jsou volitelné konstanty.

EXAMPLES

Example 1. Solve the regular system of 3 equations in 3 unknowns x_1, x_2, x_3 using

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 &+& 2x_2 &+& x_3 &=& 1 \\ 2x_1 &+& x_2 &+& x_3 &=& 0 \\ x_1 &+& 3x_2 &+& 2x_3 &=& 0 \end{array}$$

(a) the Cramer rule, (b) the Gauss and the Jordan elimination, (c) the inverse matrix.

Solution. (a) The Cramer rule (really, the system is regular because $\det A = -2 \neq 0$).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}, \quad x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{5}{-2} = -\frac{5}{2}.$$

(b) The Gauss and the Gauss-Jordan elimination.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + x_3 &=& 1 \\ x_2 + x_3 &=& -1. \\ 2x_3 &=& -5 \end{array}$$

Now,we have an echelon form. From the last equation, we get $x_3 = -\frac{5}{2}$. We substitute this value in the second equation and we get $x_2 - \frac{5}{2} = -1$, thus $x_2 = \frac{3}{2}$. Finally, we substitute the values x_2, x_3 obtained into the first equation and we get $x_1 + 2 \cdot \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = 1$, i.e. $x_1 = \frac{1}{2}$.
We contitue the elimination process to get the solution vector directly.

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} \end{array}\right].$$

(c) It is necessary to prepare A^{-1} beforehand using the adjoint matrix or elimination.

$$A \cdot \vec{x}^{\mathrm{T}} = \vec{b}^{\mathrm{T}} \longrightarrow \vec{x}^{\mathrm{T}} = A^{-1} \cdot \vec{b}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

Example 2. For the inhomogeneous system of 4 equations in 5 unknowns x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 approve the Frobenius condition and give the general solution.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 &+& 2x_2 &+& x_3 &-& x_4 &+& x_5 &=& 1 \\ 2x_1 &+& 5x_2 &+& 3x_3 &+& x_4 &+& 2x_5 &=& 3 \\ x_1 &+& 3x_2 &+& 2x_3 &+& 2x_4 &+& 5x_5 &=& 2 \\ x_1 &+& 2x_2 &+& x_3 &+& x_4 &+& 3x_5 &=& 7 \end{array}$$

Solution.
$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Thus, $h(A^*) = 3$. We hide the last column in the result and we have $h(A) = 3$. $h(A) = h(A^*) = 3 < 5$, The Frobenius condition is satisfied and the system has infinitely many solutions. After the Gauss elimination we have the form on the right. The leading variables are x_1, x_2, x_4.
For the free variables we choose x_3=0, x_5=0 and we gradually calculate x_4=3, x_2= − 8, $x_1 = 20$. We have a particular solution $\vec{p} = (20, -8, 0, 3, 0)$ of the inhomogeneous system.

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &=& 1 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 &=& 1 \\ x_4 + x_5 &=& 3 \end{array}$$

For the associated homogeneous system (on the right down), the set of all solutions is subspace H of V_5 and dim(H)=5−$h(A)$=2. We find two vectors $h_1 = (?, ?, 1, ?, 0)$, $h_2 = (?, ?, 0, ?, 1)$ of its basis.
Vector $\vec{h}_1$: we choose x_3=1, x_5=0 $\rightarrow$ x_4=0, x_2= − 1, x_1=1.
Vector $\vec{h}_2$: we choose x_3=0, x_5=1 $\rightarrow$ x_4= − 1, x_2= − 1, x_1=0.
Thus, $\vec{h}_1 = (1, -1, 1, 0, 0)$, $\vec{h}_2 = (0, -1, 0, -1, 1)$.

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &=& 0 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 &=& 0 \\ x_4 + x_5 &=& 0 \end{array}$$

The general solution of the **inhomogeneous** system: $\vec{x}$=$\vec{p}$+$c_1\vec{h}_1$+$c_2\vec{h}_2$, c_1, c_2 are constants.

ÚLOHY K ŘEŠENÍ

Úloha 5.1. Pro každou ze zadaných soustav rovnic o neznámých x_1, x_2, x_3 prověřte Frobeniovu podmínku a určete počet řešení.

(a) $$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + x_2 + 6x_3 &= 3 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 2 \\ -3x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= -6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 3 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 &= -4 \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

(d) $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Úloha 5.2. Určete, pro které hodnoty parametru p lze danou soustavu 2 rovnic o 2 neznámých řešit Cramerovým pravidlem. Pro takové p ji vyřešte Cramerovým pravidlem.

(a) $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 5 \\ x_1 + px_2 &= 1 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} px_1 - x_2 &= 3 \\ x_1 + 2px_2 &= 0 \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= p \\ 2x_1 + 3x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Úloha 5.3. Řešte pomocí inverzní matice soustavy 3 rovnic o 3 neznámých.

(a) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 &= 8 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= -6 \\ 2x_1 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 &= 8 \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 + x_3 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 &= 6 \end{aligned}$$

Úloha 5.4. Následující dvě soustavy rovnic o 4 neznámých řešte Gaussovou a Gauss-Jordanovou eliminací.

(a) $$\begin{aligned} x + 2y - 5z + u &= 2 \\ 3x + y - 4z + 6u &= -2 \\ -x + 2y - z + u &= 6 \\ y + 3z - 4u &= 1 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} x + y + 2z + t &= -1 \\ 4x + y + 2z &= 1 \\ x + y + z + t &= 0 \\ 5x + 4z + 2t &= 3 \end{aligned}$$

Úloha 5.5. Pro homogenní soustavy rovnic o neznámých x_1, x_2, x_3, x_4 určete dimenzi prostoru všech řešení a najděte nějakou jeho bázi.

(a) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Úloha 5.6. Pro nehomogenní soustavy rovnic o neznámých x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 napište obecné řešení.

(a) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 &= 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 &= 2 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 4x_4 + x_5 &= -2 \\ 3x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 6x_4 - 3x_5 &= 6 \end{aligned}$$

PROBLEMS TO SOLVE

Exercise 5.1. For each of the given systems of equations in unknowns x_1, x_2, x_3 approve the Frobenius condition and give the number of solutions.

(a) $\begin{aligned} 3\,x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 3\,x_1 + x_2 + 6\,x_3 &= 3 \end{aligned}$

(b) $\begin{aligned} x_1 - 2\,x_2 + 2\,x_3 &= 2 \\ -3\,x_1 + 6\,x_2 - 2\,x_3 &= -6 \\ 2\,x_1 - x_2 + 3\,x_3 &= 3 \\ -2\,x_1 + 4\,x_2 + x_3 &= -4 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} x_1 + 2\,x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 - 2\,x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2\,x_3 &= 2 \end{aligned}$

(d) $\begin{aligned} x_1 - 2\,x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2\,x_2 + x_3 &= 1 \\ 3\,x_1 \qquad + 2\,x_3 &= 3 \end{aligned}$

Exercise 5.2. Find out for what values of parameter p the given system of 2 equations in 2 unknowns the Cramer rule can be applied. For such a p use the Cramer rule.

(a) $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 5 \\ x_1 + px_2 &= 1 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} px_1 - x_2 &= 3 \\ x_1 + 2px_2 &= 0 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= p \\ 2x_1 + 3x_2 &= 0 \end{aligned}$

Exercise 5.3. By means of the inverse matrix, solve the systems of 3 equations in 3 unknowns.

(a) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 \qquad + x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 \qquad &= 8 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= -6 \\ 2x_1 \qquad + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 \qquad &= 8 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 \qquad + x_3 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 \qquad &= 6 \end{aligned}$

Exercise 5.4. Using the Gauss and the Gauss-Jordan elimination solve the following two systems of equations in 4 unknowns.

(a) $\begin{aligned} x + 2y - 5z + u &= 2 \\ 3x + y - 4z + 6u &= -2 \\ -x + 2y - z + u &= 6 \\ y + 3z - 4u &= 1 \end{aligned}$

(b) $\begin{aligned} x + y + 2z + t &= -1 \\ 4x + y + 2z \qquad &= 1 \\ x + y + z + t &= 0 \\ 5x \qquad + 4z + 2t &= 3 \end{aligned}$

Exercise 5.5. For the homogeneous systems of equations in unknowns x_1, x_2, x_3, x_4, determine the dimension of the space of all their solutions and find some of its bases.

(a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$

(b) $\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned}$

Exercise 5.6. For the inhomogeneous systems of equations in unknowns x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, write the general solution.

(a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 &= 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 &= 2 \end{aligned}$

(b) $\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 4x_4 + x_5 &= -2 \\ 3x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 6x_4 - 3x_5 &= 6 \end{aligned}$

Minitest MT5

1. Kolik z následujících čtyřech soustav o neznámých x_1, x_2 může být vyřešeno Cramerovým pravidlem?

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 1 \\ 6x_1 + 3x_2 &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 &= 2 \\ 3x_1 + 3x_2 &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 2 \\ 6x_1 - 3x_2 &= 6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 0 \\ 6x_1 + 3x_2 &= 0 \end{aligned}$$

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4.

2. Soustavu 3 rovnic o 3 neznámých vpravo budeme řešit pomocí inverzní matice. Tato inverzní matice je

$$\begin{aligned} x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 &= 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 9 \\ x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, **(B)** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, **(C)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, **(D)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Určete, kolik řešení má soustava čtyř rovnic o čtyřech neznámých x_1, x_2, x_3, x_4 vpravo.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &= 7 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 6 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 5 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 4 \end{aligned}$$

(A) žádné **(B)** právě 1 **(C)** právě 2 **(D)** právě 4 **(E)** nekonečně mnoho.

4. Pomocí Cramerova pravidla vypočítejte neznámou x_3 soustavy lineárních rovnic.

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 + 9x_3 &= 10 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 6x_2 + 6x_3 &= 2 \end{aligned}$$

(A) $x_3 = \frac{11}{37}$ **(B)** $x_3 = \frac{22}{37}$ **(C)** $x_3 = \frac{27}{37}$ **(D)** $x_3 = \frac{32}{37}$. **(E)** Není žádná z uvedených.

5. Je dána soustava lineárních rovnic o neznámých x_1, x_2 s parametrem q. Určete všechny hodnoty parametru q, pro něž lze soustavu vyřešit Gauss-Jordanovou eliminací.

$$\begin{aligned} qx_1 + 4x_2 &= 3 \\ 2x_1 + 2qx_2 &= 7 \end{aligned}$$

(A) žádné q **(B)** $q \in \{-2, 2\}$ **(C)** $q \in \mathbf{R} - \{-2, 2\}$ **(D)** $q \in \mathbf{R}$.
(E) Žádná z uvedených odpovědí není správná.

6. Určete dimenzi prostoru všech řešení homogenní soustavy rovnic o neznámých x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 5

7. Soustava 3 rovnic o 3 neznámých vpravo má nekonečně mnoho řešení. K popisu jejího obecného řešení potřebujeme jedno její řešení - tzv. řešení partikulární $\vec{p}$. Jako vektor $\vec{p}$ můžeme použít

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 &= 9 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

(A) $(4, 4, 11)$ **(B)** $(4, 4, -11)$ **(C)** $(6, -4, -11)$ **(D)** $(-6, 4, 11)$.
(E) Žádný z uvedených vektorů nelze použít.

Minitest MT5

1. How many of the given four systems in unknowns x_1, x_2 can be solved by means of the Cramer rule?

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 1 \\ 6x_1 + 3x_2 &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 &= 2 \\ 3x_1 + 3x_2 &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 2 \\ 6x_1 - 3x_2 &= 6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 0 \\ 6x_1 + 3x_2 &= 0 \end{aligned}$$

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4.

2. We will solve the system of 3 equations in 3 unknowns on the right by means of the inverse matrix. The inverse matrix is

$$\begin{aligned} x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 &= 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 9 \\ x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, **(B)** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, **(C)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, **(D)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Determine the number of solutions of the system in four unknowns x_1, x_2, x_3, x_4 on the right.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &= 7 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 6 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 5 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 4 \end{aligned}$$

(A) none **(B)** exactly 1 **(C)** exactly 2 **(D)** exactly 4 **(E)** infinitely many.

4. By means of the Cramer rule compute the value of x_3 from the system of equations.

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 + 9x_3 &= 10 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 6x_2 + 6x_3 &= 2 \end{aligned}$$

(A) $x_3 = \dfrac{11}{37}$ **(B)** $x_3 = \dfrac{22}{37}$ **(C)** $x_3 = \dfrac{27}{37}$ **(D)** $x_3 = \dfrac{32}{37}$. **(E)** None of the above.

5. Given a system of linear equations in unknowns x_1, x_2 involving parameter q. Find all the values of parameter q for which the system can be solved by means of the Gauss-Jordan elimination.

$$\begin{aligned} qx_1 + 4x_2 &= 3 \\ 2x_1 + 2qx_2 &= 7 \end{aligned}$$

(A) no value of q **(B)** $q \in \{-2, 2\}$ **(C)** $q \in \mathbf{R} - \{-2, 2\}$ **(D)** $q \in \mathbf{R}$.
(E) None of the answers above is correct.

6. Determine the dimension of the space of all solutions of the homogeneous system in unknowns x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 5.

7. The system of 3 equations in 3 unknowns on the right has infinitely many solutions. You need a particular solution $\vec{p}$ to describe the general solution. As vector $\vec{p}$, we can use

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 &= 9 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

(A) $(4, 4, 11)$ **(B)** $(4, 4, -11)$ **(C)** $(6, -4, -11)$ **(D)** $(-6, 4, 11)$.
(E) None of the above can be used.

TÉMA 6. Relace, zobrazení, funkce

Pro konečnou množinu X značíme $|X|$ počet jejích prvků. Prázdná množina $\emptyset$ má 0 prvků.

$r: X \longrightarrow Y$	relace s def. oborem $D(r) = X$ a oborem hodnot Y; takových relací je $2^{|X|\cdot|Y|}$ a počet takových k-šipkových relací je $\binom{|X|\cdot|Y|}{k}$; pro $P \subseteq X$, $Q \subseteq Y$ jsou $r(P)$ obraz a $r^{-1}(Q)$ vzor při r; A_r je matice sousednosti relace r,
$r\|_{P,Q} \dots$	zápis restrikce relace na $P \subseteq X$, $Q \subseteq Y$; z A_r se vyškrtnou některé řádky a sloupce; počet takových možných restrikcí je $2^{|X|+|Y|}$,
r^{-1}, $s \circ r$	zápis inverzní relace a relace složené; při inverzi se A_r transponuje; $s \circ r$ je zapsáno v obráceném pořadí, booleovské násobení $A_r \overset{b}{\cdot} A_s$ není,
$f: D \longrightarrow H$	zobrazení; $D \neq \emptyset$ a každý prvek $x \in D$ má jediný obraz $f(x) \in H$; počet je $\|H\|^{\|D\|}$; jsou-li $D, H \subseteq \mathbf{R}$ mluvíme o **funkci**,
injekce	je zobrazení takové, že pro každé $y \in H$ je $\|f^{-1}(y)\| \leq 1$; počet je $\frac{\|Y\|!}{(\|Y\|-\|X\|)!}$ pokud $\|X\| \leq \|Y\|$, jinak 0 (pro bijekce $=\|Y\|!$ nebo 0),
surjekce	je zobrazení, pro něž $f(D) = H$; naopak pro konstantu $\|f(D)\| = 1$,
bijekce	injekce $\wedge$ surjekce; f je bijekce, právě když f i f^{-1} jsou zobrazení,
$y = f(x) \dots$	zadání funkce; $f(x)$ je funkční hodnota v lib. bodě x def. oboru; také píšeme $y = y(x)$; $x \dots$ nezávisle proměnná, $y \dots$ závisle proměnná,
graf funkce	všechny body roviny tvaru $[x, f(x)]$, pro $x \in D(f)$,
$y = \|x\|$	funkce "absolutní hodnota"; $\|x\|=x$ pro $x \geq 0$, $\dots = -x$ pro $x \leq 0$,
$y = \operatorname{sign}(x)$	funkce "signum"; $\operatorname{sign}(0)=0$, $\operatorname{sign}(x) = 1$ pro $x > 0$, $\dots = -1$ pro $x < 0$,
$y = \operatorname{ch}_M(x)$	charakteristická funkce množ. M, $\operatorname{ch}_M(x)=1$ pro $x \in M$, $\dots=0$ pro $x \notin M$,
$y = \mathrm{e}^x \dots$	exponenciální funkce ($\mathrm{e} \doteq 2.71...$ základ přirozených logaritmů), $D = \mathbf{R}$, $H = (0, +\infty)$; $\mathrm{e}^0 = 1$; funkce roste na D; pro $x < 0$ je $\mathrm{e}^x \in (0,1)$ a pro $x > 0$ je $\mathrm{e}^x \in (1, +\infty)$,
$y = \ln x \dots$	přirozený logaritmus; $D = (0, +\infty)$, $H = \mathbf{R}$; $\ln 1 = 0$; roste na D, pro $x \in (0,1)$ je $\ln x \in (-\infty, 0)$ a pro $x > 1$ je $\ln x \in (0, +\infty)$.

Poznámky

- Inverzní funkce ke goniometrickým funkcím $\sin, \cos, \mathrm{tg}, \mathrm{cotg}$ se označují symboly $\arcsin, \arccos, \mathrm{arctg}, \mathrm{arccotg}$ a nazývají se funkce cyklometrické.
- $y = \mathrm{e}^x$ a $y = \ln x$ jsou navzájem inverzní funkce, tj. $\mathrm{e}^{\ln x} = x$, $\ln(\mathrm{e}^x) = x$, a dále:

$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \cdot \mathrm{e}^b$; $\mathrm{e}^{a-b} = \mathrm{e}^a/\mathrm{e}^b$; $(\mathrm{e}^a)^b = \mathrm{e}^{a \cdot b}$, $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$; $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$; $\ln(a^b) = b \cdot \ln(a)$; **definice obecné mocniny:** $A^B = \mathrm{e}^{B \cdot \ln A}$ pro $A > 0$.

Sestavení předpisu pro inverzní a složenou funkci

Inverzní funkce $y = f^{-1}(x)$: je-li $f: D \longrightarrow H$ bijekce, pak $f^{-1}: H \longrightarrow D$ je funkce, pro níž platí: $f^{-1}(b) = a$, právě když $f(a) = b$. Při sestavování předpisu pro f^{-1} postupujeme tak, že ve funkčním předpisu $y = f(x)$ zaměníme symboly x a y, tj. dostaneme $x = f(y)$, a pak z této rovnice vyjádříme y pomocí x.

Složená funkce $y = g(f(x))$: je-li $a \in D(f)$ a je-li $b = f(a) \in D(g)$, pak definujeme $g(f(a)) = g(b)$; f se nazývá vnitřní a g vnější funkce. Při sestavení předpisu pro složenou funkci postupujeme tak, že zavedeme pomocné značení, např. $w = f(x), y = g(w)$; nyní ve funkčním předpisu $g(w)$ nahradíme všechny symboly w předpisem pro $f(x)$.

TOPIC 6. Relations, Mappings, Functions

For a finite set X, we denote $|X|$ the number of its elements; for the empty set $|\emptyset| = 0$.

$r : X \longrightarrow Y$	a relation with domain $D(r) = X$ and range Y; $2^{|X|\cdot|Y|}$ possible relations; the number of k-arrow relations is $\binom{|X|\cdot|Y|}{k}$; for $P \subseteq X$, $Q \subseteq Y$ we call $r(P)$ the image, and $r^{-1}(Q)$ the preimage in r; A_r is the adjacency matrix of r,
$r|_{P,Q}$ ...	the restriction of r on $P \subseteq X$, $Q \subseteq Y$; from A_r some rows and some columns are deleted; the number of such restrictions is $2^{|X|+|Y|}$,
r^{-1}, $s \circ r$	the inverse and the composed relation; for inversion, A_r is transposed; we write $s \circ r$ in the reverse order, but not the boolean multiplication $A_r \overset{b}{\cdot} A_s$,
$f : D \longrightarrow H$	a mapping; $D \neq \emptyset$ and every element $x \in D$ has just one image $f(x) \in H$; $|H|^{|D|}$ of possible functions; if $D, H \subseteq \mathbf{R}$ we talk about a **function**,
injection	a mapping such that for every $y \in H$ there is $|f^{-1}(y)| \leq 1$; the number of injections is $\frac{|Y|!}{(|Y|-|X|)!}$ if $|X| \leq |Y|$, or 0 (for bijections $=|Y|!$ or 0),
surjection	a mapping for which $f(D) = H$; on the contrary, for a constant $|f(D)| = 1$
bijection	injection $\wedge$ surjection; f is a bijection iff both f, f^{-1} are mappings,
$y = f(x)$ ...	functional notation; $f(x)$ is the value of function at point $x \in D(f)$; also we write $y = y(x)$; x, y ... independent and dependent variable,
the graph	all points $[x, f(x)]$ in the plane for $x \in D(f)$,
$y = |x|$	the "absolute value" function; $|x|=x$ for $x \geq 0$, $\ldots = -x$ for $x \leq 0$,
$y = \operatorname{sign}(x)$	the "signum" function; sign(0)=0, $\operatorname{sign}(x) = 1$ for $x > 0$, $\ldots = -1$ for $x < 0$,
$y = \operatorname{ch}_M(x)$	the characteristic function of set M; $\operatorname{ch}_M(x)=1$ for $x \in M$, $\ldots=0$ for $x \notin M$,
$y = \mathrm{e}^x$ ...	the exponential function ($\mathrm{e} \doteq 2.71...$ the base of natural logarithms), $D = \mathbf{R}$, $H = (0, +\infty)$; $\mathrm{e}^0 = 1$; the function is increasing on D; for $x < 0$ there is $\mathrm{e}^x \in (0, 1)$ and for $x > 0$ there is $\mathrm{e}^x \in (1, +\infty)$,
$y = \ln x$ ...	the natural logarithm; $D = (0, +\infty)$, $H=\mathbf{R}$; $\ln 1=0$; increasing on D; $\ln x \in (-\infty, 0)$ for $x \in (0, 1)$, and $\ln x \in (0, +\infty)$ for $x > 1$.

Notes

- Inverse functions to trigonometric functions sin, cos, tg or tan, and cotan denoted by arcsin or $\sin^{-1}$, arccos or $\cos^{-1}$ etc. are called circular or inverse trigonometric functions.
- the functions $y = \mathrm{e}^x$ and $y = \ln x$ are inverse to each other, i.e. $\mathrm{e}^{\ln x} = x$, $\ln(\mathrm{e}^x) = x$;

$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \cdot \mathrm{e}^b$; $\mathrm{e}^{a-b} = \mathrm{e}^a/\mathrm{e}^b$; $(\mathrm{e}^a)^b = \mathrm{e}^{a \cdot b}$, $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$; $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$; $\ln(a^b) = b \cdot \ln(a)$; **the definition of the general power:** $A^B = \mathrm{e}^{B \cdot \ln A}$ pro $A > 0$.

Getting the formulas for inverse and composite functions

The inverse function $y = f^{-1}(x)$: if $f : D \longrightarrow H$ is a bijection then $f^{-1} : H \longrightarrow D$ is a function satisfying $f^{-1}(b) = a$ iff $f(a) = b$. To get the formula for f^{-1} we first swap the symbols x and y in the formula of $y = f(x)$, i. e. we will have $x = f(y)$, and then we express y in terms of x.

The composite function (compositum) $y = g(f(x))$: if $a \in D(f)$ and if $b = f(a) \in D(g)$ then we define $g(f(a)) = g(b)$; f is called the inner and g is called the outer function. To get the formula, we can first introduce a helper notation like $w = f(x), y = g(w)$; now, in the formula of $g(w)$, all the symbols of w are replaced with the formula of $f(x)$.

ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad 1. Dány množiny $X = \{1,2,3\}, Y = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$. $\quad A_r = \begin{bmatrix} 1&1&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&1&0&0 \end{bmatrix}$,
Vpravo je matice sousednosti A_r relace $r : X \longrightarrow Y$.

(a) Kolik šipek je v relaci $r^{-1} \circ r$?

(b) Relace $r^{-1} : Y \longrightarrow X$ má 4 šipky, ale není to zobrazení. Proč?

(c) Kolik 4-šipkových relací z Y do X nejsou zobrazení?

(d) Z restrikcí $r|_{X,\{\beta,\delta\}}$, $r|_{\{2,3\},Y}$, $r|_{\{1,3\},\{\beta\}}$ vyberte injekce, surjekce, konstanty.

Řešení.

(a) Booleovské nás.: $A_{r^{-1}} \overset{b}{\cdot} A_r = \begin{bmatrix} 1&1&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&1&0&0 \end{bmatrix} \overset{b}{\cdot} \begin{bmatrix} 1&0&0\\ 1&0&1\\ 0&0&0\\ 0&1&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&1\\ 0&1&0\\ 1&0&1 \end{bmatrix}$. Výsledek: 5 šipek.

(b) Prvek β má 2 obrazy, prvek γ žádný obraz.

(c) Všech šipek je $4 \cdot 3 = 12$. Tedy 4-šipkových relací z Y do X je $\binom{12}{4} = 495$. Všech zobrazení z Y do X je $3^4 = 81$. Rozdíl, tj. $495 - 81 = 314$, je počet "ne-zobrazení".

(d) $A_{r|_{X,\{\beta,\delta\}}} = \begin{bmatrix} 1&0\\ 0&1\\ 1&0 \end{bmatrix}$, $\quad A_{r|_{\{2,3\},Y}} = \begin{bmatrix} 0&0&0&1\\ 0&1&0&0 \end{bmatrix}$, $\quad A_{r|_{\{1,3\},\{\beta\}}} = \begin{bmatrix} 1\\ 1 \end{bmatrix}$.
Matice sousednosti ukazují, že první je surjekce, druhá injekce, třetí konstanta a surjekce.

Příklad 2. Dány 2 funkce $\quad f : y = x^2 - 3x + 1, \quad g : y = 2 + \ln(1-x)$.
Sestavte předpis pro inverzní funkci g^{-1}, složenou funkci $h(x) = g(f(x))$ a určete $D(h)$.

Řešení.

(a) V předpisu pro funkci g zaměníme písmenka a máme $x = 2 + \ln(1-y)$. Dále: $\ln(1-y) = x - 2 \quad \to \quad e^{\ln(1-y)} = e^{x-2} \quad \to \quad 1 - y = e^{x-2} \quad \Rightarrow \quad g^{-1} : y = 1 - e^{x-2}$.

(b) Zavedeme pomocnou proměnnou w a máme $w = f(x) = x^2 - 3x + 1$ pro vnitřní funkci a $y = g(w) = 2 + \ln(1-w)$ pro vnější funkci. Pro složenou funkci je potom $g(f(x)) = g(w) =$ $= 2 + \ln(1 - (x^2 - 3x + 1)) = 2 + \ln(3x - x^2)$. Výsledek: $h(x) = 2 + \ln(3x - x^2)$.

Def. obor funkce $h(x)$: Logaritmovat mohou pouze kladná čísla, tj. $3x - x^2 > 0$. Dospěli jsme ke kvadratické nerovnici; její řešení $(0,3) = D(h)$.

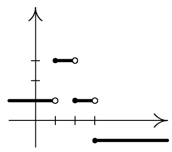
Příklad 3. Dána funkce $y = \operatorname{sign}(2-x) + 2 \cdot \operatorname{ch}_{\langle 1,3)}(x)$.

(a) Určete hodnotu výrazu $y(0) + y(1)$. (b) Načrtněte graf zadané funkce.

Řešení.

(a) $y(0) + y(1) = \operatorname{sign}(2-0) + 2 \cdot \operatorname{ch}_{\langle 1,3)}(0) + \operatorname{sign}(2-1) + 2 \cdot \operatorname{ch}_{\langle 1,3)}(1) = 1 + 2 \cdot 0 + 1 + 2 \cdot 1 = 4$.

(b) Při kreslení je třeba věnovat zvláštní pozornost bodům $x = 1, 2, 3$, kde $y(1) = 3, y(2) = 2, y(3) = -1$. V intervalech omezených těmito body stačí vždy 1 hodnota. Výsledný náčrt je napravo.



Příklad 4. Pro určitou komoditu se odhaduje, že po investici x tisíc EUR do reklamy bude prodáno $N = 50 - 40e^{-0.1x}$ tisíc jednotek. Udejte x jako funkci N. Kolik by se mělo investovat do reklamy, abychom dosáhli prodeje 35 000 jednotek? [HoBr, pg. 319]

Řešení. Potřebujeme vzorec inverzní funkce. Nebudeme zaměňovat písmenka, ale vyjádříme x jako funkci N: $\quad N = 50 - 40e^{-0.1x} \to N - 50 = -40 \cdot e^{-0.1x} \to \frac{50-N}{40} = e^{-0.1x} \to \ln\left(\frac{50-N}{40}\right) = \ln\left(e^{-0.1x}\right) = -0.1x \to \quad x = -10 \cdot \ln\left(\frac{N-50}{40}\right)$ (to je požadovaný vzorec).

Nyní užijeme vzorec pro $N = 35$; dostáváme $x = -10 \cdot \ln\left(\frac{50-35}{40}\right) \doteq 9.808$ tisíc EUR.

EXAMPLES

Example 1. Given sets $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$. On the right, there is the adjacency matrix A_r of relation $r : X \longrightarrow Y$.

$$A_r = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

(a) How many arrows are there in relation $r^{-1} \circ r$?

(b) Relation $r^{-1} : Y \longrightarrow X$ has 4 arrows but it is not a mapping. Why?

(c) How many 4-arrow relations from Y to X are not mappings?

(d) From restrictions $r|_{X,\{\beta,\delta\}}$, $r|_{\{2,3\},Y}$, $r|_{\{1,3\},\{\beta\}}$ choose injections, surjections, constants.

Solution.

(a) The Boolean multipl.: $A_{r^{-1}} \overset{b}{\cdot} A_r = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{b}{\cdot} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. The result: 5 arrows.

(b) Element β has 2 images, element γ has no image.

(c) The number of all arrows is $4 \cdot 3 = 12$. Thus, the number of 4-arrow relations from Y to X is $\binom{12}{4} = 495$. The number of all mappings from Y to X is $3^4 = 81$. The difference $495 - 81 = 314$ gives the number relations which are not mappings.

(d) $A_{r|_{X,\{\beta,\delta\}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_{r|_{\{2,3\},Y}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $A_{r|_{\{1,3\},\{\beta\}}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

The adjacency matrices show that the first is a surjection, the second is an injection, the third is a constant and a surjection.

Example 2. Given 2 functions $f : y = x^2 - 3x + 1, \quad g : y = 2 + \ln(1 - x)$.
Give the formula for the inverse g^{-1}, composition $h(x) = g(f(x))$ and determine $D(h)$.

Solution.

(a) In the function g formula, we swap the letters and we have $x = 2 + \ln(1 - y) \rightarrow$.
$\ln(1 - y) = x - 2 \quad \rightarrow \quad \mathrm{e}^{\ln(1-y)} = \mathrm{e}^{x-2} \quad \rightarrow \quad 1 - y = \mathrm{e}^{x-2} \quad \Rightarrow \quad g^{-1} : y = 1 - \mathrm{e}^{x-2}$.

(b) We introduce a helper variable w and we have $w = f(x) = x^2 - 3x + 1$ for the inner function and $y = g(w) = 2 + \ln(1 - w)$ for the outer function. Then, for the composed function $g(f(x)) = g(w) = 2 + \ln(1 - (x^2 - 3x + 1)) = 2 + \ln(3x - x^2) = h(x)$.

The domain of $h(x)$: We can take logarithm only of positive numbers, i.e. $3x - x^2 > 0$. We obtained a quadratic inequality; its solution $(0, 3) = D(h)$.

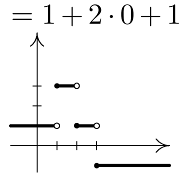
Example 3. Given function $y = \mathrm{sign}(2 - x) + 2 \cdot \mathrm{ch}_{\langle 1,3)}(x)$.

(a) Calculate the value of the expression $y(0) + y(1)$. (b) Sketch the graph.

Solution.

(a) $y(0) + y(1) = \mathrm{sign}(2 - 0) + 2 \cdot \mathrm{ch}_{\langle 1,3)}(0) + \mathrm{sign}(2 - 1) + 2 \cdot \mathrm{ch}_{\langle 1,3)}(1) = 1 + 2 \cdot 0 + 1 + 2 \cdot 1 = 4$.

(b) When sketching we pay a special attention to points $x = 1, 2, 3$, where $y(1) = 3, y(2) = 2, y(3) = -1$. Inside each interval bounded by these points it is enough to calculate one value of y. The sketch is on the right.



Example 4. It is estimated that if x thousand EUR are spent on advertising, approximately $N = 50 - 40\mathrm{e}^{-0.1x}$ thousand units of a certain commodity will be sold. Give x as function of N. How much should be spent on advertising to generate sales of 35 000 units?
[HoBr, pg. 319]

Solution. We need the inverse function formula. We will not swap the letters but we express x as a function of N: $N = 50 - 40\mathrm{e}^{-0.1x} \rightarrow N - 50 = -40 \cdot \mathrm{e}^{-0.1x} \rightarrow \frac{50-N}{40} = \mathrm{e}^{-0.1x} \rightarrow \ln\left(\frac{50-N}{40}\right) = \ln\left(\mathrm{e}^{-0.1x}\right) = -0.1x \rightarrow \quad x = -10 \cdot \ln\left(\frac{N-50}{40}\right)$ (it is the required formula).

Now, we use the formula with $N = 35$; we get $x = -10 \cdot \ln\left(\frac{50-35}{40}\right) \doteq 9.808$ thousand EUR.

ÚLOHY K ŘEŠENÍ

Úloha 6.1. Dány $X=\{1,2,3,4\}$, $Y=\{\alpha,\beta\}$ a tři relace $r:\ X\longrightarrow Y$,

$s:\ Y\longrightarrow X,\quad t:\ Y\longrightarrow Y$ where $A_r=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\1&0\\0&1\end{bmatrix},\ A_s=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\end{bmatrix},\ A_t=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}.$

(a) Najděte matice sousednosti následujících relací (pokud tyto relace existují).

$r\circ s,\quad s\circ r,\quad r^2,\quad r\circ r^{-1},\quad r^{-1}\circ r\circ r^{-1},\quad r|_{\{1,3\},\{\beta\}},\quad t^4,\quad s\circ t\circ r,\quad s^{-1}\circ \mathrm{t}\circ r^{-1}\circ r.$

(b) Kolik z restrikcí níže jsou zobrazení, injekce, surjekce, bijekce či konstanty?

$s\circ r|_{\{1,3,4\},\{2,3,4\}},\quad r|_{\{1,2,3\},\{\alpha\}},\quad r|_{\{1,3\},\{\alpha,\beta\}},\quad r|_{\{1,3,4\},\{\alpha,\beta\}},\quad s^{-1}|_{\{2,3,4\},\{\alpha,\beta\}},\quad s|_{\{\alpha.\beta\},\{2,3,4\}}$

(c) Kolik procent všech relací z X do Y tvoří zobrazení, injekce, konstanty?

(d) Kolik procent všech 2-šipkových relací z Y do X tvoří zobrazení, injekce?

Úloha 6.2. Najděte definiční obory zadaných funkcí.

(a) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	(b) $y=\sqrt{\dfrac{x+2}{x+4}}$	(c) $y=\sqrt{x+2}+\ln(x^2)$
(d) $y=\dfrac{x+1}{\ln x}$	(e) $y=\sqrt{x^2-7x+12}$	(f) $y=\ln(1-x)+\sqrt{2x+4}$

Úloha 6.3. Pro každou z daných funkcí napište předpis pro funkci inverzní.

(a) $y=2x$	(b) $y=\mathrm{e}^{2x}$	(c) $y=\dfrac{x+2}{x+4}$	(d) $y=\sqrt{x+2}$
(e) $y=2x-4$	(f) $y=\mathrm{e}^{2x-4}$	(g) $y=\sqrt{x^2-4}$	(h) $y=2+\ln(x-1)$

Úloha 6.4. Dány funkce $f:\ y=2-x,\qquad g:\ y=\sqrt{x+1},\qquad h:\ y=\mathrm{e}^{-x}.$
Napište předpisy pro složené funkce

(a) $y=f(g(x))=$	(b) $y=g(f(x))=$	(c) $y=h(f(x))=$	(d) $y=g(f^{-1}(x))=$
(e) $y=f(f(x))=$	(f) $y=g(g(x))=$	(g) $y=h(g(x))=$	(h) $y=f(g(h(x)))=$

Úloha 6.5. Načrtněte grafy těchto funkcí

(a) $y=\mathrm{sign}(x+1)$	(b) $y=1+\mathrm{ch}_{(0,2)}(x)$	(c) $y=2\mathrm{ch}_{(0,2)}(x)+\mathrm{ch}_{(-2,2)}(x)$
(d) $y=x+\mathrm{sign}(x)$	(e) $y=x\cdot\mathrm{ch}_{\langle 0,2\rangle}(x)$	(f) $y=\mathrm{sign}(-x)+\mathrm{ch}_{(-2,2)}(x)$
(g) $y=(\mathrm{sign}(x))^2$	(h) $y=\mathrm{ch}_{\{1,2,4\}}(x)$	(i) $y=\mathrm{ch}_{\{1\}}(x)-\mathrm{ch}_{\{1,2\}}(-x)$

Úloha 6.6. [Swo, str. 275] Firma zakoupila nové auto za 800 tisíc Kč. Jeho hodnota H (v tis. Kč) bude klesat podle funkce $H(t)=800\cdot\mathrm{e}^{-0.12t}$, kde t je čas v letech uplynulý od pořízení vozu.

(a) Jakou hodnotu bude mít vůz za jeden a půl roku a kdy bude mít hodnotu 500 tisíc Kč?

(b) Odvoďte vzorec pro inverzní funkci a vysvětlete, co vyjadřuje.

Úloha 6.7. [BaZi, str. 363] ... Let byl zpožděn a jeden z rodičů rozšířil mezi přáteli falešnou zprávu, že letadlo má vážné potíže. Ti to pak řekli dalším atd.

Modelová funkce $N(t)=\dfrac{400}{1+399\mathrm{e}^{-0.4t}}$ popisuje šíření zprávy v čase; hodnota $N(t)$ udává, kolik ze 400 lidí čekajících na letišti vědělo falešnou zprávu t minut od počátku jejího šíření.

(a) Kolik čekajících vědělo zprávu po 10 minutách a kdy se dostane zpráva k polovině čekajících?

(b) Odvoďte vzorec pro inverzní funkci k funkci $N(t)$ a vysvětlete, co vyjadřuje.

PROBLEMS TO SOLVE

Exercise 6.1. Given $X = \{1,2,3,4\}$, $Y = \{\alpha,\beta\}$ and three relations $r: X \longrightarrow Y$, $s: Y \longrightarrow X$, $t: Y \longrightarrow Y$ where $A_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_t = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Find the adjacency matrices of the following relations (provided the relations exist).
$r \circ s$, $s \circ r$, r^2, $r \circ r^{-1}$, $r^{-1} \circ r \circ r^{-1}$, $r|_{\{1,3\},\{\beta\}}$, t^4, $s \circ t \circ r$, $s^{-1} \circ \mathrm{t} \circ r^{-1} \circ r$.

(b) How many of the restrictions are mappings, injections, surjections, bijections, or constants?
$s \circ r|_{\{1,3,4\},\{2,3,4\}}$, $r|_{\{1,2,3\},\{\alpha\}}$, $r|_{\{1,3\},\{\alpha,\beta\}}$, $r|_{\{1,3,4\},\{\alpha,\beta\}}$, $s^{-1}|_{\{2,3,4\},\{\alpha,\beta\}}$, $s|_{\{\alpha.\beta\},\{2,3,4\}}$

(c) What percent of all relations from X to Y are mappings, injections, constants?

(d) What percent of all 2-arrow relations from Y to X are mappings, injections?

Exercise 6.2. Find the domains of the given functions.

(a) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (b) $y = \sqrt{\dfrac{x+2}{x+4}}$ (c) $y = \sqrt{x+2} + \ln(x^2)$

(d) $y = \dfrac{x+1}{\ln x}$ (e) $y = \sqrt{x^2 - 7x + 12}$ (f) $y = \ln(1-x) + \sqrt{2x+4}$

Exercise 6.3. For each of the given functions write the inverse function formula.

(a) $y = 2x$ (b) $y = \mathrm{e}^{2x}$ (c) $y = \dfrac{x+2}{x+4}$ (d) $y = \sqrt{x+2}$

(e) $y = 2x - 4$ (f) $y = \mathrm{e}^{2x-4}$ (g) $y = \sqrt{x^2 - 4}$ (h) $y = 2+\ln(x-1)$

Exercise 6.4. Given functions $f: y = 2 - x$, $g: y = \sqrt{x+1}$, $h: y = \mathrm{e}^{-x}$.
Write the formulas for the composite functions

(a) $y = f(g(x)) =$ (b) $y = g(f(x)) =$ (c) $y = h(f(x)) =$ (d) $y = g(f^{-1}(x)) =$

(e) $y = f(f(x)) =$ (f) $y = g(g(x)) =$ (g) $y = h(g(x)) =$ (h) $y = f(g(h(x))) =$

Exercise 6.5. Sketch the graphs of the functions

(a) $y = \operatorname{sign}(x+1)$ (b) $y = 1 + \mathrm{ch}_{(0,2)}(x)$ (c) $y = 2\mathrm{ch}_{(0,2)}(x) + \mathrm{ch}_{(-2,2)}(x)$

(d) $y = x + \operatorname{sign}(x)$ (e) $y = x \cdot \mathrm{ch}_{\langle 0,2\rangle}(x)$ (f) $y = \operatorname{sign}(-x) + \mathrm{ch}_{(-2,2)}(x)$

(g) $y = (\operatorname{sign}(x))^2$ (h) $y = \mathrm{ch}_{\{1,2,4\}}(x)$ (i) $y = \mathrm{ch}_{\{1\}}(x) - \mathrm{ch}_{\{1,2\}}(-x)$

Exercise 6.6. [Swo, pg. 275] A company purchased a new car for 800 thousand Kč. The car's resale value H (in thousad Kč) will decrease according the function $H(t) = 800 \cdot \mathrm{e}^{-0.12t}$ where t is time in years.

(a) What will the resale value be after $1\frac{1}{2}$ year and when the value will be 500 thousand?
(b) Derive the inverse function formula and interpret it.

Exercise 6.7. [BaZi, pg. 363] ...The flight was delayed and a particular parent related a rumor, that the plane got into troubles, to some friends, who in turn passed it on to others, and so on. The model function $N(t) = \dfrac{400}{1+399\mathrm{e}^{-0.4t}}$ describes how the rumor was spread in time; the value of $N(t)$ gives how many of 400 people waiting at the airport have heard the rumor t minutes after the beginning.

(a) How many people have heard the rumor after 10 minutes and when the rumor reached one half of the people waiting at the airport?
(b) Derive the inverse function to $N(t)$ formula and interpret it.

Minitest MT6

1. Dána relace r, jejíž matice sousednosti je vpravo. Pro relaci $s = r \circ r^{-1}$ označíme a počet jejích šipek a b počet jejích restrikcí. Potom součet $a + b$ je roven

$$A_r = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(A) 20 **(B)** 23 **(C)** 68 **(D)** 71. **(E)** Je jiný než uvedeno.

2. Relace u, v jsou zadány maticemi sousednosti vpravo. Je pravda, že

$$A_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ A_v = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(A) (u je injekce) $\wedge$ (v^{-1} je surjekce) **(B)** (u je injekce) $\wedge$ (v^{-1} není surjekce)
(C) (u není injekce) $\wedge$ (v^{-1} je surjekce) **(D)** (u není injekce) $\wedge$ (v^{-1} není surjekce)
(E) Žádný z nabídnutých výroků není pravdivý.

3. Množina X má 5 prvků a množina Y má 2 prvky. Kolik % ze všech zobrazení z Y do X nejsou injekce?

(A) 0% **(B)** 20% **(C)** 50% **(D)** 80% **(E)** 100%.

4. Určete definiční obor funkce $y = \dfrac{7}{\ln(1 - x^2)}$.

(A) $\emptyset$ **(B)** $\langle -1, 1 \rangle$ **(C)** $(-1, 1)$ **(D)** $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. **(E)** Jiný.

5. Sestavte předpis pro inverzní funkci k funkci $y = 1 + \ln(1 - x)$.

(A) $y = 1 + \mathrm{e}^{x-1}$ **(B)** $y = 1 - \mathrm{e}^{x-1}$ **(C)** $y = 1 + \mathrm{e}^{1-x}$ **(D)** $y = 1 - \mathrm{e}^{1-x}$.

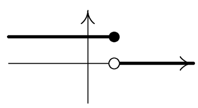
6. Je-li $f(x) = \operatorname{sign}(x - 1) + \mathrm{ch}_{\langle 3,6 \rangle}(\sqrt{x^2 - 1})$ pak hodnota $f(-2)$ je rovna

(A) 0 **(B)** -1 **(C)** 1 **(D)** 2. **(E)** Jiné číslo.

7. Jsou dány funkce $f(x) = 1 - 2x$, $g(x) = x^2 - x + 1$.
Předpis pro složenou funkci $y = g(f(x))$ lze upravit na tvar

(A) $y = -2x^2 + 2x - 1$ **(B)** $y = -2x^3 - x^2 - 3x - 1$ **(C)** $y = 4x^2 - 2x + 1$
(D) $y = -4x^2 + 6x + 1$. **(E)** Nelze na žádný z uvedených.

8. Obrázek vpravo by mohl znázorňovat graf funkce



(A) $y = \operatorname{sign}(x - 1) + \mathrm{ch}_{\langle 1,+\infty)}(x)$ **(B)** $y = \operatorname{sign}(x - 1) - \mathrm{ch}_{\langle 1,+\infty)}(x)$
(C) $y = \operatorname{sign}(1 - x) + \mathrm{ch}_{\langle 1,+\infty)}(x)$ **(D)** $y = \operatorname{sign}(1 - x) - \mathrm{ch}_{\langle 1,+\infty)}(x)$.

9. [BaZi, str. 286] Při národním turné jedné rockové skupiny je poptávka po jejích tričkách dána vzorcem $p = 15 - 4\ln x$ $(1 \leq x \leq 40)$, kde x je počet triček (v tisících), která mohou být prodána v době jednoho koncertu za cenu p dolarů. Pak

(A) $x = -\mathrm{e}^{\frac{15-p}{4}}$ **(B)** $x = -\mathrm{e}^{\frac{p-15}{4}}$ **(C)** $x = \mathrm{e}^{\frac{15-p}{4}}$ **(D)** $x = \mathrm{e}^{\frac{p-15}{4}}$.

10. [HoBr, str. 278] Na základě určitých předpokladů předpovídá jedna firma, že počet jejích zaměstnanců za t let bude $N = 500\mathrm{e}^{-3.5\mathrm{e}^{-0.9t}}$ (nazývaný **Gompertzův model růstu**). Kolik zaměstnanců bude mít za 5 let? (Zaokrouhlete na nejbližší desítku.)

(A) 480 **(B)** 490 **(C)** 500 **(D)** 510. **(E)** Jiný počet.

Minitest MT6

1. Given relation r with the adjacency matrix on the right. For relation $s = r \circ r^{-1}$ let a be the number of its arrows and b the number of its restrictions. Then the sum $a + b$ is equal to
$A_r = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(A) 20 **(B)** 23 **(C)** 68 **(D)** 71. **(E)** None of the above.

2. Relations u, v are given by their adjacency matrices on the right. It is true that
$A_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_v = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(A) (u is an injection)$\wedge$(v^{-1} is a surjection) **(B)** (u is an injection)$\wedge$(v^{-1} is not a surjection)
(C) (u is not an inj.)$\wedge$(v^{-1} is a surjection) **(D)** (u is not an inj.)$\wedge$(v^{-1} is not a surjection.)
(E) None of the propositions above is true.

3. Set X has 5 elements and set Y has 2 elements. What % of all mappings from Y to X are not injections?

(A) 0% **(B)** 20% **(C)** 50% **(D)** 80% **(E)** 100%.

4. Determine the domain of function $y = \dfrac{7}{\ln(1 - x^2)}$.

(A) $\emptyset$ **(B)** $\langle -1, 1\rangle$ **(C)** $(-1, 1)$ **(D)** $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. **(E)** None of the above.

5. Give the inverse function formula for the function $y = 1 + \ln(1 - x)$.

(A) $y = 1 + e^{x-1}$ **(B)** $y = 1 - e^{x-1}$ **(C)** $y = 1 + e^{1-x}$ **(D)** $y = 1 - e^{1-x}$.

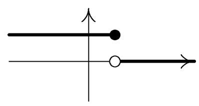
6. If $f(x) = \operatorname{sign}(x - 1) + \operatorname{ch}_{\langle 3,6\rangle}(\sqrt{x^2 - 1})$ then the value of $f(-2)$ is equal to

(A) 0 **(B)** -1 **(C)** 1 **(D)** 2. **(E)** None of the above.

7. Given functions $f(x) = 1 - 2x$, $g(x) = x^2 - x + 1$.
The formula of composed function $y = g(f(x))$ can be transformed to the form

(A) $y = -2x^2 + 2x - 1$ **(B)** $y = -2x^3 - x^2 - 3x - 1$ **(C)** $y = 4x^2 - 2x + 1$
(D) $y = -4x^2 + 6x + 1$. **(E)** None of the above.

8. The sketch on the right can show the graph of function



(A) $y = \operatorname{sign}(x - 1) + \operatorname{ch}_{(1,+\infty)}(x)$ **(B)** $y = \operatorname{sign}(x - 1) - \operatorname{ch}_{(1,+\infty)}(x)$
(C) $y = \operatorname{sign}(1 - x) + \operatorname{ch}_{(1,+\infty)}(x)$ **(D)** $y = \operatorname{sign}(1 - x) - \operatorname{ch}_{(1,+\infty)}(x)$.

9. [BaZi, pg. 286] In a national tour of a rock band, the demand of T-shirts is given by $p = 15 - 4\ln x$ $(1 \le x \le 40)$ where x is the number of T-shirts (in thousand) that can be sold during a single concert at a price of \$$p$. Then

(A) $x = -e^{\frac{15-p}{4}}$ **(B)** $x = -e^{\frac{p-15}{4}}$ **(C)** $x = e^{\frac{15-p}{4}}$ **(D)** $x = e^{\frac{p-15}{4}}$.

10. Based on various projections, a company predicts that the number of employees it will have in t years will be $N = 500e^{-3.5e^{-0.9t}}$ (called **the Gompertz Growth Model**).
How many will be employed in 5 years? (Round to the nearest ten.) [HoBr, pg. 278]

(A) 480 **(B)** 490 **(C)** 500 **(D)** 510. **(E)** None of the above.

TÉMA 7. Posloupnosti a řady

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ...	nebo jednoduše $\{a_n\}$ je posloupnost, a_n její n-tý člen, n jeho index,
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$	limita posloupnosti $\{a_n\}$, když n se blíží k nekonečnu, je rovna L; pro $L \in \mathbf{R}$ říkáme, že posloupnost konverguje; pro $L = \pm\infty$ říkáme, že posloupnost diverguje k $\pm\infty$; jinak posloupnost diverguje,
$s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_n$	$= a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ se nazývá n-tý částečný součet posloupnosti $\{a_n\}$,
$\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_n$	$= a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ se nazývá nekonečná řada; pokud existuje limita posloupnosti částečných součtů $s_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = S \in \mathbf{R}$, řekneme, že řada $\sum a_n$ konverguje a její součet je S; jinak řada $\sum a_n$ diverguje.

Platí-li v posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$ vztah

(1) $a_n < a_{n+1}$, je posloupnost *rostoucí*, (2) $a_n > a_{n+1}$, je posloupnost *klesající*,
(3) $a_n \leq a_{n+1}$, je posloupnost *neklesající*, (4) $a_n \geq a_{n+1}$, je posloupnost *nerostoucí*.

Jestliže existuje $M \in \mathbf{R}$ tak, že pro každé n platí $a_n \leq M$, nazýváme $\{a_n\}$ *shora omezenou*.
Jestliže existuje $m \in \mathbf{R}$ tak, že pro každé n platí $a_n \geq m$, nazýváme $\{a_n\}$ *zdola omezenou*.
Posloupnost mající jak horní mez, tak dolní mez se nazývá *omezená*.

Aritmetická posloupnost - rekurentní vztah: $a_{n+1} = a_n + d$, d je diference,

$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$, nebo $a_n = a_m + (n-m)\cdot d$; $s_n = \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n = n\cdot a_1 + d\cdot\frac{n(n-1)}{2}$.

Geometrická posloupnost - rekurentní vztah: $a_{n+1} = a_n \cdot r$, r je kvocient (též ozn. q),

$a_n = a_1\cdot r^{n-1}$ nebo $a_n = a_m\cdot r^{n-m}$; $s_n = \frac{a_{n+1}-a_1}{r-1} = a_1\cdot\frac{r^n-1}{r-1}$, $s_\infty = \frac{a_1}{1-r}$ pro $|r|<1$.

Důležité limity a řady; formální "kalkul" s čísly ($r \in$ R) a symboly ∞

$\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$ pro $|r|<1$ a $= +\infty$ pro $r>1$; $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{A} = 1$ pro $A>0$; $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} = \sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$

$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^p} = 1 + \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots$ konverguje pro $p>1$; harmonická ř. $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots = +\infty$,

$r+\infty = \infty + r = \infty$; $r-\infty = -\infty + r = -\infty$; $+\infty + \infty = +\infty$; $-\infty - \infty = -\infty$;

$(\pm\infty)\cdot(\mp\infty) = -\infty$; $(\pm\infty)\cdot(\pm\infty) = +\infty$; $\sqrt{+\infty} = \ln(+\infty) = \log(+\infty) = +\infty$.

$r\cdot(\pm\infty) = \begin{matrix}\pm\infty \text{ pro } r>0\\ \mp\infty \text{ pro } r<0\end{matrix}$; $\frac{1}{\pm\infty} = 0$; $\frac{1}{0} = \begin{matrix}+\infty \text{ pokud jsou všechny členy kladné}\\ -\infty \text{ pokud jsou všechny členy záporné.}\end{matrix}$

Neurčité výrazy - jejich hodnotu nelze obecně určit

$\|\infty-\infty\|$, $\|0\cdot(\pm\infty)\|$, $\left\|\frac{1}{0}\right\|$, $\left\|\frac{0}{0}\right\|$, $\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$, $\|1^{\pm\infty}\|$, $\|0^{\pm\infty}\|$, $\|(\pm\infty)^0\|$.

Limitní kritéria konvergence - pro řady s nezápornými členy

Srovnávací kritérium: Nechť $\sum a_n$ a $\sum b_n$ jsou takové řady, že $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = L > 0$, $L \in \mathbf{R}$.
Potom obě řady jsou buďto konvergentní nebo jsou obě divergentní.

Podílové a odmocninové kritérium: Určíme $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ nebo $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = L$. Potom
(1) $L<1 \Rightarrow \sum a_n$ je konvergentní, (2) $L>1 \Rightarrow \sum a_n$ je divergentní.

TOPIC 7. Sequences and Series

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \dots$ or simply $\{a_n\}$ is a sequence, a_n its nth term, n the index of the term,

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ the limit of $\{a_n\}$ as n approaches infinity equals L; for $L \in \mathbf{R}$ the sequence is said to be convergent; for $L = \pm\infty$ the sequence is said to be divergent to $\pm\infty$; otherwise $\{a_n\}$ is divergent,

$s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_n$ $= a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ is called the nth partial sum of the sequence $\{a_n\}$,

$\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_n$ $= a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ is called an infinite series; if there exists the limit of the partial sums sequence $s_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = S \in \mathbf{R}$, we say that the series $\sum a_n$ converges and its sum is S; otherwise $\sum a_n$ is divergent.

If in sequence $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ for every $n \in \mathbf{N}$ there is
(1) $a_n < a_{n+1}$, then the sequence is *increasing*, (2) $a_n > a_{n+1}$, then the seq. is *decreasing*,
(3) $a_n \le a_{n+1}$, then the seq. is *nondecreasing*, (4) $a_n \ge a_{n+1}$, then the seq. is *nonincreasing*.
If there exists $M \in \mathbf{R}$ such that for every n there is $a_n \le M$, we call $\{a_n\}$ *bounded from upward.*
If there exists $m \in \mathbf{R}$ such that for every n there is $a_n \ge m$, we call $\{a_n\}$ *bounded from downward.*
A sequence having both an upper bound and a lower bound is called *bounded.*

Arithmetic sequence - recurrence relation: $a_{n+1} = a_n + d$, d is the difference

$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$, or $a_n = a_m + (n-m)\cdot d$; $s_n = \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n = n\cdot a_1 + d\cdot\frac{n(n-1)}{2}$,

Geometric sequence - recurrence relation: $a_{n+1} = a_n \cdot r$, r is the common ratio,

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ or $a_n = a_m \cdot r^{n-m}$; $s_n = \frac{a_{n+1}-a_1}{r-1} = a_1 \cdot \frac{r^n-1}{r-1}$, $s_\infty = \frac{a_1}{1-r}$ for $|r| < 1$.

Important limits and series; formal "calculus" on numbers ($r \in \mathrm{R}$) and symbols of ∞

$\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$ for $|r| < 1$ and $= +\infty$ for $r > 1$; $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$,

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{A} = 1$ for $A > 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$

$\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^p} = 1 + \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots$ converges for $p > 1$; harmonic s.: $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots = +\infty$,

$r + \infty = \infty + r = \infty$; $r - \infty = -\infty + r = -\infty$; $+\infty + \infty = +\infty$; $-\infty - \infty = -\infty$;

$(\pm\infty)\cdot(\mp\infty) = -\infty$; $(\pm\infty)\cdot(\pm\infty) = +\infty$; $\sqrt{+\infty} = \ln(+\infty) = \log(+\infty) = +\infty$.

$r \cdot (\pm\infty) = \begin{matrix} \pm\infty \text{ for } r>0 \\ \mp\infty \text{ for } r<0 \end{matrix}$; $\frac{1}{\pm\infty} = 0$; $\frac{1}{0} = \begin{matrix} +\infty \text{ if all the terms are positive} \\ -\infty \text{ if all the terms are negative} \end{matrix}$

Indeterminate forms - the value cannot be determined in general

$\|\infty - \infty\|$, $\|0 \cdot (\pm\infty)\|$, $\left\|\frac{1}{0}\right\|$, $\left\|\frac{0}{0}\right\|$, $\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$, $\|1^{\pm\infty}\|$, $\|0^{\pm\infty}\|$, $\|(\pm\infty)^0\|$.

Limit convergence tests - for positive-term series

Comparison test: Let $\sum a_n$ and $\sum b_n$ be such series that $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$, $L \in \mathbf{R}$. Then either both the series converge or both diverge.

Ratio and root test: We find $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ or $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = L$. Then
(1) $L < 1 \Rightarrow \sum a_n$ is convergent, (2) $L > 1 \Rightarrow \sum a_n$ is divergent.

ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad 1. Určete hodnotu a_4 v následujících případech.

(a) $a_n = (-1)^n \cdot (n+1)^2$ (b) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = 2a_n - 1$

(c) $a_1 = 5, a_2 = 0,\ a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n + n$ (d) $a_6 = 10,\ a_{n+1} = \frac{a_n}{n} - 2.$

Řešení. (a) $a_4 = (-1)^4 \cdot 5^2 = 25$, (b) $a_2 = 2\cdot 3 - 1 = 5$; $a_3 = 2\cdot 5 - 1 = 9$; $a_4 = 2\cdot 9 - 1 = 17$. (c) $a_3 = 0 + 2\cdot 5 + 1 = 11$; $a_4 = 11 + 2\cdot 0 + 2 = 13$, (d) $a_6 = \frac{a_5}{5} - 2 \to a_5 = 5\cdot a_6 + 10 = 60$; $a_5 = \frac{a_4}{4} - 2 \to a_4 = 4a_5 + 8 = 248$.

Příklad 2. [Rub, str. 488] Horkovzdušný balón vystoupá za první minutu po startu do výše 60 stop. V každé další minutě pak vystoupá vždy 80% vzdálenosti z minuty předchozí.

(a) Kolik vystoupá balón během šesté minuty po startu?
(b) Jak vysoko bude 10 minut po startu?
(c) Za jak dlouho vystoupá do výše 280 stop?
(d) Jaká bude konečná výška balónu?

Řešení. Máme geometrickou posloupnost vzdáleností $\{a_n\}$ s $a_1 = 60, r = 0.8$. (a) $a_6 = a_1 \cdot r^5 =$ $= 60\cdot 0.8^5 \doteq 19.66$ ft. (b) $s_{10} = 60 \cdot \frac{0.8^{10}-1}{0.8-1} \doteq 267.8$ ft. (c) $s_n \geq 285 \to 60 \cdot \frac{0.8^n - 1}{0.8-1} \geq 285 \to$ $\to 0.8^n \geq 0.05 \to n \geq \frac{\ln 0.05}{\ln 0.8} \doteq 13.43$. Je potřeba více než 13 min. (d) $s_\infty = 60 \cdot \frac{1}{1-0.8} = 300$ ft.

Příklad 3. Najděte limity (pro $n, p, q, u \in \mathrm{N}$)

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{3} + \ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]\right)$, (b) $\lim\limits_{p\to\infty} (p^3 - 2p^2 + 7q)$ (c) $\lim\limits_{u\to\infty} \left(\dfrac{2^u}{5-3^u} + \dfrac{1-u}{1+u}\right)$.

Řešení. (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{3} + \ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]\right) = 1 + \ln[\mathrm{e}] = 1 + 1 = 2.$

(b) $\lim\limits_{p\to\infty} (p^3 - 2p^2 + 7q) = \|\infty^3 - 2\cdot\infty + 7q\| = \|\infty - \infty + 7q\|$ ... STOP, neurčitý výraz.
Ještě jednou: $\lim\limits_{p\to\infty} (p^3 - 2p^2 + 7q) = \lim\limits_{p\to\infty} \left[\frac{p^3}{p^3}\cdot(p^3 - 2p^2 + 7q)\right] = \lim\limits_{p\to\infty}\left[p^3 \cdot \frac{p^3 - 2p^2 + 7q}{p^3}\right] =$
$= \lim\limits_{p\to\infty} \left[p^3 \cdot (1 - \frac{2}{p} + \frac{7q}{p^3})\right] = \left\|\infty^3 \cdot \left(1 - \frac{2}{\infty} + \frac{7q}{\infty^3}\right)\right\| = \|\infty \cdot (1 - 0 + 0)\| = \|\infty\cdot 1\| = \infty.$

(c) $\lim\limits_{u\to\infty} \left(\frac{2^u}{5-3^u} + \frac{1-u}{1+u}\right) = \left\|\frac{\infty}{5-\infty} + \frac{1-\infty}{1+\infty}\right\|$ ... STOP, neurčitý výraz. Ještě jednou:
$\lim\limits_{u\to\infty} \left(\frac{2^u}{5-3^u} + \frac{1-u}{1+u}\right) = \lim\limits_{u\to\infty} \left(\frac{2^u : 3^u}{(5-3^u):3^u} + \frac{(1-u):u}{(1+u):u}\right) = \lim\limits_{u\to\infty} \left(\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^u}{\frac{5}{3^u} - 1} + \frac{\frac{1}{u} - 1}{\frac{1}{u} + 1}\right) == \left\|\frac{0}{\frac{5}{\infty} - 1} + \frac{\frac{1}{\infty} - 1}{\frac{1}{\infty} + 1}\right\| =$
$= \frac{0}{0-1} + \frac{0-1}{0+1} = -1.$

Příklad 4. Zjistěte, zda řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n}$ je konvergentní nebo divergentní užitím limitních kritérií: (a) podílového, (b) odmocninového, (c) srovnávacího s $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Řešení.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{1}{2} < 1.$ Řada je konvergentní.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n}{2^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n}}{2} = \dfrac{1}{2} < 1.$ Řada je konvergentní.

(c) $\sum b_n$ je konvergentní geometrická řada s $r = \frac{1}{2}$. A nyní $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{n}{2^n}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{n}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$. Nemůžeme rozhodnout, zda $\sum a_n$ je konvergentní nebo divergentní.

EXAMPLES

Example 1. In the following cases, determine the value of a_4.

(a) $a_n = (-1)^n \cdot (n+1)^2$ (b) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = 2a_n - 1$

(c) $a_1 = 5, a_2 = 0,\ a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n + n$ (d) $a_6 = 10,\ a_{n+1} = \frac{a_n}{n} - 2$.

Solution. (a) $a_4 = (-1)^4 \cdot 5^2 = 25$, (b) $a_2 = 2\cdot 3 - 1 = 5$; $a_3 = 2\cdot 5 - 1 = 9$; $a_4 = 2 \cdot 9 - 1 = 17$. (c) $a_3 = 0 + 2\cdot 5 + 1 = 11$; $a_4 = 11 + 2 \cdot 0 + 2 = 13$, (d) $a_6 = \frac{a_5}{5} - 2 \to a_5 = 5 \cdot a_6 + 10 = 60$; $a_5 = \frac{a_4}{4} - 2 \to a_4 = 4a_5 + 8 = 248$.

Example 2. [Rub, pg. 488] A hot air balloon rises 60 ft in the first minute after launching. In each succeeding minute, it rises 80% as far as in the previous minute.

(a) How far does it rise during the sixth minute after launching?
(b) How far will it have risen after ten minutes?
(c) How long will it take to reach the altitude of 280 feet?
(d) What will be the final altitude of the balloon?

Solution. We have a geometric sequence of distances $\{a_n\}$ with $a_1 = 60, r = 0.8$. (a) $a_6 = a_1 \cdot r^5 =$ $= 60 \cdot 0.8^5 \doteq 19.66$ ft. (b) $s_{10} = 60 \cdot \frac{0.8^{10}-1}{0.8-1} \doteq 267.8$ ft. (c) $s_n \geq 285 \to 60 \cdot \frac{0.8^n - 1}{0.8-1} \geq 285 \to$ $\to 0.8^n \geq 0.05 \to n \geq \frac{\ln 0.05}{\ln 0.8} \doteq 13.43$. More than 13 min. necessary. (d) $s_\infty = 60 \cdot \frac{1}{1-0.8} = 300$ ft.

Example 3. Find the limits (for $n, p, q, u \in \mathrm{N}$)

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{3} + \ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]\right)$, (b) $\lim\limits_{p\to\infty} (p^3 - 2p^2 + 7q)$ (c) $\lim\limits_{u\to\infty} \left(\dfrac{2^u}{5-3^u} + \dfrac{1-u}{1+u}\right)$.

Solution. (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{3} + \ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]\right) = 1 + \ln[\mathrm{e}] = 1 + 1 = 2$.

(b) $\lim\limits_{p\to\infty} (p^3 - 2p^2 + 7q) = \|\infty^3 - 2\cdot\infty + 7q\| = \|\infty - \infty + 7q\|$ ... STOP, indeterminate form.

Once more: $\lim\limits_{p\to\infty} (p^3 - 2p^2 + 7q) = \lim\limits_{p\to\infty} \left[\frac{p^3}{p^3} \cdot (p^3 - 2p^2 + 7q)\right] = \lim\limits_{p\to\infty} \left[p^3 \cdot \frac{p^3 - 2p^2 + 7q}{p^3}\right] =$

$= \lim\limits_{p\to\infty} \left[p^3 \cdot (1 - \frac{2}{p} + \frac{7q}{p^3})\right] = \left\|\infty^3 \cdot \left(1 - \frac{2}{\infty} + \frac{7q}{\infty^3}\right)\right\| = \|\infty \cdot (1 - 0 + 0)\| = \|\infty \cdot 1\| = \infty$.

(c) $\lim\limits_{u\to\infty} \left(\frac{2^u}{5-3^u} + \frac{1-u}{1+u}\right) = \left\|\frac{\infty}{5-\infty} + \frac{1-\infty}{1+\infty}\right\|$ ... STOP, indeterminate form. Once more:

$\lim\limits_{u\to\infty} \left(\frac{2^u}{5-3^u} + \frac{1-u}{1+u}\right) = \lim\limits_{u\to\infty} \left(\frac{2^u : 3^u}{(5-3^u):3^u} + \frac{(1-u):u}{(1+u):u}\right) = \lim\limits_{u\to\infty} \left(\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^u}{\frac{5}{3^u} - 1} + \frac{\frac{1}{u} - 1}{\frac{1}{u} + 1}\right) == \left\|\frac{0}{\frac{5}{\infty} - 1} + \frac{\frac{1}{\infty} - 1}{\frac{1}{\infty} + 1}\right\| =$

$= \frac{0}{0-1} + \frac{0-1}{0+1} = -1$.

Example 4. Investigate if series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n}$ is convergent or divergent using limit tests:

(a) the ratio test, (b) the root test, (c) the comparison test with $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Solution.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{1}{2} < 1$. The series is convergent.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n}{2^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n}}{2} = \dfrac{1}{2} < 1$. The series is convergent.

(c) $\sum b_n$ is a convergent geometric series with $r = \frac{1}{2}$. Now, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{n}{2^n}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{n}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} =$ $= \lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$. We cannot decide if $\sum a_n$ is convergent or divergent.

ÚLOHY K ŘEŠENÍ

Úloha 7.1. Najděte prvních pět členů posloupnosti dané vzorcem pro n-tý člen.
(a) $a_n = (-1)^n + n$ (b) $b_n = \frac{1}{(n-1)!}$ (c) $c_n = 1 - (-2)^n$ (d) $d_n = \cos(\pi \cdot n)$.

Úloha 7.2. Najděte pátý člen posloupnosti popsané rekurentním vztahem.
(a) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 2 \cdot a_n - 2$ (b) $b_1 = -1,\ b_{n+1} = n \cdot b_n + 1$
(c) $c_1 = 1, c_2 = 2,\ c_{n+2} = c_{n+1} + c_n$ (d) $d_1 = 1, d_2 = -1,\ d_{n+2} = 3 + d_{n+1} \cdot d_n$.

Úloha 7.3. Dány dvě posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ takové, že $a_1 = 2,\quad b_1 = -3,$ $a_{n+1} = a_n + b_n,\quad b_{n+1} = n + a_n^2 - 2b_n$ (pro každé $n \in \mathbf{N}$). Najděte hodnoty a_4 a b_4.

Úloha 7.4. Dáno $c_{n+1} = 2c_n - n + 2$, pro $n \in \mathbf{N}$, a $c_5 = 8$. Najděte c_3.

Úloha 7.5. Vyhodnoťte limity

(a) $\lim\limits_{m\to\infty} \left(3\sqrt[m]{2} - \sqrt[m]{3}\right)$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2 - 2n^3 + 4)$ (c) $\lim\limits_{m\to\infty} \log\left(\sqrt[m]{m} + 0.9^m\right)$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$ (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1+3^n}{2+3^n} + \frac{n+2}{n^2+4}\right)$ (f) $\lim\limits_{u\to\infty} \left(\frac{4^u - 3^u}{2^u - 4^u} + \frac{2-\sqrt{u}}{2+\sqrt{u}}\right)$

Úloha 7.6. Nechť p a q jsou přirozená čísla. Najděte limity

(a) $\lim\limits_{p\to\infty} (p - q)$ (b) $\lim\limits_{p\to\infty} \frac{p}{q}$ (c) $\lim\limits_{p\to\infty} \frac{p^2 + q - 1}{p + 2q + 3}$ (d) $\lim\limits_{q\to\infty} \frac{p^2 + q - 1}{p + 2q + 3}$

(e) $\lim\limits_{q\to\infty} (p - q)$ (f) $\lim\limits_{q\to\infty} \frac{p}{q}$ (g) $\lim\limits_{p\to\infty} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^p - \left(\frac{3}{2}\right)^q\right]$ (h) $\lim\limits_{q\to\infty} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^p - \left(\frac{3}{2}\right)^q\right]$

Úloha 7.7. Užijte limitní podílové kritérium.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n}$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(n+2)!}$ (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(1.6)^n}{n}$ (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^n}$. (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1.2}{n}$.

Úloha 7.8. Užijte limitní odmocninové kritérium.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{6^n}$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(0.6)^n}{n}$ (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1.2}{n}$ (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^n}$. (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(1.6)^n}{n^3}$.

Úloha 7.9. Užijte limitní srovnávací kritérium a řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ na řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

(a) $b_n = \frac{1}{n^2},\ a_n = \frac{1}{2n^2+5n+1}$ (b) $b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n,\ a_n = \frac{5}{2^n+3^n}$ (c) $b_n = \frac{1}{n},\ a_n = \frac{1}{2n-3\sqrt{n}}$.

Úloha 7.10. [Swo, str. 463] Stabilní populace o velikosti 35 000 ptáků žije na třech ostrovech. Každým rokem 10% populace z ostrova A migruje na ostrov B, 20% populace z ostrova B migruje na ostrov C a 5% populace z ostrova C migruje na ostrov A. Nechť $A_n, B_n,$ a C_n označují počty ptáků v roce n na ostrovech A,B a C před tím, než dojde k migraci.

(a) Ukažte, že $A_{n+1} = 0.9A_n + 0.05C_n,\quad B_{n+1} = 0.8B_n + 0.1A_n$, and $C_{n+1} = 0.95C_n + 0.2B_n$.

(b) Jestliže v roce 2000 měla populace na ostrově A velikost 8 000 a populace na ostrově B velikost 17 000 určete očekávanou velikost populace na ostrově B v roce 2002.

Úloha 7.11. Na účet s úrokovou sazbou 12% p.a. úročený měsíčně se ukládá první den každého měsíce částka 50 \$ po dobu pěti let. Určete stav účtu A na konci těchto pěti let, je-li
$A = 50\left(1 + \frac{0.12}{12}\right) + 50\left(1 + \frac{0.12}{12}\right)^2 + 50\left(1 + \frac{0.12}{12}\right)^3 + \ldots + 50\left(1 + \frac{0.12}{12}\right)^{120}$. [LaHo, str. 447]

PROBLEMS TO SOLVE

Exercise 7.1. Find the first five terms of the sequence given by its n-th term formula.
(a) $a_n = (-1)^n + n$ (b) $b_n = \frac{1}{(n-1)!}$ (c) $c_n = 1 - (-2)^n$ (d) $d_n = \cos(\pi \cdot n)$.

Exercise 7.2. Find the fifth term of the sequence described by a recurrence relation.
(a) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 2 \cdot a_n - 2$ (b) $b_1 = -1,\ b_{n+1} = n \cdot b_n + 1$
(c) $c_1 = 1, c_2 = 2,\ c_{n+2} = c_{n+1} + c_n$ (d) $d_1 = 1, d_2 = -1,\ d_{n+2} = 3 + d_{n+1} \cdot d_n$.

Exercise 7.3. Given two sequences $\{a_n\}$ and $\{b_n\}$ such that $a_1 = 2,\quad b_1 = -3,$ $a_{n+1} = a_n + b_n,\quad b_{n+1} = n + a_n^2 - 2b_n$ (for every $n \in \mathbf{N}$). Find the values of a_4 and b_4.

Exercise 7.4. Given $c_{n+1} = 2c_n - n + 2$ for every $n \in \mathbf{N}$, and $c_5 = 8$. Find c_3.

Exercise 7.5. Evaluate the limits.
(a) $\lim\limits_{m\to\infty}\left(3\sqrt[m]{2} - \sqrt[m]{3}\right)$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2 - 2n^3 + 4)$ (c) $\lim\limits_{m\to\infty}\log\left(\sqrt[m]{m} + 0.9^m\right)$
(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n}$ (e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+3^n}{2+3^n} + \dfrac{n+2}{n^2+4}\right)$ (f) $\lim\limits_{u\to\infty}\left(\dfrac{4^u - 3^u}{2^u - 4^u} + \dfrac{2-\sqrt{u}}{2+\sqrt{u}}\right)$

Exercise 7.6. Let p and q be natural numbers. Find the limits
(a) $\lim\limits_{p\to\infty}(p-q)$ (b) $\lim\limits_{p\to\infty}\dfrac{p}{q}$ (c) $\lim\limits_{p\to\infty}\dfrac{p^2+q-1}{p+2q+3}$ (d) $\lim\limits_{q\to\infty}\dfrac{p^2+q-1}{p+2q+3}$
(e) $\lim\limits_{q\to\infty}(p-q)$ (f) $\lim\limits_{q\to\infty}\dfrac{p}{q}$ (g) $\lim\limits_{p\to\infty}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^p - \left(\frac{3}{2}\right)^q\right]$ (h) $\lim\limits_{q\to\infty}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^p - \left(\frac{3}{2}\right)^q\right]$

Exercise 7.7. Use the limit ratio test.
(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{3^n}$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3}{(n+2)!}$ (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(1.6)^n}{n}$ (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n^n}$. (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1.2}{n}$.

Exercise 7.8. Use the limit root test.
(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{6^n}$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(0.6)^n}{n}$ (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1.2}{n}$ (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n^n}$. (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(1.6)^n}{n^3}$.

Exercise 7.9. Apply the limit comparison test and series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ to the series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.
(a) $b_n = \frac{1}{n^2},\ a_n = \frac{1}{2n^2+5n+1}$ (b) $b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n,\ a_n = \frac{5}{2^n+3^n}$ (c) $b_n = \frac{1}{n},\ a_n = \frac{1}{2n-3\sqrt{n}}$.

Exercise 7.10. [Swo, pg. 463] A stable population of 35,000 birds lives on three islands. Each year, 10% of the population on island A migrates to island B, 20% of the population on island B migrates to island C, and 5% of the population on island C migrates to island A. Let A_n, B_n, and C_n denote the number of birds in year n on islands A,B, and C respectively, before the migration takes place.

(a) Show that $A_{n+1} = 0.9A_n + 0.05C_n,\quad B_{n+1} = 0.8B_n + 0.1A_n$, and $C_{n+1} = 0.95C_n + 0.2B_n$.

(b) If in year 2000 the population on island A was 8,000 and the population on island B was 17,000, determine the number of birds expected on island B in year 2002.

Exercise 7.11. A deposit of \$50 is made on the first day of each month for five years in an account that pays 12%, compounded monthly. Determine the balance A at the end of five years, if $A = 50\left(1 + \frac{0.12}{12}\right) + 50\left(1 + \frac{0.12}{12}\right)^2 + 50\left(1 + \frac{0.12}{12}\right)^3 + \ldots + 50\left(1 + \frac{0.12}{12}\right)^{120}$. [LaHo, pg. 447]

Minitest MT7

1. V posloupnosti $\{a_n\}$ platí pro $n \geq 1$ vztah $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$. Je-li $a_1 = 2, a_2 = -2$, pak $a_5 =$

(A) -4 **(B)** -2 **(C)** 2 **(D)** 4. **(E)** Jiný výsledek.

2. Při užití **pavučinového modelu** na studium rovnováhy trhu vztahujeme posloupnost cen $p_1, p_2, p_3, \ldots$ vybraného produktu pro jednotlivá období k hodnotám nabídky $S_1, S_2, S_3, \ldots$ a poptávky $D_1, D_2, D_3, \ldots$. Předpokládejme, že v jednoduchém lineárním modelu je $D_n = 46 - 0.4p_n$ (poptávková rovnice) a $S_{n+1} = 0.2p_n + 40$ (nabídka vždy reaguje na cenu v předchozím období). Podmínka pro rovnováhu je $D_{n+1} = S_{n+1}$, což dá $p_{n+1} = 15 - 0.5p_n$. Jaká je hodnota rozdílu $S_3 - D_2$, je-li $p_1 = 7$ Kč?

(A) -1.8 **(B)** -0.9 **(C)** 0 **(D)** 0.9 **(E)** 1.8.

3. Firma si opatří stroj za 135 000 USD a odpisuje z něj 30% ročně. (Jinými slovy, zůstatková hodnota stroje na konci každého roku je rovna 70 procentům z jeho hodnoty na začátku roku. Najděte zůstatkovou hodnotu stroje po jeho užívání plných pět let. (Svůj výsledek zaokrouhlete na celé stovky dolarů.) [LaHo, str. 447]

(A) 22 600 USD **(B)** 22 700 USD **(C)** 22 800 USD **(D)** 22 900. USD

4. Malá firma prodala za první měsíc zboží za 8 150 EUR. Majitel si stanovil úkol po celé období následujících 9 měsíců pravidelně zvyšovat měsíční prodej vždy o 199 EUR. Pokud se mu to podaří, kolik celkem utrží za těchto následujících 9 měsíců?

(A) 80 514 EUR **(B)** 81 210 EUR **(C)** 82 305 EUR **(D)** 83 614 EUR.

5. Určete $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2 - 4n + 1}{3 + n - n^2} + \frac{2n+1}{1+n} \right)$ **(A)** 0 **(B)** -1 **(C)** 1 **(D)** $+\infty$ **(E)** $-\infty$.

6. Nechť a a b jsou přirozená čísla. Potom $\lim_{a\to\infty} \frac{a - \sqrt{b}}{a + \sqrt{b}}$ je rovna

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** -1 **(D)** $-\infty$. **(E)** Jiná hodnota.

7. Najděte všechny hodnoty x, pro něž je geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{x}\right)^n$ konvergentní.

(A) $x \in \emptyset$ **(B)** $x \in (-2, 2)$ **(C)** $x > 2$ **(D)** $x \in (-\infty, -2) \cup x \in (2, +\infty)$ **(E)** $x \in \mathbf{R}$.

8. Pomůcka: je známo, že $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$ pro každé $c > 0$.

Označme symbolem A řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(0.6)^n}$ a symbolem B řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.2}{n}$.

Užijte na A **limitní podílové kritérium** a na B **limitní odmocninové kritérium** [případně užijte pomůcku výše]. Výsledky užití kritérií jsou: **(E)** žádné z tvrzení níže neodpovídá,

(A) A je konvergentní $\wedge$ B je konvergentní **(B)** A je konvergentní $\wedge$ B je divergentní
(C) A je divergentní $\wedge$ B je konvergentní **(D)** A je divergentní $\wedge$ B is divergentní.

9. Vesmírná sonda vyšle 660 megabytů elektronické informace za první rok své cesty. Z důvodu poklesu zásoby energie a s rostoucí vzdáleností bude klesat objem přenesených dat ročně o 12%. Určete (v megabytech) jaké množství informace vyšle sonda za celou dobu svého působení, tj. za dobu ”nekonečnou”. [Rub, str. 740]

(A) 750 MB **(B)** 1550 MB **(C)** 5500 MB **(D)** 7500 MB. **(E)** Jiný výsledek.

Minitest MT7

1. In sequence $\{a_n\}$, for $n \geq 1$ the relation $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ holds. If $a_1 = 2, a_2 = -2$, then $a_5=$

(A) -4 **(B)** -2 **(C)** 2 **(D)** 4. **(E)** None of the above.

2. In the study of market equilibrium, **the cobweb model** relates the price sequence $p_1, p_2, p_3, \ldots$ of a chosen product in the individual time periods to supply values $S_1, S_2, S_3, \ldots$ and demand values $D_1, D_2, D_3, \ldots$. Suppose that in a simple linear model $D_n = 46 - 0.4p_n$ (the demand equation) and $S_{n+1} = 40 + 0.2p_n$ (the supply always reflects the price in the previous time period). The equilibrium condition is $D_{n+1} = S_{n+1}$, which yields $p_{n+1} = 15 - 0.5p_n$. What is the value of the difference $S_3 - D_2$ if p_1=7 Kč?

(A) -1.8 **(B)** -0.9 **(C)** 0 **(D)** 0.9 **(E)** 1.8.

3. A company buys a machine for \$135,000 and it depreciates at the rate of 30% per year. (In other words, at the end of each year its depreciated value is 70% of what it was at the beginning of the year.) Find the depreciated value of the machine after it has been used five full years. (Round your result to the nearest hundred dollars.) [LaHo, pg. 447]

(A) \$22,600 **(B)** \$22,700 **(C)** \$22,800 **(D)** \$22,900.

4. A small business sells 8 150 EUR worth of products during its first month. The owner has set a goal of increasing monthly sales by 199 EUR each month for next 9 months. Assuming that this goal is met, find the total sales during the period of these 9 months.

(A) 80 514 EUR **(B)** 81 210 EUR **(C)** 82 305 EUR **(D)** 83 614 EUR.

5. Determine $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2 - 4n + 1}{3 + n - n^2} + \dfrac{2n+1}{1+n} \right)$ **(A)** 0 **(B)** -1 **(C)** 1 **(D)** $+\infty$ **(E)** $-\infty$.

6. Let a and b be natural numbers. Then $\lim\limits_{a\to\infty} \dfrac{a - \sqrt{b}}{a + \sqrt{b}}$ is equal to

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** -1 **(D)** $-\infty$. **(E)** None of the above.

7. Find all the values of x such that the geometric series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{x}\right)^n$ is convergent.

(A) $x \in \emptyset$ **(B)** $x \in (-2, 2)$ **(C)** $x > 2$ **(D)** $x \in (-\infty, -2) \cup x \in (2, +\infty)$ **(E)** $x \in \mathbf{R}$

8. Hint: it is known that $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$ for any $c > 0$.

Denote with symbol A the series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(0.6)^n}$ and with B the series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1.2}{n}$.

Apply the **Limit Ratio Test** to A and the **Limit Root Test** to B [together with the hint above, if necessary]. The results of the tests are: **(E)** none of the below,

(A) A is convergent $\wedge$ B is convergent **(B)** A is convergent $\wedge$ B is divergent
(C) A is divergent $\wedge$ B is convergent **(D)** A is divergent $\wedge$ B is divergent.

9. A certain space probe can transmit 660 megabytes of electronic information during the first year of its mission. Due to decrease in energy sources and increasing distance, the transmission drops by 12% every year. Determine (in megabytes) what amount of information this probe will have transmitted if it operates "forever". [Rub, pg. 740]

(A) 750 MB **(B)** 1550 MB **(C)** 5500 MB **(D)** 7500 MB **(E)** none of the above.

VÝSLEDKY - RESULTS

TÉMA - TOPIC T1-2

1.1. pravdivý - true, nepravdivý - false, nepravdivý - false, nepravdivý - false.
1.2. (a) $\sqrt{254}, \sqrt{396}, \sqrt{72}, \sqrt{4452}$, (b) $\vec{u}, \vec{z}$ rovnoběžné - parallel, $\vec{v}, \vec{w}$ ortogon. - orthogonal.
1.3. (a) $(0.5, 0, -2)$, (b) $(2, 2, -6)$, (c) $(-3, -2.5, 5)$, (d) $(1, 0, -4)$. **1.4.** (a) $r = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$, (b) $r = \frac{1}{6}$, (c) žádné řešení - no solution, (d) $r \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, (e) $r = -2$, (f) $r_1 = 6, r_2 = 2$. **1.5.** (a) $\alpha \doteq 80.39^0$, $\beta \doteq 57.13^0$, $\gamma \doteq 42.47^0$, (b) $\alpha \doteq 150.02^0$, $\beta \doteq 57.13^0$, $\gamma \doteq 69.37^0$, $\delta \doteq 83.48^0$, (c) 91.15^0 nebo doplňkový úhel do 180^0 - or the supplementary angle. **1.6.** (a) 4×2, (b) 3×2, (c) 4×3, (d) 3×3, (e) 3×2, (f) nelze - impossible.

1.7. (a) $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 12 & -2 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 20 & -8 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -2 & -8 \end{bmatrix}$, (d) $\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$, (e) $\begin{bmatrix} -10 & 4 \\ 6 & -12 \end{bmatrix}$, (f) $\begin{bmatrix} -3 & 14 \\ 4 & 40 \end{bmatrix}$, (g) $\begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$, (h) $\begin{bmatrix} -167 & -322 \\ 644 & -328 \end{bmatrix}$, (i) $\begin{bmatrix} -343 & -572 \\ 486 & 88 \end{bmatrix}$.

1.8. $\begin{bmatrix} -1 & 6 & 5 \\ -2 & 10 & 6 \\ -6 & 41 & 22 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 10 & 4 & 1 & 3 \\ 40 & 18 & 4 & 8 \\ 32 & 15 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 10 & 40 & 32 & 4 \\ 4 & 18 & 15 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 8 & 5 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -6 \\ 6 & 10 & 41 \\ 5 & 6 & 22 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 8 \\ 3 & 5 & 17 \\ 8 & 17 & 63 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 69 & 41 \\ 2 & 41 & 26 \end{bmatrix}$.

TÉMA - TOPIC T3

3.1. (a) no, (b) no, (c) yes, (d) no, (e) yes, (f) yes. **3.2.** r.1: pivot, r.2: subtracted 2-multiple of r.1, r.3: added r.1, r.4: subtracted 7-multiple of r.1. **3.3.** (a) lin. záv. - dep., 1, (b) lin. záv. - dep., 2, (c) lin. nez.- indep., 3, (d) lin. nez. - indep., 3.
3.4. 1,2,3,2,2,2. **3.5.** 3,2,3,3, nedef. - not defined, 2,3,2. **3.6.** (a) pouze - only $\vec{v}_2$, (b) oba - both, (c) žádný z nich - none of them, (d) žádný z nich - none of them.
3.7. (a) 2, každá báze - any basis of V_2, (b) 2, např. - e. g. $(1, 2, 3), (0, -1, -2)$, (c) 4, každá báze - any basis of V_4, (d) 3, např. - e. g. $\mathcal{S}$, (e) 3, např. první 3 v. - e.g. the first 3 vectors.
3.8. (a) $3/2, 13/2$, (b) $-291/8, 53/8$, (c) $4, -2, 7$, (d) $\mathcal{B}$ není bází - is not a basis.
3.9. (a) 0, 13, (b) $-10, 0$, (c) $19/26, 31/26$, (d) $\mathcal{B}$ není bází - is not a basis.

TÉMA - TOPIC T4

4.1. 2, 96, 174, 0 (pouze poslední je singulární - only the last one is singular).
4.2. (a) 3, (b) $\text{adj}(B) = \begin{bmatrix} 9 & -6 & -60 \\ 13 & 2 & -12 \\ 18 & -12 & -24 \end{bmatrix}$, (c), $B^{-1} = \text{adj}(B)/96$.
4.3. (a) 1, (b) 2, (c) 4, (d) 78. **4.4.** (a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (d) $\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. **4.5.** (a) $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 & 4 \\ -1 & -5/2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 4/5 & 6/5 & -11/5 \\ 7/5 & 18/5 & -23/5 \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 4 & -4/3 \end{bmatrix}$, (d) $\begin{bmatrix} 34 & 7 \\ 9 & -2 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}$, (e) $\begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ 1 & -3/2 \end{bmatrix}$, (f) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 9 \\ 3 & -12 \end{bmatrix}$, (g) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, (h) $\begin{bmatrix} 3/2 & 13/4 \\ -1/2 & -9/4 \end{bmatrix}$.

TÉMA - TOPIC T5

5.1. (a) splněna - satified, nekon. mnoho. - infinitely many; (b) splněna - satified, 1 (c) splněna - satified, nekon. mnoho. - infinitely many; (d) nesplněna - not satified, 0.
5.2. (a) $x_1 = \frac{5p-1}{2p-1}$, $x_2 = \frac{-3}{2p-1}$, $p \neq \frac{1}{2}$, (b) $x_1 = \frac{6p}{2p^2+1}$, $x_2 = \frac{-3}{2p^2+1}$, $p \in \mathbf{R}$, (c) $x_1 = 3p$, $x_2 = -2p$, $p \in \mathbf{R}$. **5.3.** (a) $3/2, 13/4, -2$, (b) $7, 1/2, -14$, (c) $3, 3/2, 0$.
5.4. (a) $-148/81, 160/81, 7/81, 25/81$, (b) $1, -1, -1, 1$.
5.5. (a) dim=1, $\vec{h}_1 = (11/2, -3, 3/2, 1)$, (b) dim=2, $\vec{h}_1 = (-1, 0, 0, 1), \vec{h}_2 = (-1, 1, 0, 0)$.
5.6. (a) $(2, 1, 1, 0, 0) + c_1(10, -6, 3, 1, 0) + c_2(-5, 2, -1, 0, 1)$,
(b) $(0, 0, 0, 0, -2) + c_1(-1, 1, 0, 0, 0) + c_2(3, 0, 1, 0, 0) + c_3(-2, 0, 0, 1, 0)$.

TÉMA - TOPIC T6

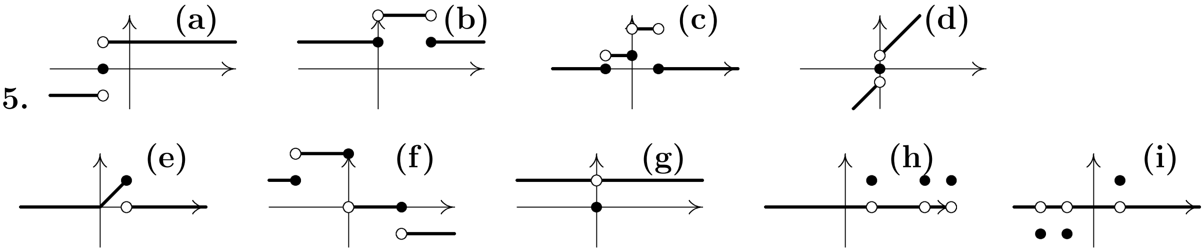
6.1. (a) $\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&1\\1&0&0&1\\1&1&0&0\end{bmatrix}$, neex. - doesn't exist, $\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&1\\1&1&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}$,

neex. - doesn't exist, (b) zobrazení - mappings: 4, injekce - injections: 1, surjekce - surjections: 2, konstanty - constants: 2, (c) 6.25%, 0%, 0.78125%, (d) $\doteq 57.14\%, \doteq 42.86$.

6.2. (a) $(0, +\infty)$, (b) $(-\infty, -4) \cup \langle -2, +\infty)$, (c) $\langle -2, 0) \cup (0, +\infty)$, (d) $(0, 1) \cup (1, +\infty)$, (e) $(-\infty, 3\rangle \cup \langle 4, +\infty)$, (f) $\langle -2, 1)$, **6.3.** (a) $y = \frac{x}{2}$, (b) $y = \frac{\ln x}{2}$, (c) $y = \frac{4x-2}{1-x}$, (d) $y = x^2 - 2$, (e) $y = \frac{x}{2} + 2$, (f) $y = \frac{\ln x}{2} + 2$, (g) $y = \pm\sqrt{x^2 + 4}$, (h) $y = 1 + \mathrm{e}^{x-2}$.

6.4. (a) $y = 2 - \sqrt{x + 1}$, (b) $y = \sqrt{3 - x}$, (c) $y = \mathrm{e}^{x-2}$, (d) $y = \sqrt{3 - x}$, (e) $y = x$, (f) $\sqrt{\sqrt{x + 1} + 1}$, (g) $y = \mathrm{e}^{-\sqrt{x+1}}$, (h) $y = 2 - \sqrt{\mathrm{e}^{-x} + 1}$.

6.5.



6.6. (a) $\doteq 668\,216$ Kč, $\doteq 3.9$, (b) $t = \dfrac{\ln \frac{H}{800}}{-0.12}$, funkce počítá čas odpovídající hodnotě auta H - the function calculates the time related to the value of the car H.

6.7. (a) $\doteq 48$, $\doteq 15$ min., (b) $t = -\frac{1}{0.4} \cdot \ln \frac{400-y}{399y}$, funkce dává čas t odpovídající počtu lidí N, kteří vědí zprávu - the function gives the time t related to the number of people having heard the rumor.

TÉMA - TOPIC T7

7.1. (a) 0,2,2,5,5 (b) 1, 1, 1/2, 1/6, 1/24 (c) $3, -3, 9, -15, 33$ (d) $-1, 1, -1, 1, -1$.

7.2. (a) 2, (b) 17, (c) 8, (d) 5. **7.3.** $a_4 = -9, b_4 = 141$, **7.4.** $c_3 = 3$.

7.5. (a) 2, (b) $-\infty$, (c) 0, (d) $\sqrt{\mathrm{e}}$, (e) 1, (f) -2.

7.6. (a) $+\infty$ (b) $+\infty$, (c) $+\infty$, (d) 1/2, (e) $-\infty$, (f) 0, (g) $-\left(\frac{3}{2}\right)^q$, (h) $-\infty$,

7.7. (a) konv. - conv., (b) konv. - conv., (c) div., (d) konv. - conv., (e) nerozhodnuto - not decided. **7.8.** (a) konv. - conv., (b) konv. - conv., (c) nerozhodnuto - not decided, (d) konv. - conv., (e) div.

7.9. (a) konv. - converges, (b) konv. - converges, (c) div. - diverges. **7.10.** 12 290.

7.11. \$11,616.95.

Minitest MT1-2: 1D, 2C, 3B, 4C, 5E, 6A, 7C, 8E, 9D.

Minitest MT3: 1C, 2D, 3B, 4D, 5B, 6B, 7D, 8D, 9E.

Minitest MT4: 1D, 2B, 3D, 4D, 5B, 6C, 7A, 8A.

Minitest MT5: 1C, 2D, 3B, 4D, 5B, 6B, 7C.

Minitest MT6: 1D, 2B, 3B, 4E, 5B, 6A, 7C, 8C, 9C, 10A.

Minitest MT7: 1C, 2D, 3B, 4A, 5C, 6D, 7D, 8E, 9C.

ODKAZY - REFERENCES

[BaZi] Barnett, R. A., Ziegler, M. R. *Applied Calculus for Business and Economics, Life Sciences, and Social Sciences.* San Francisco: Dellen Publ. Co., 1990.

[Bud] Budnick, F. S. *Applied Mathematics for Business, Economics, and Social Sciences.* New York: Mc Graw - Hill, Inc., 1993.

[HoBr] Hoffman, L. D., Bradley, G. L. *Calculus for Business, Economics, and Social Sciences.* New York: Mc Graw - Hill, Inc., 1992.

[LaHo] Larson, R. E., Hostetler, R. P. *Precalculus.* Toronto: D. C. Heath and Co. 1985.

[NýLe] Nýdl, V., Lexová, R. *Matematika (Část 1 - Matematické struktury).* skriptum JU, České Budějovice, 1996.

[Rub] Rubenstein, R. N. et al. *Functions, Statistics, and Trigonometry.* Glenview: Scott, Foresman and Co., 1992.

[Swo] Swokowski, E. W. *Calculus with Analytic Geometry.* 4th ed., Boston: PWS - Kent Publ. Comp., 1992.

Název:	MATEMATIKA I – MATHEMATICS I, CVIČENÍ – SEMINAR Matematické struktury – Mathematical structures Bilingvní text – bilingual text
Autor:	doc. RNDr. Václav Nýdl, CSc. PhDr. Marek Šulista Vivian White-Baravalle, M. A.
Vydavatel:	Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích Ekonomická fakulta
Tisk:	Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích Ekonomická fakulta, ediční středisko
Vydání:	2. opravené vydání, 2007
Počet stran:	54
Náklad:	200 výtisků
AA:	3,38

Tato publikace neprošla jazykovou úpravou v redakci nakladatelství.
Za věcnou a jazykovou správnost díla odpovídají autoři.

ISBN 978-80-7040-983-1
ISBN 978-80-7040-983-1

9 788070 409831