JIHOČESKÁ UNIVERZITA V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH
EKONOMICKÁ FAKULTA

OPERAČNÍ ANALÝZA

Ing. Jana Friebelová, Ph.D.

České Budějovice
2009

Operační analýza

Jana Friebelová

Recenzent: doc. Ing. Mgr. Martin Dlouhý, Ph.D.
VŠE Praha

doc. Ing. Josef Holoubek, CSc.
MZLU Praha

Obrázky: Ing. Ludvík Friebel, Ph.D.

ISBN 978-80-7394-193-2

Předmluva

Metody operační analýzy jsou účinným nástrojem rozhodování v jakékoliv oblasti lidské činnosti. Předpokladem pro využití matematických metod je možnost zobrazit uvažovaný problém pomocí matematického modelu. Řešení rozsáhlejších úloh vyžaduje jak znalosti vhodných postupů a metod pro rozhodování, tak znalosti problematiky, jíž se rozhodování týká, a v neposlední řadě využití vhodného software.

Předložená učebnice je určena zejména pro studenty Ekonomické fakulty Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích oboru Obchodní podnikání, Účetnictví a finanční řízení podniku a Řízení a ekonomika podniku. Z toho důvodu jsou v ní obsaženy pouze ty části oboru, které korespondují se sylabem stejnojmenného kurzu.

Učebnice je členěna do dvou základních celků - Lineární programování a Síťová analýza. Obě tyto části jsou členěny na subkapitoly. Učebnice obsahuje i dvě přílohy (Softwarová podpora a Tabulka hodnot distribuční funkce normálního normovaného rozdělení).

Poděkování patří oponentům, jejichž připomínky obohatily tento studijní text, kolegyním Evě Vaněčkové a Janě Klicnarové za cenné rady a kritiku a kolegovi a manželovi Ludvíku Friebelovi nejen za obrázky, které pro tuto učebnici vytvořil.

Autorka

V Českých Budějovicích
16. prosince 2009

Obsah

Seznam tabulek

Seznam obrázků

Kapitola 1

Lineární programování

Jednou z oblastí, ve které lze úspěšně aplikovat matematické poznatky, je oblast ekonomie a řízení. Speciální matematické metody, používané při řešení problémů z těchto oblastí, se ve světové literatuře nazývají **metodami operačního výzkumu** (anglickým ekvivalentem tohoto označení je **Operational research** nebo též **Management science**). Uvedený název souvisí s rozvojem těchto metod za 2. světové války při analýze a řešení složitých vojenských problémů a operací. Postupem času vznikla řada relativně samostatných disciplín operačního výzkumu, vyznačujících se některými společnými rysy, např. používáním modelové techniky.
Modelování spočívá v tom, že se jeden systém (originál) zobrazuje jiným systémem (modelem). Výsledkem modelování je **model**, který představuje záměrně zjednodušený obraz podstatných znaků reality za účelem jejího poznání. Jsou-li zobrazovací prostředky matematické povahy (např. rovnice, nerovnice, matice), jde o **matematický model**, který je v operačním výzkumu nejčastější. Význam matematického modelování spočívá v tom, že

- umožňuje popis systému v jakémkoliv jeho stavu, třeba i teprve zamýšleném,
- urychluje chování systému, které by ve skutečnosti trvalo velmi dlouho,
- umožňuje rychle vyhodnotit změny vzniklé v důsledku změn v modelovaném systému, a to - na rozdíl od experimentu v reálném systému - bez nebezpečí jakýchkoli ztrát,
- za pomoci výpočetní techniky umožňuje rychlé řešení i rozsáhlých problémů,
- vnáší pořádek do našeho myšlení tím, že vyžaduje jasnou formulaci řešeného problému.

1.1 Úvod k lineárnímu programování

K nejpoužívanějším a nejvíce propracovaným metodám operačního výzkumu patří **lineární programování**, jehož metody umožňují řešení speciální skupiny optimalizačních úloh.

1.1.1 Struktura úlohy LP

V úlohách lineárního programování vystupují určité omezující podmínky, za kterých při známém kritériu optimálnosti hledáme nejvýhodnější řešení daného problému. Z uvedené charakteristiky optimalizačních úloh vyplývá tvar jejich matematického modelu. Označme libovolné řešení daného optimalizačního problému jakožto vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Při optimalizaci výrobní struktury složky tohoto vektoru představují např. množství jednotlivých druhů výrobků. Požadavkem optimálnosti hledaného řešení rozumíme maximalizaci nebo minimalizaci veličiny, která je pro posouzení řešení daného problému rozhodující a kterou můžeme vyjádřit jako funkci řešení $z = f(\mathbf{x})$; tuto funkci nazýváme **účelovou (kriteriální) funkcí**. Při výrobním plánování tato funkce představuje např. závislost zisku (nebo nákladů) na množství jednotlivých výrobků, přičemž hledáme taková množství výrobků, která by zaručovala maximální zisk (nebo minimální náklady). Extrém, tj. maximum nebo minimum účelové funkce hledáme za určitých podmínek, které ovlivňují velikost jednotlivých složek vektoru **x**. V úlohách výrobního plánování k těmto podmínkám patří např. vztah mezi množstvím disponibilních výrobních zdrojů a jejich spotřebou na jednotlivé výrobky, možnosti odbytu některých výrobků apod. Tyto podmínky můžeme vyjádřit ve tvaru nerovnic a rovnic a tvoří tzv. **vlastní omezení úlohy**. Kromě vlastních omezujících podmínek, které mají v každé konkrétní úloze svůj zvláštní význam, vektor řešení všech optimalizačních úloh musí splňovat ještě další požadavek vyplývající z jeho ekonomické interpretace: všechny jeho složky musí splňovat **podmínky nezápornosti**. U některých úloh je nutné připojit ještě podmínku celočíselnosti.

1.1.2 Postup řešení úloh LP

Obecný postup řešení úloh LP můžeme shrnout do následujících pěti bodů:

- formulace ekonomického problému,
- formulace matematického modelu,
- řešení matematického modelu,
- ekonomická interpretace řešení,
- postoptimalizační analýza.

Poznámka. Formulací ekonomického problému rozumíme přesné slovní vyjádření problému.

Při sestavování matematických modelů úloh lineárního programování postupujeme tak, že nejprve určíme

- co má být výsledkem výpočtu, tzn. co představují složky vektoru a v jakých měrných jednotkách budou uváděny,
- z jakého hlediska budeme řešení dané úlohy optimalizovat, tzn. musíme zformulovat účelovou funkci
- a nejdříve věcně a potom též matematicky formulovat vlastní omezující podmínky.

Poznámka. Pořadí formulace účelové funkce a omezujících podmínek můžeme zaměnit.

Uvedený postup ilustrujeme na několika příkladech, v nichž budou zastoupeny některé typické případy využití modelů lineárního programování.

1.1.3 Různé typy úloh LP

Podle povahy optimalizačního problému v úlohách LP (z hlediska formulace matematického modelu) tyto úlohy nejčastěji dělíme na:

- výrobní problémy,
- směšovací problémy,
- dělící problémy,
- dopravní problémy,
- úlohy s binárními proměnnými,

- úlohy s polotovary.

Výrobní problémy

Ve výrobním problému se zadavatel nejčastěji snaží maximalizovat svůj zisk za podmínek, které má dány. Zadavatel tedy většinou řeší problém, jaký objem výrobků od kterého druhu má vyrábět, aby nepřekročil své výrobní kapacity a disponibilní množství jednotlivých surovin a zároveň maximalizoval svůj zisk. Proměnných je tolik, kolik různých druhů výrobků může zadavatel vyrábět. Tyto proměnné vyjadřují objem výroby jednotlivých výrobků. Účelovou funkcí je funkce zisku, kterou chce zadavatel maximalizovat a omezujícími podmínkami jsou podmínky na kapacitu výroby, disponibilní množství surovin, popřípadě kvóty na výrobky apod.

Příklad 1. *Cukrárna vyrábí dva druhy cukrovinek - s marcipánem (A) a s marcipánem a oříšky (B). V určitém období jsou k dispozici* 2 *kg marcipánu a* 3000 *g oříšků. Odhaduje se, že cukrovinek s marcipánem se prodá maximálně* 150 *kusů. Spotřeba marcipánu a oříšků na uvedené cukrovinky a cena cukrovinek jsou v následující tabulce.*

	A	*B*
Marcipán (g/ks)	20	10
Oříšky (g/ks)	0	30
Cena (Kč/ks)	8	6

Určete takovou strukturu výroby cukrovinek, která by za daných podmínek zajišťovala maximální tržby.

Matematický model

Výsledkem optimalizačního výpočtu bude nejvýhodnější počet kusů cukrovinek druhu A (x_1) *a B* (x_2)*. Účelová funkce představuje tržby získané prodejem obou druhů cukrovinek (v Kč), tzn. je tvaru*

$$z = 8x_1 + 6x_2 \ \rightarrow \ \text{max.}$$

Vlastní omezující podmínky vyjadřují

- *spotřebu marcipánu, která nesmí překročit disponibilní množství*

$$20x_1 + 10x_2 \leq 2000$$

- *spotřebu oříšků, která nesmí překročit disponibilní množství*

$$30x_2 \leq 3000$$

- *a omezenou výrobu cukrovinek A*

$$x_1 \leq 150$$

Nutné je připojit i podmínky nezápornosti, a to $x_1, x_2 \geq 0$ *a podmínky celočíselnosti.*

Směšovací problémy

Typickým zástupcem těchto úloh jsou úlohy nutriční, kdy je cílem sestavit jídelníček s potřebným obsahem živin a energie z různých surovin, u nichž známe ceny a složení. V těchto úlohách se zadavatel táže, kolik kterých výchozích surovin má použít do výsledné směsi, aby její cena byla co nejnižší. Proměnné vyjadřují spotřebu jednotlivých surovin.

Příklad 2. *Denní jídelníček sestavený dle zásad racionální výživy je třeba doplnit vhodnými potravinami tak, aby se energetická hodnota zvýšila nejméně o 1200 kJ, bílkoviny nejméně o 18 g, sacharidy nejvýše o 90 g, tuk pouze o 1,2 g a vápník nejméně o 2 g. Jaké množství nízkoenergetického jogurtu a celozrnných křehkých plátků uspokojí tyto požadavky při minimálních výdajích? Potřebné údaje pro vyřešení tohoto problému, vztažené na 100 g uvedených potravin, jsou obsaženy v následující tabulce.*

	En.(kJ)	*Bílk.(g)*	*Sach.(g)*	*Tuky(g)*	*Váp.(mg)*	*Cena(Kč)*
Jogurt	200	5	6	0,1	160	4
Cel. pl.	1500	9	80	1,5	-	10

Matematický model

Hledanými veličinami v dané úloze jsou váhová množství uvažovaných potravin (ve 100 g), a to

x_1 – *množství jogurtu,*

x_2 – *množství celozrnných plátků.*

Účelová funkce je tvaru

$$z = 4x_1 + 10x_2 \;\rightarrow\; \min.$$

Omezující podmínky jsou dány nutričními požadavky na doplnění denního jídelníčku, což vyjadřují následující nerovnice a rovnice:

- *pro energii*
$$200x_1 + 1500x_2 \geq 1200$$
- *pro bílkoviny*
$$5x_1 + 9x_2 \geq 18$$
- *pro sacharidy*
$$6x_1 + 80x_2 \leq 90$$
- *pro tuk*
$$0{,}1x_1 + 1{,}5x_2 = 1{,}2$$
- *pro vápník*
$$160x_1 \geq 2000$$

Podmínky nezápornosti ($x_1, x_2 \geq 0$) *jsou zde nutné, podmínky celočíselnosti nikoliv.*

Dělící problémy

Dělící problémy řeší typicky situaci, kdy máme k dispozici určité množství materiálu (desek, tyčí apod.), ze kterého potřebujeme získat určitý počet jinak velkých desek či tyčí. U dělících problémů se zadavatel ptá, kolik původních desek má rozřezat a jakým způsobem, aby dosáhl požadovaného počtu výsledných desek, přičemž jeho cílem může být opět minimalizace nákladů (různě velké původní desky jsou za různé ceny), minimalizace rozřezaných desek, minimalizace odpadu, apod. V tomto případě je zapotřebí si rozepsat jednotlivé možnosti, jakými způsoby lze získat z původního materiálu požadované kusy. Počet proměnných je roven počtu všech těchto možností, přičemž hodnota proměnné udává, kolik desek se má rozřezat právě tímto způsobem.

Příklad 3. *Podnik na výrobu železných konstrukcí potřebuje z 35 dvoumetrových tyčí nařezat alespoň 52 tyčí délky 50 cm a alespoň 18 tyčí délky 80 cm. Jak má tyče řezat, aby získal požadovaný počet kratších tyčí*

- *s minimálním odpadem,*
- *při minimálním počtu rozřezaných tyčí.*

Úlohu vyřešte za předpokladu, že neuvažujete způsob řezání dvoumetrových tyčí s odpadem větším než 20 *cm. Před sestavením matematického modelu pro určení optimálního řezného plánu je nutné stanovit všechny možné varianty řezání dvoumetrových tyčí na tyče délky* 50 *cm a* 80 *cm. Tyto možnosti jsou uvedeny v následující tabulce.*

	V_1	V_2
50 *cm*	2	4
80 *cm*	1	0
odpad (cm)	20	0

Matematický model

Neznámými veličinami x_j v řešené úloze jsou počty dvoumetrových tyčí řezaných podle varianty V_j, $j = 1, 2$. Platí $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ a obě neznámé musí splňovat podmínku celočíselnosti. Vlastní omezující podmínky úlohy vyjadřují

- *vztah mezi počtem rozřezaných dvoumetrových tyčí a jejich disponibilním množstvím*

$$x_1 + x_2 \leq 35$$

- *požadavek na výrobu minimálně* 52 *tyčí délky* 50 *cm*

$$2x_1 + 4x_2 \geq 52$$

- *požadavek na výrobu minimálně* 18 *tyčí délky* 80 *cm*

$$x_1 \geq 18$$

K uvedeným třem vlastním omezujícím podmínkám můžeme formulovat dvě účelové funkce

- *minimalizace odpadu*

$$z_1 = 20x_1 \;\rightarrow\; \min.$$

- *minimalizace počtu rozřezaných tyčí*

$$z_2 = x_1 + x_2 \;\rightarrow\; \min.$$

Dopravní problémy

Jedná se o úlohy, kdy potřebujeme alokovat nějaké zboží či náklad – typicky rozvoz zboží ze skladů do jednotlivých prodejen. Známe buď vzdálenosti mezi jednotlivými místy a nebo náklady na přepravu mezi těmito místy, dále jsou zadány množství výrobků, které je možno odebrat z jednotlivých skladů a požadavky jednotlivých prodejen.

V případě dopravního problému se zadavatel táže, jaký objem výrobků má přepravit z kterého skladu do které prodejny. Je-li tedy počet skladů m a počet prodejen n, potom v úloze vystupuje $m \cdot n$ proměnných. Pro každou dvojici sklad-prodejna existuje právě jedna proměnná, která udává, jaký objem výroby se přepraví z konkrétního skladu do konkrétní prodejny. Pro řešení tohoto typu úloh se většinou používají speciální metody, kterými se budeme zabývat později.

Úlohy s binárními proměnnými

Typickým zástupcem těchto úloh jsou úlohy o různých výběrech – může se jednat o výběr pracovníků ze skupiny žadatelů o práci, o výběr vhodné varianty určené k realizaci apod. Na rozdíl od předchozích typů úloh se neptáme na množství (kolik), ale zda ano či ne. Proto hledané proměnné mohou nabývat pouze hodnot 0 nebo 1 a představují indikátory výběru. Pokud nabývá proměnná nulové hodnoty – varianta není vybrána, pokud nabývá hodnoty 1, varianta je vybrána.

Příklad 4. *Stavební podnik si může vybrat z* 5 *staveb nejvýše* 3 *tak, aby měsíční náklady na tyto stavby nepřekročily* 200 *miliónů Kč. Předpokládané měsíční náklady na tyto stavby a roční výnosy z nich jsou uvedeny v tabulce (v mil. Kč).*

Stavba	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
Náklady	28	42	66	33	78
Výnosy	56	82	104	63	120

Pro které stavby se má podnik rozhodnout, aby předpokládané celkové roční výnosy ze staveb byly co největší, jestliže nemůže současně vybrat stavby S_2 a S_4, ale má zájem alespoň na jedné stavbě ze staveb S_1, S_3, S_4.

Matematický model

Proměnné tentokrát budou indikovat výběr staveb S_1, S_2, S_3, S_4 a S_5. Bude to pět binárních proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_5$, které budou nabývat hodnoty 1*, pokud stavba bude realizována, a hodnoty* 0*, pokud nebude realizována.*

Vlastní omezující podmínky jsou

- *požadavek na výběr nejvýše tří staveb*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 3$$

- *požadavek na horní hranici nákladů*

$$28x_1 + 42x_2 + 66x_3 + 33x_4 + 78x_5 \leq 200$$

- *požadavek na výběr maximálně jedné ze staveb S_2 a S_4*

$$x_2 + x_4 \leq 1$$

- *a požadavek na výběr alespoň jedné ze staveb S_1, S_3, S_4*

$$x_1 + x_3 + x_4 \geq 1$$

Nevlastní omezující podmínky

$$x_1, x_2, \ldots, x_5 \text{ – binární.}$$

Podmínky nezápornosti není nutné uvádět, neboť binární proměnná nabývá pouze hodnot 0 *a* 1*. Účelová funkce má potom tvar:*

$$z = 56x_1 + 82x_2 + 104x_3 + 63x_4 + 120x_5 \;\rightarrow\; \max.$$

Úlohy s polotovary

Úloha s polotovary je zvláštní případ výrobního plánování. Jedná se o případ, kdy některé výrobky nejsou prodávány, ale jsou využívány jako zdroj pro výrobu jiných výrobků. Tato skutečnost musí být zohledněna jak v omezujících podmínkách (je nutné zajistit dostatečné množství výrobků, které mají sloužit jako polotovar), tak v účelové funkci (tržby nelze počítat ze všech výrobků, ale pouze z těch, které jsou prodávány a ne z těch, které jsou používány pro další výrobu).

Příklad 5. *Nábytkářská firma vyrábí dva druhy stolů (S1, S2) a židle (Z). Při produkci je omezena disponibilním množstvím desek (v období, pro které firma plánuje výrobu, bude k dispozici* 800 *běžných metrů desek) a omezenými pracovními možnostmi dělníků (v uvažovaném období kapacita pracovní doby bude* 1240 *hodin). Spotřeba uvedených zdrojů na jednotlivé výrobky a prodejní cena za jeden výrobek je zapsána v následující tabulce:*

	S_1	S_2	Z
Desky (bm/ks)	4	3	1
Ruční práce (hod/ks)	6	4	2
Cena (Kč/ks)	8000	7500	1800

Kromě uvedených výrobků může firma prodávat komplety obsahující jeden stůl typu S1 a čtyři židle. Cena tohoto kompletu činí 14900 *Kč, přičemž vzhledem k poptávce je zapotřebí nabídnout těchto kompletů alespoň* 20*. Za daných podmínek určete takové množství prodávaných výrobků a kompletů, které firmě zajistí maximální tržby.*

Matematický model

V matematické formulaci uvedené úlohy budou čtyři strukturní proměnné, a to
x_1 *– počet stolů typu S1,*
x_2 *– počet stolů typu S2,*
x_3 *– počet židlí,*
x_4 *– počet kompletů.*
Omezující podmínky jsou dány

- *vztahem mezi disponibilním množstvím výrobních zdrojů (tj. desek a ruční práce) a jejich spotřebou*

$$4x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 800$$
$$6x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 1240$$

- *vztahem mezi počtem stolů typu S1 a počtem židlí a mezi počtem kompletů*

$$x_1 \geq x_4$$
$$x_3 \geq 4x_4$$

- *požadavkem na minimální počet kompletů*

$$x_4 \geq 20$$

Všechny uvedené proměnné musí být nezáporné a celočíselné.
V účelové funkci bude vyjádřen požadavek na maximalizaci tržeb, přičemž je třeba uvážit, že se budou prodávat pouze ty stoly typu S1 a ty židle, které nebudou součástí kompletů. Bude tedy platit

$$z = 8000(x_1 - x_4) + 7500x_2 + 1800(x_3 - 4x_4) + 14900x_4 \;\rightarrow\; \max.$$

Po úpravě získáme následující model úlohy lineárního programování.

$$
\begin{aligned}
z = 8000x_1 + 7500x_2 + 1800x_3 - 300x_4 &\rightarrow \text{max}\\
4x_1 + 3x_2 + x_3 &\leq 800\\
6x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 1240\\
-x_1 + x_4 &\leq 0\\
-x_3 + 4x_4 &\leq 0\\
x_4 &\geq 20\\
x_j &\geq 0, \forall j = 1, 2, \ldots, 4.
\end{aligned}
$$

1.1.4 Matematický model

Matematický model popsaného typu optimalizačních úloh se tedy skládá z účelové funkce, z vlastních omezujících podmínek a z podmínek nezápornosti. Pokud účelová funkce je lineární a všechny vlastní omezující podmínky jsou dány lineárními nerovnicemi a rovnicemi, jde o matematický model úlohy lineárního programování. Pro příklad 1 ze strany 11, jehož matematický model má tvar

$$
\begin{aligned}
z = 8x_1 + 6x_2 &\rightarrow \text{max}\\
20x_1 + 10x_2 &\leq 2000\\
30x_2 &\leq 3000\\
x_1 &\leq 150\\
x_1 &\geq 0\\
x_2 &\geq 0,
\end{aligned}
$$

můžeme obecně zapsat

$$
\begin{aligned}
z = c_1x_1 + c_2x_2 &\rightarrow max\\
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\leq b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\leq b_2\\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 &\leq b_3\\
x_1 &\geq 0\\
x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

kde a_{ij} jsou **strukturní koeficienty**, b_i **požadavková čísla** a c_j **ceny**. Index i představuje číslo omezující podmínky, které může nabývat hodnot $i = 1, 2, \ldots, m$ (m je počet omezujících podmínek) a index j představuje číslo proměnné, které může nabývat hodnot $j = 1, 2, \ldots, n$ (n je počet proměnných). Obecně můžeme matematický model zapsat i pomocí vektorů a matic:

$$
\begin{aligned}
z = \mathbf{c}^T &\rightarrow max\\
\mathbf{Ax} &\leq \mathbf{b}\\
\mathbf{x} &\geq \mathbf{0}.
\end{aligned}
$$

Nyní si vysvětlíme jednotlivé symboly pro náš příklad 1.

- Matice strukturních koeficientů $\mathbf{A} = (a_{ij})$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 0 & 30 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Vektor požadavkových čísel (pravých stran omezujících podmínek) $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$:

$$\mathbf{b} = (2000, 3000, 150)^T$$

- Vektor cen (vektor jednotkových zisků, nákladů apod.) $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$:

$$\mathbf{c} = (8, 6)^T$$

- Vektor řešení optimalizačního problému $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, kde jednotlivé složky představují v našem příkladu 1 optimální množství jednotlivých výrobků.

Cvičení

Cvičení 1.1. V dílně se vyrábějí čtyři druhy výrobků - stoly, židle, psací stoly a knihovny. Majitel dílny chce určit, kolik stolů, židlí, psacích stolů a knihoven musí vyrobit, aby optimálně využil zdroje, kterými disponuje. Na zhotovení uvedených předmětů se používají dva typy desek. Podnikatel má na skladě 1500 metrů desek prvního a 1000 metrů desek druhého typu. Má k dispozici kapacitu 800 pracovních hodin. Na výrobu každého stolu, židle, psacího stolu a knihovny je potřeba 5, 1, 9 a 12 metrů desek prvního typu, 2, 3, 4 a 1 metrů desek druhého typu a 3, 2, 5 a 10 pracovních hodin. Zisk je vykalkulován na 1200 Kč za stůl, 500 Kč za židli, 1500 Kč za psací stůl a 1000 Kč za knihovnu. Při zachování uvedených podmínek je potřeba určit takový výrobní plán, aby se dosáhl maximální zisk.

Cvičení 1.2. Firma vyrábí dva druhy barev pro interiéry a exteriéry ze dvou materiálů M1 a M2. Následující tabulka obsahuje spotřebu surovin.

	barva interiéry	barva exteriéry	zásoby na den
M_1 (tuny)	6	4	24
M_2 (tuny)	1	2	6
Zisk (1000 Kč/tunu)	5	4	

Maximální denní požadavek na množství barvy pro interiér jsou 2 tuny, navíc toto množství nemá překročit množství barvy pro exteriér o více než 1 tunu. Firma chce naplánovat denní výrobu tak, aby byl maximalizován denní zisk.

Cvičení 1.3. Koloniál prodává dva nápoje (Coca Cola a Sprite). Zisk z jedné plechovky Coca Coly je 7 Kč a zisk z jedné plechovky Sprite je 5 Kč. V koloniálu se neprodá více než 500 plechovek za den, přičemž levnější Sprite je alespoň dvakrát více žádaný. Cola se prodává v počtu minimálně 100 plechovek za den. Kolik plechovek obou nápojů na jeden den bude objednáváno, aby byl maximalizován zisk?

Cvičení 1.4. Banka plánuje vyčlenit částku 200 miliónů Kč na půjčky na byty a půjčky na auta - s úroky 14% a 12%. Oba typy půjček by měly být splaceny do roka. Zkušenost ukazuje, že 3% z půjček na byty a 2% z půjček na auta se nikdy nevrátí. Banka obvykle přiděluje alespoň dvakrát více peněz na půjčky na auta. Určete optimální výše půjček, aby zisk banky byl co největší.

Cvičení 1.5. Z dvoumetrových tyčí je třeba nařezat alespoň 160 tyčí délky 50 cm, 200 tyčí délky 70 cm a 250 tyčí délky 90 cm. Povolený odpad při řezání je maximálně 20 cm.

a) Minimalizujte celkový odpad z řezání.

b) Minimalizujte počet rozřezaných dvoumetrových tyčí.

Cvičení 1.6. Výrobky V_1, V_2 a V_3 se vyrábí se ze suroviny S a polotovarů V_1 a V_2. Zisk z prodeje jednoho kusu výrobku V_1 je 50 Kč, za kus V_2 140 Kč a za kus V_3 350 Kč. K dispozici je 1100 jednotek suroviny S. V následující tabulce jsou spotřeby suroviny a polotovarů na jednotku výrobku:

	V_1	V_2	V_3
S	1,7	1,8	1,5
V_1		2	3
V_2			1

Určete optimální množství vyráběných výrobků, aby firma dosáhla maximálního zisku.

Cvičení 1.7. Firma vyrábí hnědý, bílý a moučkový cukr. Na týden má k dispozici 4200 t cukrové třtiny. Jedna tuna hnědého cukru se vyrobí z tří tun třtiny. Bílý cukr se vyrábí z hnědého, a to jedna tuna z 1,25t a moučkový se vyrábí z bílého, a to jedna tuna z 1,05 tun bílého. Jednotkový zisk je 1500 Kč z tuny hnědého cukru, 2000 Kč z tuny bílého cukru a 2300 Kč z tuny moučkového. Maximalizujte zisk z prodeje.

Cvičení 1.8. Farma potřebuje nejméně 800 kg speciální stravy denně. Speciální strava je směsí kukuřice a sojových bobů se složkami:

	proteiny (kg)	vláknina (kg)	náklady (Kč/kg)
kukuřice (kg)	0,09	0,02	3
sójové boby (kg)	0,6	0,06	9

Denní dávka má obsahovat alespoň 30% proteinů a nejvýše 5% vlákniny a má být co nejlevnější.

Cvičení 1.9. Vedení podniku, který rozšiřuje svoji výrobní činnost, vypsalo výběrové řízení na tři místa vedoucích pracovníků v ekonomickém oddělení. Přihlásilo se pět zájemců, z nichž každý se podrobil psychologicko-odbornému testu a vyjádřil svoji představu o měsíčním platu. Výsledky tohoto šetření jsou uvedeny v následující tabulce.

Uchazeč	A	B	C	D	E
Počet bodů	7	5	8	4	9
Měsíční plat (tis. Kč)	25	22	26	20	28

Úkolem vedení podniku je vybrat z přihlášených zájemců tři pracovníky tak, aby

- měsíčně nebylo vypláceno na mzdách více než 75 tisíc Kč,
- byl přijat alespoň jeden ze zájemců A a C, neboť jde o uchazeče se sníženou pracovní schopností,
- nebyli současně přijati uchazeči B a E, kteří jsou v příbuzenském poměru,
- bylo přihlédnuto k výsledkům testu, tzn. aby za výše uvedených podmínek byli přijati uchazeči s nejvyšším počtem bodů.

Výsledky

Výsledky 1.1
Proměnné:
x_1 – počet vyrobených stolů (ks),
x_2 – počet vyrobených židlí (ks),
x_3 – počet vyrobených psacích stolů (ks),
x_4 – počet vyrobených knihoven (ks),
je u nich požadována nezápornost a celočíselnost.
Model úlohy:

$$\begin{aligned} z = 1200x_1 + 500x_2 + 1500x_3 + 1000x_4 &\rightarrow \max \\ 5x_1 + x_2 + 9x_3 + 12x_4 &\leq 1500 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 &\leq 1000 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 10x_4 &\leq 800 \\ x_i &\geq 0, i = 1,2,3,4 \\ \text{celočíselnost} & \end{aligned}$$

Výsledky 1.2
Proměnné:
x_1 – množství barvy pro interiér (t),
x_2 – množství barvy pro exteriér (t),

je u nich požadována nezápornost.
Model úlohy:

$$\begin{aligned} z = 5x_1 + 4x_2 &\to \max \\ 6x_1 + 4x_2 &\leq 24 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ x_1 &\leq 2 \\ x_1 - x_2 &\leq 1 \\ x_i &\geq 0, i = 1, 2. \end{aligned}$$

Výsledky 1.3
Proměnné:
x_1 – počet plechovek Coca Cola (ks),
x_2 – počet plechovek Sprite (ks),
je u nich požadována nezápornost a celočíselnost.
Model úlohy:

$$\begin{aligned} z = 7x_1 + 5x_2 &\to \max \\ x_1 + x_2 &\leq 500 \\ 2x_1 - x_2 &\leq 0 \\ x_1 &\geq 100 \\ x_i &\geq 0, i = 1, 2 \\ \text{celočíselnost} & \end{aligned}$$

Výsledky 1.4
Proměnné:
x_1 – půjčky na byty (milionů Kč),
x_2 – půjčky na auta (milionů Kč),
je u nich požadována nezápornost.
Model úlohy:

$$\begin{aligned} z = 1,14 * 0,97x_1 + 1,12 * 0,98x_2 - x_1 - x_2 &\to \max \\ x_1 + x_2 &\leq 200 \\ 2x_1 - x_2 &\leq 0 \\ x_i &\geq 0, i = 1, 2. \end{aligned}$$

Výsledky 1.5
Varianty, jak lze získat tyče požadované délky, jsou obsaženy v následující tabulce:

Varianta	1	2	3	4
50 cm	–	1	4	2
70 cm	–	2	–	–
90 cm	2	–	–	1
odpad (cm)	20	10	–	10

Proměnné:
x_1 – počet tyčí rozřezaných variantou 1,
x_2 – počet tyčí rozřezaných variantou 2,
x_3 – počet tyčí rozřezaných variantou 3,
x_4 – počet tyčí rozřezaných variantou 4,

je u nich požadována nezápornost a celočíselnost.
Model úlohy:

$$
\begin{aligned}
z_a = 20x_1 + 10x_2 + 0x_3 + 10x_4 &\;\rightarrow\; \min \\
z_b = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\;\rightarrow\; \min \\
x_2 + 4x_3 + 2x_4 &\;\geq\; 160 \\
2x_2 &\;\geq\; 200 \\
2x_1 + x_4 &\;\geq\; 250 \\
x_i &\;\geq\; 0, i = 1, 2, 3, 4 \\
\text{celočíselnost} &
\end{aligned}
$$

Výsledky 1.6
Proměnné:
x_1 – počet vyrobených výrobků V_1 (ks),
x_2 – počet vyrobených výrobků V_2 (ks),
x_3 – počet vyrobených výrobků V_3 (ks),
je u nich požadována nezápornost a celočíselnost.
Model úlohy:

$$
\begin{aligned}
z = 50(x_1 - 2x_2 - 3x_3) + 140(x_2 - x_3) + 350x_3 &\;\rightarrow\; \max \\
1,7x_1 + 1,8x_2 + 1,5x_3 &\;\leq\; 1100 \\
2x_2 + 3x_3 &\;\leq\; x_1 \\
x_3 &\;\leq\; x_2 \\
x_i &\;\geq\; 0, i = 1, 2, 3 \\
\text{celočíselnost} &
\end{aligned}
$$

Výsledky 1.7
Proměnné:
x_1 – hnědý cukr (t),
x_2 – bílý cukr (t),
x_3 – moučkový cukr (t),
je u nich požadována nezápornost.
Model úlohy:

$$
\begin{aligned}
z = 1500(x_1 - 1,25x_2) + 2000(x_2 - 1,05x_3) + 2300x_3 &\;\rightarrow\; \max \\
3x_1 &\;\leq\; 4200 \\
1,25x_2 &\;\leq\; x_1 \\
1,05x_3 &\;\leq\; x_2 \\
x_i &\;\geq\; 0, i = 1, 2, 3.
\end{aligned}
$$

Výsledky 1.8
Proměnné:
x_1 – množství kukuřice (kg),
x_2 – množství sójových bobů (kg),
je u nich požadována nezápornost.
Model úlohy:

$$
\begin{aligned}
z = 3x_1 + 9x_2 &\;\rightarrow\; \min \\
0,09x_1 + 0,6x_2 &\;\geq\; 0,3(x_1 + x_2) \\
0,02x_1 + 0,06x_2 &\;\leq\; 0,05(x_1 + x_2) \\
x_1 + x_2 &\;\geq\; 800 \\
x_i &\;\geq\; 0, i = 1, 2.
\end{aligned}
$$

Výsledky 1.9
Proměnné:
x_1 – indikátor výběru pracovníka A, indikuje, zda vybereme pracovníka A (ano – nabývá hodnoty 1, ne – nabývá hodnoty 0)
x_2 – indikátor výběru pracovníka B,
x_3 – indikátor výběru pracovníka C,
x_4 – indikátor výběru pracovníka D,
x_5 – indikátor výběru pracovníka E,
všechny proměnné jsou binární.
Model úlohy:

$$\begin{aligned} z = 7x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 4x_4 + 9x_5 \quad &\rightarrow \quad \max \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \quad &= \quad 3 \\ 25x_1 + 22x_2 + 26x_3 + 20x_4 + 28x_5 \quad &\leq \quad 75 \\ x_1 + x_3 \quad &\geq \quad 1 \\ x_2 + x_5 \quad &\leq \quad 1 \\ x_i \text{ binární}, \ i = 1, 2, 3, 4, 5. & \end{aligned}$$

1.2 Grafické řešení úloh lineárního programování

Pokud matematický model úlohy lineárního programování obsahuje pouze dvě strukturní proměnné, můžeme najít množinu přípustných řešení a vyhledat na ní extrém účelové funkce pomocí grafického znázornění v rovině pravoúhlých souřadných os.

V úlohách lineárního programování je nutné ještě respektovat podmínky nezápornosti obou neznámých, tzn. uvažovat průnik příslušných polorovin pouze v I. kvadrantu. Kromě toho může soustava vlastních omezujících podmínek obsahovat též rovnice (jejich grafickým znázorněním jsou přímky), takže obecně množinu přípustných řešení tvoří průnik všech odpovídajících polorovin, přímek a I. kvadrantu. Je-li tento průnik prázdný, daná úloha nemá přípustné řešení. Neprázdný průnik polorovin a přímek, které jsou konvexními útvary (s každými dvěma body v nich leží i jejich spojnice), je opět konvexní útvar, který má konečný počet krajních bodů (vrcholů) a který je buď omezený (pak jde o tzv. konvexní polyedr), nebo neomezený. Jestliže proměnné musí být celočíselné, množina přípustných řešení se redukuje na průsečíky svislých a vodorovných přímek, mezi nimiž je jednotková vzdálenost.

Zde budeme ilustrovat postup při grafickém řešení na příkladu 1 ze strany 11, ve kterém vynecháme požadavek celočíselnosti. Vyřešíme tedy graficky soustavu nerovnic

$$
\begin{aligned}
z = 8x_1 + 6x_2 &\rightarrow \max \\
a) 20x_1 + 10x_2 &\leq 2000 \\
b) 30x_2 &\leq 3000 \\
c) x_1 &\leq 150 \\
x_1 &\geq 0 \\
x_2 &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Jak jsme již uvedli, vzhledem k podmínkám nezápornosti je pro nás přijatelné pouze řešení, které se nalézá v prvním kvadrantu. Postupně budeme graficky znázorňovat omezující podmínky.

První omezující podmínka je znázorněna na obrázku 1.1. Nejprve je třeba zjistit, jaký úsek vytíná první omezující podmínka na ose x_1 a jaký úsek na ose x_2. Úsek na ose x_1 zjistíme tak, že za proměnnou x_2 dosadíme do první omezující podmínky 0 a dopočítáme hodnotu x_1. Stejným způsobem dopočítáme úsek, který první podmínka vytíná na ose x_2 (položíme $x_1 = 0$ a dopočítáme hodnotu proměnné x_2). Konkrétně pro první omezující podmínku řešíme

$$
\begin{gathered}
20x_1 + 10x_2 = 2000 \\
20x_1 + 10 \cdot 0 = 2000 \\
20x_1 = 2000 \\
x_1 = 100
\end{gathered}
$$

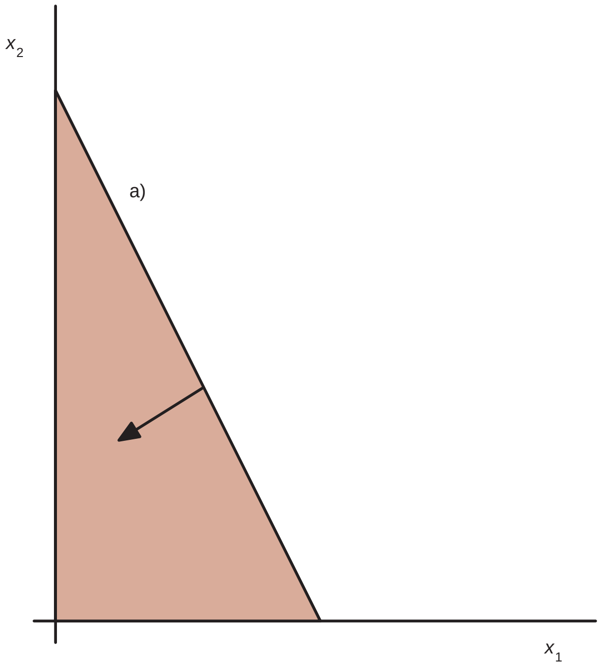
a

$$
\begin{gathered}
20x_1 + 10x_2 = 2000 \\
20 \cdot 0 + 10x_2 = 2000 \\
10x_2 = 2000 \\
x_2 = 200
\end{gathered}
$$

Souřadnice bodu, který leží na ose x_1 jsou [100;0] a souřadnice bodu, který leží na ose x_2 jsou [0;200]. Oba tyto body spojíme přímkou. Všechny body, které leží na této přímce jsou řešením první podmínky, pokud by to byla rovnice. Vzhledem k tomu, že první podmínka je nerovnice, jejím řešením je, kromě přímky, ještě jedna z polorovin. Která to je, zjistíme tak, že do podmínky dosadíme souřadnice libovolného bodu. Pokud podmínka platí, řešením nerovnice je polorovina, ve které leží dosazovaný bod. Například pokud do podmínky dosadíme souřadnice [10;0], podmínka je splněna a my víme, že řešením první nerovnice je polorovina, ve které leží bod se souřadnicemi [10;0], viz obrázek 1.1.

Poznámka. Nezapomeňme, že nás zajímá pouze řešení v prvním kvadrantu vzhledem k podmínkám nezápornosti. První omezující podmínce a zároveň podmínkám nezápornosti vyhovuje pouze trojúhelník na obrázku 1.1.

Stejným způsobem graficky znázorníme druhou omezující podmínku. Zde je proměnná x_1 s nulovým koeficientem. Ať již je hodnota proměnné x_1 jakákoliv, proměnná x_2 bude nabývat stále hodnoty 100. Druhá omezující podmínka je znázorněna na obrázku 1.2. Na tomto obrázku je opět vyplněný průnik řešení, která vyhovují první a druhé omezující podmínce i podmínkám nezápornosti. Všechny vlastní omezující podmínky a průnik jejich řešení jsou znázorněny na obrázku 1.3.



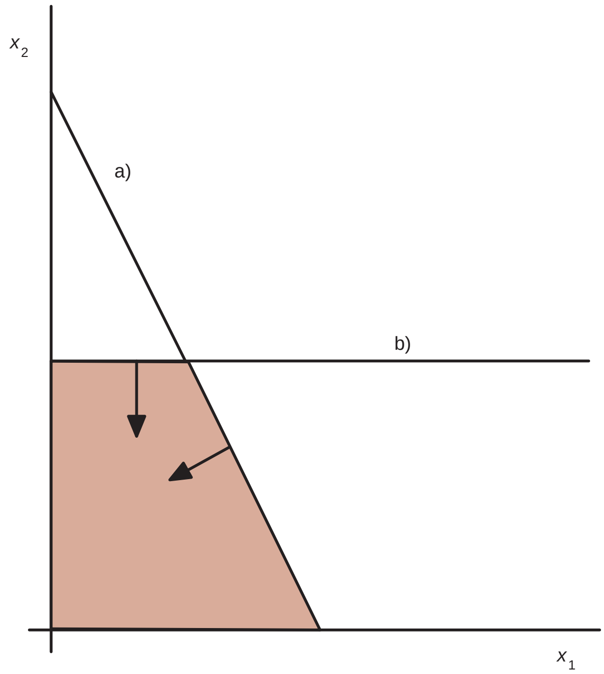
Obrázek 1.1: Grafické znázornění první omezující podmínky

Průnik řešení všech nerovnic (omezujících podmínek) – pokud existuje – budeme nazývat **množina všech přípustných řešení**. V příkladu 1 je to čtyřúhelník. Je to množina takových řešení, která vyhovují všem omezujícím podmínkám. Souřadnice každého bodu množiny přípustných řešení představují přípustné řešení dané úlohy, přičemž krajní body této množiny jsou obrazy **přípustných základních řešení**. Má-li daná úloha konečné optimální řešení, podle základní věty lineárního programování je toto řešení základní, neboli je zobrazeno jedním z vrcholů množiny všech přípustných řešení. Řešená úloha má tedy 4 základní přípustná řešení, zobrazená vrcholy vyznačeného čtyřúhelníka, přičemž jeden z těchto vrcholů je obrazem optimálního řešení.

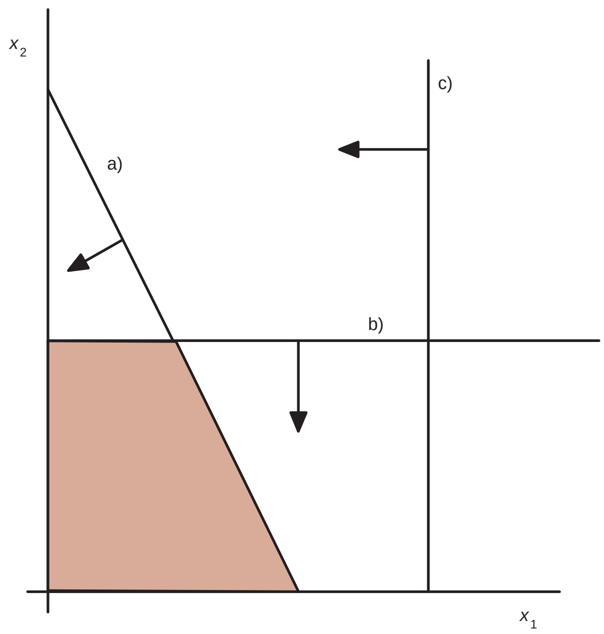
Naším úkolem je najít optimální řešení. To můžeme provést dvěma způsoby.

1. Dopočítáme souřadnice všech vrcholů množiny přípustných řešení a tyto souřadnice dosadíme postupně do účelové funkce. Na obrázku 1.4 jsou označeny vrcholy množiny přípustných řešení písmeny A, B, C a D.

   Poznámka. Připomeňme, že souřadnice bodu, který leží na průsečíku dvou přímek spočítáme vyřešením soustavy dvou rovnic, kterými jsou vyjádřeny tyto přímky. Například pro bod C řešíme soustavu
   $$20x_1 + 10x_2 = 2000$$
   $$30x_2 = 3000.$$
   Výsledkem jsou souřadnice bodu C [50;100].



Obrázek 1.2: Grafické znázornění první a druhé omezující podmínky



Obrázek 1.3: Grafické znázornění třech vlastních omezujících podmínek

Když máme k dispozici souřadnice všech bodů (A=[0;0], B=[100;0], C=[50;100] a D=[0;100]), dosadíme je postupně do účelové funkce a získáme hodnoty účelové funkce s různými řešeními:

$$z_A = 0, z_B = 800, z_C = 1000, z_D = 600$$

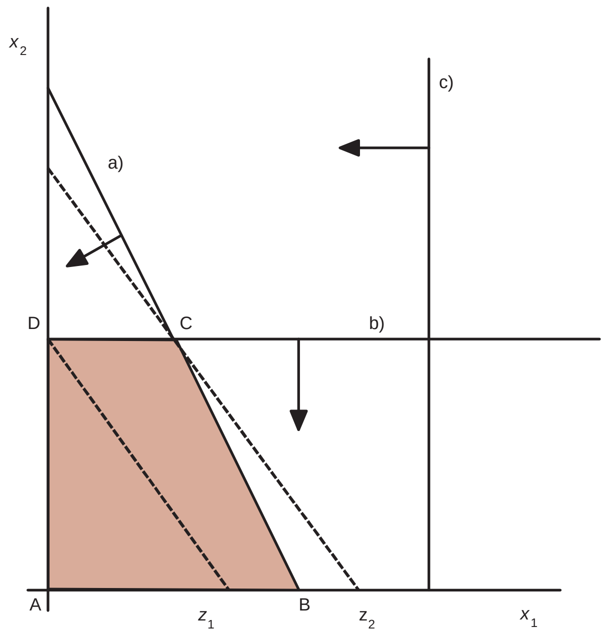
Nejlepší (v našem případě nejvyšší) hodnoty účelové funkce dosáhneme v bodě C. To znamená, že za daných omezujících podmínek je z hlediska zisku nejlepší vyrábět 50 kusů cukrovinky A a 100 kusů cukrovinky B. Výrobce pak bude z této výroby dosahovat tržeb 1000 Kč.

2. Graficky znázorníme účelovou funkci a hledáme průnik této funkce s množinou přípustných řešení. Nejprve potřebujeme získat "sklon" přímky, která je grafickým řešení účelové funkce. To získáme tak, že za z dosadíme libovolné číslo a dopočítáme souřadnice průsečíku účelové funkce s osami x_1 a x_2. Oba body zakreslíme do soustavy souřadnic a spojíme je přímkou (používáme přerušovanou čáru pro odlišení účelové funkce a omezujících podmínek). Na obrázku 1.4 jsou znázorněny dvě účelové funkce ($z_1 = 600$ a $z_2 = 1000$).

   Poznámka. Všiměte si, že čím má účelová funkce vyšší hodnotu, tím "výše" její graf protíná osu x_2.

   Pro libovolně zvolenou hodnotu účelové funkce tuto funkci graficky znázorníme a potom ji posouváme rovnoběžně do prvního nebo posledního bodu (záleží na výchozí poloze), kde se nám protne funkce s množinu přípustných řešení.

   Poznámka. Je třeba si uvědomit, kde leží původní účelová funkce a kterým směrem ji posouváme, abychom dosáhli požadovaného extrémního řešení. V případě, že si nejsme jistí, kterým směrem se blížíme k maximu (minimu), je vhodné si dosadit za z dvě různé hodnoty.



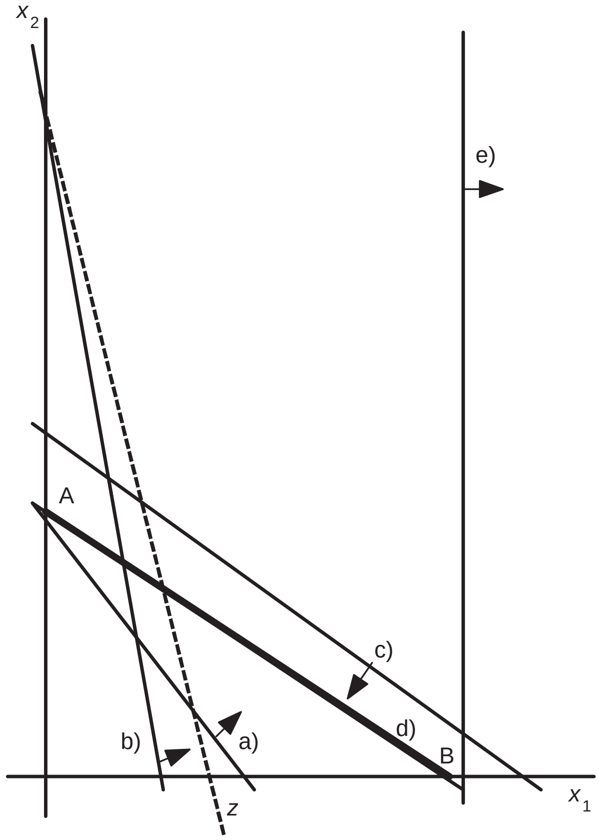
Obrázek 1.4: Grafické řešení příkladu 1

Vyřešený příklad představuje nejčastější typ úlohy lineárního programování, kdy existuje konečné optimální řešení. Zvláštní případy, které mohou při řešení úloh lineárního programování nastat, jsou ilustrovány na následujících, graficky řešených příkladech.

1.2.1 Zvláštní příklady grafického řešení

- **Úloha nemá přípustné řešení**
  Tento případ se při grafickém způsobu řešení projeví tak, že poloroviny a přímky, zadané soustavou vlastních omezujících podmínek, nemají v I. kvadrantu žádný společný bod. Tohoto druhu je úloha o optimálním složení výživového doplňku (priklad 2 ze strany 12).

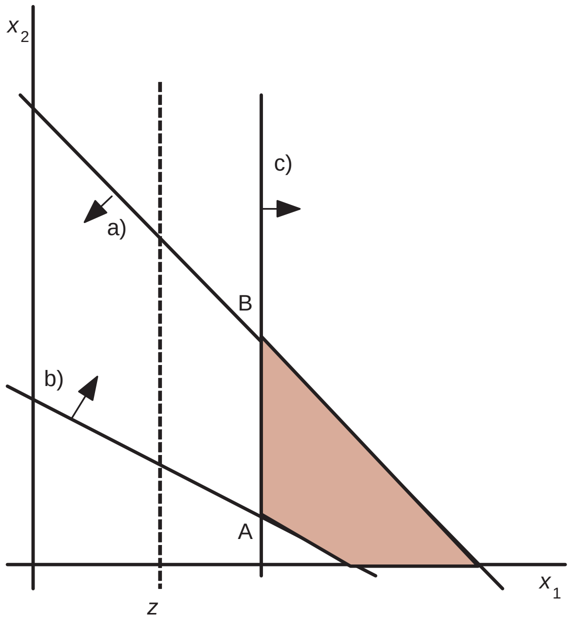
Množina přípustných řešení je tvořena průnikem 4 polorovin, jedné přímky a I. kvadrantem (viz obrázek 1.5), přičemž tento průnik je prázdný. Úloha se stane řešitelnou vynecháním podmínky, která určuje požadavek na množství vápníku, kdy množinou přípustných řešení se stane úsečka AB. Účelová funkce nabývá na této úsečce minima v bodě A = [2,46;0,636], neboli požadované množství živin lze nejlevněji získat konzumací 246 g jogurtu a 63,6 g celozrnných plátků. Cena této kombinace potravin je 16,20 Kč. Z obrázku je patrné, že zjištěný výživový doplněk bude obsahovat nadlimitní množství energie, obsah bílkovin bude na dolní požadované hranici a horní hranice pro obsah sacharidů nebude dosažena.



Obrázek 1.5: Grafické řešení příkladu 2

- **Úloha má nekonečně mnoho optimálních řešení se stejnou hodnotou účelové funkce**
  Tento případ nastane tehdy, když přímka znázorňující účelovou funkci pro její libovolně zvolenou hodnotu je rovnoběžná s některou z přímek, které omezují množinu přípustných řešení. Tohoto druhu je úloha o racionálním dělení tyčí (viz příklad 3 na straně 12), a to při volbě minimalizace odpadu, kdy přímky o rovnici $z = 20x_1$ jsou rovnoběžné se svislou stranou čtyřúhelníka znázorňujícího množinu přípustných řešení (viz obrázek 1.6). Optimální řešení jsou znázorněna všemi body úsečky AB, přičemž koncovými body této úsečky jsou zobrazena základní řešení. Platí A = [18, 4] (tj. rozřezat 18 tyčí podle první varianty a 4 tyče podle druhé varianty), B = [18, 17] (18 tyčí rozřezat podle V_1 a 17 tyčí podle V_2), přičemž oběma těmto řezným plánům odpovídá stejný odpad 360 cm. Při řešení zobrazeném bodem A bude ještě 13 dvoumetrových tyčí zbývat, zatímco bodu B odpovídá řešení s využitím všech 35 dvoumetrových tyčí. Nejnižší možný odpad zajišťuje též řešení znázorněné libovolným bodem úsečky AB, který získáme jako konvexní kombinaci jejích

koncových bodů. Požadavku celočíselnosti proměnné x_2 ovšem odpovídají pouze body s celočíselnými souřadnicemi $x_2 = 5, 6, 7, \ldots, 16$.



Obrázek 1.6: Grafické řešení příkladu 3

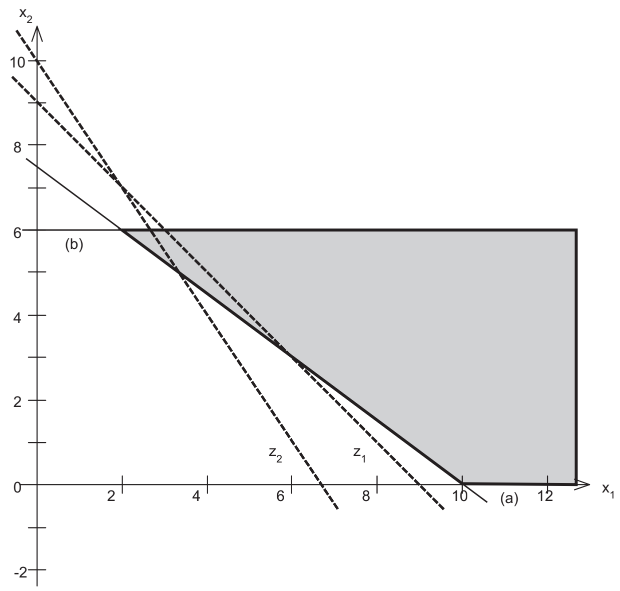
- **Hodnota účelové funkce je neomezená**
  Tento případ může nastat tehdy, když množina přípustných řešení je neomezená. Ukázkou je následující příklad.

  Řešený příklad 1.1. *Firma usiluje o co největší úhrnný počet výrobků V_1 a V_2, jejichž prodejem by dosáhla tržby alespoň 30 tisíc Kč. Cena výrobku V_1 je 3 tisíce Kč/ks, výrobek V_2 se prodává za 4 tisíce Kč/ks. Výrobek V_2 vyžaduje speciální výrobní zařízení, které umožňuje jeho výrobu v rozsahu nejvýše 6 kusů. Kolik výrobků V_1 a V_2 má firma vyrábět?*

  Řešení. Model bude mít dvě strukturní proměnné, a to x_1 (počet výrobků V_1 v kusech) a x_2 (počet V_2 v kusech). Omezující podmínky a účelová funkce budou mít tvar:

$$\begin{aligned} z = x_1 + x_2 &\rightarrow \text{max} \\ 3x_1 + 4x_2 &\geq 30 \\ x_2 &\leq 6 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0, \end{aligned}$$

  Množina přípustných řešení je v tomto případě neomezená (viz obrázek 1.7) a daná účelová funkce může neomezeně vzrůstat (grafem účelové funkce, sestrojeným pro její určitou hodnotu, můžeme neomezeně posouvat ve směru rostoucí hodnoty účelové funkce a pořád existují jeho společné body s množinou přípustných řešení). Kdybychom ale za daných podmínek minimalizovali úhrnné náklady na výrobu obou výrobků za předpokladu, že s výrobou jednoho kusu výrobku V_1 jsou spojeny náklady 1,5 tisíce Kč a náklady na 1 kus výrobku V_2 činí 1 tisíc Kč, účelová funkce $z_2 = 1{,}5x_1 + x_2$ nabývá minima v bodě $A = [2, 6]$, tzn. pro minimalizační úlohu existuje konečné optimální řešení. Nejnižších nákladů 9 tisíc Kč by bylo dosaženo při výrobě 2 kusů výrobku V_1 a 6 kusů výrobku V_2. Tato struktura výroby by zajišťovala dolní hranici tržeb a horní hranici pro počet výrobků V_2.



Obrázek 1.7: Grafické řešení příkladu 1.1

Přestože se v praxi vyskytuje málo optimalizačních problémů pouze se dvěma proměnnými, grafický způsob řešení úloh tohoto typu je velmi názorný (lze na něm ilustrovat např. obecné vlastnosti úloh lineárního programování).

Cvičení

Cvičení 1.10. Na jaké minimální ploše lze pěstováním žita a pšenice získat alespoň 100 tun zrna a 90 tun slámy? Předpokládané hektarové výnosy obou plodin jsou uvedeny v tabulce.

	žito	pšenice
zrno	4	5
sláma	4,5	4

Cvičení 1.11. Stavební firma provádí stavby nových budov a opravy a renovace starých. Zisk z nových staveb činí 20% z vložených nákladů, zatímco z opravených a renovovaných budov je to 25%. Aby firma nemusela shánět půdu pro nové stavby, plánuje alespoň 40 milionů Kč na opravy a renovace, ale přitom tato činnost nesmí stát víc než polovinu celkových stavebních nákladů. 5% nákladů tvoří v obou případech fixní režijní náklady, jejichž dolní hranice je odhadnuta na 5 milionů Kč. Firma zaměstnává 180 kvalifikovaných pracovníků, přičemž práce na nových domech v hodnotě 10 milionů Kč si vyžádá 12 pracovníků a při opravách a renovacích 18 pracovníků.

a) Kolik milionů má firma věnovat na stavbu nových domů a kolik na opravy a renovace starých, aby zajistila maximální zisk? Úlohu řešte graficky a z grafu určete, která omezení jsou pro optimální rozdělení nákladů rozhodující.

b) O kolik bude překročena dolní hranice fixních režijních nákladů?

c) Jak se změní optimální řešení, jestliže opravy a renovace starých budov v hodnotě 10 milionů Kč si vyžádají pouze 15 pracovníků?

d) Jak se změní optimální řešení získané v úkolu 1), jestliže firma má nedostatek pracovníků a chce minimalizovat jejich počet bez ohledu na dosažený zisk? Jak se tato úspora projeví na zisku firmy?

Cvičení 1.12. Provozovatel balící linky výrobků chce zvýšit kvalitu práce zpomalením pohybu pásu. Při rychlejším chodu, kdy čas linky připadající na jeden výrobek je 3 minuty, je 5% zmetků. Při pomalejším chodu pásu na jeden výrobek připadá 5 minut, ale procento zmetků je pouze 2. Kolik výrobků za směnu (8 hodin) z celkového počtu 100 kusů má být zabaleno při rychlém, a kolik při pomalém pohybu pásu, aby počet vadně zabalených výrobků byl co nejmenší?

Výsledky

Výsledky 1.10
21,5 ha

Výsledky 1.11 a) 90 milionů Kč na stavbu nových budov, 40 milionů Kč na renovace. Rozhodující je dolní hranice nákladů na opravy a disponibilní množství pracovníků.

b) o 1,5 milionů Kč

c) úloha bude mít nekonečně mnoho rovnocenných optimálních řešení, která jsou konvexní kombinací řešení $(100; 40)$ a $(\frac{200}{3}; \frac{200}{3})$

Výsledky 1.12
10 výrobků při rychlém chodu, 90 výrobků při pomalém chodu.

1.3 Obecné vlastnosti řešení úloh LP

Obecně lze převést soustavu nerovnic, která tvoří vlastní omezující podmínky, na soustavu rovnic pomocí přídatných proměnných. O soustavě rovnic, která je přiřazena soustavě omezujících podmínek po zavedení přídatných proměnných, předpokládejme, že je tvořena nezávislými rovnicemi, tzn. že hodnost matice jejích koeficientů se rovná počtu rovnic. Protože počet neznámých je vždy větší než počet rovnic ($n > m$), soustava má nekonečný počet řešení, která dostaneme tak, že hodnoty $n-m$ neznámých volíme libovolně (aby soustava m rovnic pro zbývajících m neznámých byla řešitelná, musí obsahovat lineárně nezávislé rovnice, což ovlivňuje výběr $n-m$ volitelných neznámých). Vzhledem k ekonomické interpretaci neznámých v úlohách lineárního programování se zabýváme pouze nezáporným řešením soustavy rovnic, které nazýváme řešením přípustným. Přípustné řešení soustavy, pro které účelová funkce nabývá nejlepší, tj. maximální nebo minimální hodnoty, nazýváme optimálním řešením dané úlohy lineárního programování. Dá se dokázat, že množina všech přípustných řešení každé soustavy rovnic je množinou konvexní, tzn. že libovolná konvexní kombinace přípustných řešení je opět přípustné řešení. Základní přípustné řešení soustavy m lineárních rovnic o n neznámých obsahuje nejvýše m kladných složek, přičemž vektory strukturních koeficientů těchto neznámých musí být lineárně nezávislé. Pokud počet kladných složek se rovná právě číslu m, řešení je nedegenerované. Při počtu kladných složek menším než m základní přípustné řešení soustavy rovnic je degenerované. Počet přípustných základních řešení soustavy je roven nejvýše číslu

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

neboť nejvýše tolika způsoby můžeme mezi n složkami řešení zvolit $n-m$ složek nulových tak, aby vznikla soustava m nezávislých rovnic s nezáporným řešením. Přípustné základní řešení soustavy budeme nazývat základním řešením úlohy lineárního programování. Pro řešení úloh lineárního programování je důležitá tzv. základní věta lineárního programování: **Má-li úloha lineárního programování optimální řešení, má též základní optimální řešení.** Z této věty vyplývá možnost, jak optimální řešení získat. Stačí vyšetřovat všechna základní přípustná řešení soustavy, kterých je konečný počet, a vybrat to řešení, pro které účelová funkce nabývá extrémní hodnoty. Pro rozsáhlejší úlohy je číslo $\binom{n}{m}$ značně velké, takže uvedený postup hledání optimálního řešení je nevýhodný. Proto byly vypracovány speciální metody, které umožňují efektivní prohledávání množiny základních přípustných řešení soustavy omezujících podmínek s cílem najít řešení optimální.

1.4 Simplexová metoda

Simplexová metoda je univerzální metoda, kterou můžeme řešit každou úlohu lineárního programování. Je to metoda iterační, při které v jednotlivých krocích přecházíme od výchozího základního řešení dané úlohy k jiným základním řešením dávajícím lepší hodnotu účelové funkce. K realizaci tohoto postupu je nutné znát

- výchozí základní řešení,
- pravidlo pro přechod od jednoho základního řešení k jinému s lepší hodnotou účelové funkce,
- kritérium, zda již bylo dosaženo optimální hodnoty účelové funkce.

Algoritmus simplexové metody popíšeme na příkladu 1 (výroba cukrovinek) ze strany 11 a na příkladu 3 (řezání tyčí) ze strany 12. Řešení příkladu 1 bude návodem pro řešení maximalizačních úloh, zatímco na příkladu 3 bude objasněno řešení minimalizačních úloh.

1.4.1 Stanovení výchozího základního řešení

Jedno ze základních řešení jakékoli soustavy lineárních rovnic snadno získáme v případě, že soustava je v kanonickém tvaru, tzn. matice soustavy obsahuje jednotkovou submatici. Jestliže za základní neznámé volíme ty, které mají jednotkové vektory koeficientů, pak při volbě nulových hodnot zbývajících (nezákladních) neznámých jsou základní neznámé rovny číslům na pravých stranách rovnic. V úlohách lineárního programování, v nichž všechny omezující podmínky jsou dány nerovnicemi typu $\leq$, získáme kanonický tvar soustavy rovnic pomocí nezáporných přičítaných přídatných (doplňkových) proměnných. Tyto proměnné lze věcně interpretovat jako nevyužité horní hranice. V příkladu 1 bude mít soustava omezujících podmínek po zavedení přídatných proměnných d_1, d_2, d_3, značících nevyužité disponibilní množství marcipánu a oříšků a nevyužitou horní hranici pro počet cukrovinek A, tento tvar:

$$\begin{aligned} 20x_1 + 10x_2 + d_1 &= 2000 \\ 30x_2 + d_2 &= 3000 \\ x_1 + d_3 &= 150. \end{aligned}$$

Jestliže za základní neznámé zvolíme proměnné d_1, d_2, d_3, po volbě nulových hodnot zbývajících neznámých x_1, x_2 získáme vektor výchozího základního řešení tvaru $(0, 0, 2000, 3000, 150)$. Tomuto řešení odpovídá nulová hodnota účelové funkce $z = 8x_1 + 6x_2$ (přičítané přídatné proměnné mají v účelové funkci nulový koeficient, neboť představují nevyužitou horní hranici příslušného omezení a nepřinášejí žádný užitek).

Simplexová tabulka - výchozí řešení

Simplexový algoritmus lze výhodně provádět v tabulce, v jejímž záhlaví je první sloupec nadepsán **Báze** a píše se do něho v každém kroku algoritmu označení bázických (základních) proměnných a symbol z pro označení účelové funkce (řádek s účelovou funkcí budeme nazývat **indexním řádkem** a čísla v něm budou tzv. **indexní čísla**). Další sloupce jsou nadepsány označením jednotlivých strukturních a přídatných proměnných a píší se do nich koeficienty u těchto proměnných v omezujících podmínkách a v anulované rovnici účelové funkce. Poslední sloupec je označen **b** a ukládají se do něho pravé strany omezujících podmínek a hodnota účelové funkce v příslušném kroku.

Výchozí simplexová tabulka s výchozím řešením pro příklad 1 má tvar – viz tabulka 1.1. V řádcích označených základními proměnnými d_1, d_2, d_3 je zapsána soustava rovnic (omezující

Tabulka 1.1: Simplexová tabulka– příklad 1 – výchozí krok

Báze	x_1	x_2	d_1	d_2	d_3	**b**
d_1	20	10	1	0	0	2000
d_2	0	30	0	1	0	3000
d_3	1	0	0	0	1	150
z	-8	-6	0	0	0	0

podmínky převedené pomocí doplňkových proměnných na rovnice) a indexní řádek obsahuje anulovanou rovnici účelové funkce, tzn. rovnici $z - 8x_1 - 6x_2 = 0$.

Z tabulky lze vyčíst hodnoty jednotlivých proměnných i hodnotu účelové funkce. V prvním sloupci báze jsou názvy proměnných, které jsou v bázi – ve výchozím řešení našeho příkladu jsou to doplňkové proměnné d_1, d_2, d_3, které tvoří jednotkovou submatici. Hodnoty těchto bázických proměnných vyčteme v pravém sloupci označeným **b**. Hodnotu účelové funkce zjistíme v indexním řádku pod hodnotami bázických proměnných. Proměnné, které nejsou obsaženy v bázi mají nulovou hodnotu. Ve výchozím řešení mají jednotlivé proměnné a účelová funkce hodnoty:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, d_1 = 2000, d_2 = 3000, d_3 = 150, z = 0.$$

To znamená, že se nic nevyrábí, obě suroviny zbývají a zisk z výroby je také nulový, což určitě není optimální řešení. Optimální řešení se určuje v simplexové tabulce podle čísel v indexním řádku. Pokud je úloha maximalizační, optimální řešení poznáme podle toho, že v indexním řádku jsou pouze nezáporná čísla. Podíváme-li se na indexní řádek výchozí tabulky, jsou v něm obsažena záporná čísla, toto výchozí řešení není optimální.

1.4.2 Přechod od jednoho základního řešení k jinému s lepší hodnotou účelové funkce

Přechod od jednoho základního řešení k jinému probíhá tak, že jedna nezákladní proměnná se změní na základní (říkáme, že vstoupí do řešení) a jedna základní proměnná se změní na nezákladní (vystoupí z řešení). Výběr vstupující proměnné je dán požadavkem, aby nová účelová funkce byla lepší než stávající. Vystupující proměnná je určena na základě požadavku, aby nové řešení zůstalo přípustné, tj. nezáporné. Popsaný přechod od jednoho základního řešení k jinému ilustrujeme na výchozím řešení příkladu 1. Při nulových hodnotách strukturních proměnných x_1, x_2 je hodnota účelové funkce také nulová a je zřejmé, že by se zvýšila při kladné hodnotě aspoň jedné z těchto proměnných. Přednost dáme proměnné x_1, která má v účelové funkci větší koeficient. Zvolíme tedy $x_1 = h > 0$ a vzhledem k požadavku maximalizace účelové funkce usilujeme o co největší hodnotu h. Její maximum je omezeno požadavkem nezápornosti nového řešení, ve kterém budou mít jednotlivé proměnné tyto hodnoty: $x_1 = h$; $x_2 = 0$; $d_1 = 2000-20h$; $d_2 = 3000$; $d_3 = 150 - h$. Musí tedy platit $2000 - 20h \geq 0; 150 - h \geq 0$.
Řešením první podmínky je

$$h \leq \frac{2000}{20} = 100,$$

druhá podmínka je splněna pro

$$h \leq \frac{150}{1} = 150.$$

Obě podmínky platí pro $h \leq 100$. Protože usilujeme o co možná největší hodnotu h, zvolíme $h = 100$, čímž se stane nulovou proměnná d_1, což je řešením první omezující podmínky (zjistíte dosazením do omezujících podmínek).

Kritérium, zda již bylo dosaženo optimální hodnoty účelové funkce, lze snadno odvodit po zápisu matematického modelu dané úlohy do tzv. simplexové tabulky.

Simplexová tabulka - přechod k jinému řešení

Výše popsaný přechod od výchozího základního řešení k jinému základnímu řešení s větší hodnotou účelové funkce probíhá v simplexové tabulce takto:

- Do řešení vstoupí proměnná, která má v indexním řádku nejnižší záporné číslo (nejnižší záporný koeficient), které zaručuje maximální zvýšení hodnoty účelové funkce spojené se zařazením jedné jednotky této proměnné do řešení. Kromě zmíněného koeficientu velikost zvýšení účelové funkce ovlivňuje počet jednotek uvažované proměnné, které lze do řešení zařadit. To znamená, že podle uvedeného kritéria nemusíme vždy zařadit proměnnou, která zaručí největší zvýšení účelové funkce a může se stát, že v dalších krocích tato proměnná zase ze řešení vystoupí. Pokud je proměnných se stejným záporným koeficientem v indexním řádku více, vybereme libovolně jednu z nich jako zařazovanou proměnnou. Sloupec zařazované proměnné budeme nazývat **klíčovým sloupcem**.

- Ze řešení (z báze) vystoupí proměnná, která má nejnižší podíl pravé strany a kladných koeficientů v klíčovém sloupci. Jestliže toto pravidlo porušíme, ve sloupci **b** se objeví záporné číslo, tzn. některá ze základních proměnných bude záporná (nepřípustné řešení). Pokud klíčový sloupec obsahuje pouze nekladná čísla, jde o zvláštní případ řešení úlohy lineárního programování, kdy zařazovaná proměnná není omezená a účelová funkce neomezeně roste, popř. klesá. Řádek vyloučené proměnné nazýváme **klíčovým řádkem**. Na průsečíku klíčového sloupce a klíčového řádku se nachází **klíčové pole**.

- Na pozici klíčového pole v dalším kroku musí být jednička a nad ním a pod ním nuly (nově zařazená proměnná do báze musí mít jednotkový vektor koeficientů, tak jako tomu bylo u bázických proměnných ve výchozím řešení). Tato transformace soustavy rovnic včetně indexního řádku se provádí pomocí Gauss Jordanovy eliminační metody.

Vycházejme z výchozího řešení uvedeného v předchozí tabulce. Vybereme nejnižší číslo v indexním řádku – zde je to číslo -8. Sloupec s tímto číslem (klíčový sloupec) náleží zařazované proměnné do báze. Nyní spočítáme pro každý řádek podíl pravé strany a kladného koeficientu v klíčovém sloupci, jak je uvedeno v textu výše. Nejnižší podíl odpovídá prvnímu řádku (klíčovému řádku) - proměnná d_1 bude vyřazovanou proměnnou z báze. Na průsečíku klíčového sloupce a klíčového řádku leží klíčové pole s koeficientem 20. Na stejnou pozici v dalším kroku simplexového algoritmu potřebujeme dostat jedničku. Dosáhneme toho tak, že celý řádek vydělíme číslem 20. Výsledky zapisujeme do prvního řádku prvního kroku. Pod klíčové pole potřebujeme dostat nuly. Ve druhém řádku v nultém kroku nula již je, proto celý řádek můžeme opsat (výsledky píšeme do druhého řádku prvního kroku). Ve třetím řádku je koeficient jedna - my potřebujeme nulu. Proto od celého tohoto třetího řádku v nultém kroku odečteme celý upravený klíčový řádek zapsaný v prvním řádku prvního kroku. Výsledky píšeme do třetího řádku prvního kroku. Nulu potřebujeme získat též místo koeficientu -8 v nultém kroku. Toto provedeme tak, že nejprve vynásobíme upravený klíčový řádek (první řádek v prvním kroku) číslem 8 a potom tento vynásobený řádek sečteme s indexním řádkem v nultém kroku a výsledky zapisujeme do indexního řádku v prvním kroku. Výsledky úlohy po prvním kroku vyčteme z tabulky stejně jako v nultém kroku. V bázi jsou tentokrát proměnné x_1, d_2, d_3, jejich hodnoty čteme ve sloupci **b**. Ostatní proměnné mají nulové hodnoty. Nové základní řešení bude tedy představovat vektor $(100, 0, 0, 3000, 50)$ a odpovídající hodnota účelové funkce bude 800 – viz tabulka 1.2. Řešení úlohy ještě není optimální, neboť indexní řádek obsahuje záporné číslo. Výsledky lze ještě zlepšit, to znamená budeme pokračovat stejným způsobem, jako doposud, dokud nezískáme řešení, které splňuje kritérium optimality. Celá tabulka má pak tvar – viz tabulka 1.3. Řešení získané ve druhém kroku je již optimální - indexní řádek neobsahuje žádné záporné číslo. Optimální řešení představuje vektor $(50, 100, 0, 0, 100)$ a odpovídající hodnota účelové funkce bude 1000.

Tabulka 1.2: Simplexová tabulka – příklad 1 – první krok

Báze	x_1	x_2	d_1	d_2	d_3	**b**	Krok
d_1	**20**	10	1	0	0	2000	**0. krok**
d_2	0	30	0	1	0	3000	
d_3	1	0	0	0	1	150	
z	-8	-6	0	0	0	0	
x_1	1	1/2	1/20	0	0	100	**1. krok**
d_2	0	**30**	0	1	0	3000	
d_3	0	-1/2	-1/20	0	1	50	
z	0	-2	2/5	0	0	800	

Tabulka 1.3: Simplexová tabulka komplet – příklad 1

Báze	x_1	x_2	d_1	d_2	d_3	**b**	Krok
d_1	**20**	10	1	0	0	2000	**0. krok**
d_2	0	30	0	1	0	3000	
d_3	1	0	0	0	1	150	
z	-8	-6	0	0	0	0	
x_1	1	1/2	1/20	0	0	100	**1. krok**
d_2	0	**30**	0	1	0	3000	
d_3	0	-1/2	-1/20	0	1	50	
z	0	-2	2/5	0	0	800	
x_1	1	0	1/20	-1/60	0	50	**2. krok**
x_2	0	1	0	1/30	0	100	
d_3	0	0	-1/20	1/60	1	100	
z	0	0	2/5	1/15	0	1000	

Poznámka. Všimněte si grafického řešení tohoto příkladu na obrázku 1.4 na straně 26. Jedno základní přípustné řešení (bod A) představuje výchozí přípustné řešení v nultém kroku simplexové tabulky. Další základní přípustné řešení (bod B) představuje řešení v prvním kroku simplexové tabulky a základní přípustné řešení v bodě C představuje řešení ve druhém kroku simplexové tabulky. Simplexový algoritmus postupně prochází základní přípustná řešení a hledá mezi nimi řešení optimální.

1.4.3 Řešení minimalizačních úloh

Minimalizační úlohy rovněž řešíme simplexovou metodou následujícím způsobem:

- Stanovíme výchozí základní přípustné řešení.
- Ověříme, zda je toto řešení optimální. Optimální je řešení tehdy, když indexní řádek obsahuje pouze nekladná čísla.
- Pokud řešení není optimální, v dalším kroku přejdeme k jinému základnímu přípustnému řešení. Aby se v dalším kroku hodnota účelové funkce co nejvíce snížila, do řešení vstoupí proměnná, která má v indexním řádku největší kladné číslo. Vyřazovaná proměnná se určuje stejně, jako u maximalizačních úloh.

Poznámka. Pokud by, stejně jako v příkladu 1, byla všechna omezení typu $\leq$, a úloha byla minimalizační, výchozí řešení by bylo zároveň řešením optimálním.

Pokud se v soustavě omezujících podmínek vyskytují i omezení typu = a $\geq$, výše popsaný simplexový algoritmus, tzv. **jednofázový** nelze použít. Úlohy se řeší tzv. **dvoufázovou simplexovou metodou**.

1.5 Dvoufázová simplexová metoda

Dvoufázovou simplexovou metodu můžeme, jak již bylo zmíněno, uplatnit při řešení úloh lineárního programování, které mají některá omezení zadaná jako nerovnice typu $\geq$ nebo rovnice. V tomto případě po vyjádření všech vlastních omezení ve tvaru rovnic je nutné pro získání kanonického tvaru soustavy vlastních omezení zavést ještě tzv. umělé (pomocné) proměnné. Postup budeme ilustrovat na příkladu 3.

1.5.1 Stanovení výchozího základního přípustného řešení

Stejně jako u maximalizačních úloh, i zde musíme nejprve převést soustavu omezujících podmínek na rovnice, a poté do kanonického tvaru. V příkladu 3 jsou dvě omezující podmínky dány nerovnicemi typu $\geq$, takže jejich převedení na rovnice spočívá v odečtení nezáporných přídatných proměnných od jejich levých stran. Tyto proměnné lze věcně interpretovat jako překročení příslušné dolní hranice. Po zavedení přičítané přídatné proměnné d_1, značící počet nerozřezaných dvoumetrových tyčí, a dvou odečítaných přídatných proměnných d_2 a d_3, značících počet tyčí délky 50 cm a 80 cm nad jejich minimálně požadované množství, získáme soustavu rovnic tvaru

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + d_1 &= 35 \\ 2x_1 + 4x_2 - d_2 &= 52 \\ x_1 - d_3 &= 18. \end{aligned}$$

Uvedená soustava není v kanonickém tvaru, neboť 2. a 3. rovnice neobsahuje neznámou s jednotkovým vektorem koeficientů (vynásobení těchto rovnic číslem -1 nelze provést, neboť na pravých stranách soustavy omezujících podmínek musí být nezáporná čísla). Proto musíme k levým stranám rovnic s odečítanými přídatnými proměnnými přičíst ještě tzv. umělé proměnné s jednotkovými vektory koeficientů. Podobně jako přídatné proměnné i umělé proměnné musí být nezáporné, ale na rozdíl od přídatných proměnných nemají žádnou věcnou interpretaci. Řešenou úlohu rozšíříme o umělé proměnné u_1 a u_2, takže soustava omezujících podmínek bude tvaru

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + d_1 &= 35 \\ 2x_1 + 4x_2 - d_2 + u_1 &= 52 \\ x_1 - d_3 + u_2 &= 18. \end{aligned}$$

Jestliže za základní neznámé zvolíme proměnné d_1, u_1, u_2, po volbě nulových hodnot zbývajících neznámých x_1, x_2, d_2, d_3 získáme vektor výchozího základního řešení tvaru (0,0,35,0,0,52,18).

Soustava omezení, rozšířená o umělé proměnné, je ekvivalentní s původní soustavou rovnic právě tehdy, když hodnoty všech umělých proměnných jsou rovny nule. Vynulování umělých proměnných lze dosáhnout aplikací jednofázové simplexové metody s využitím prohibitivních cen umělých proměnných. Za tím účelem znevýhodníme umělé proměnné tím, že jim v účelové funkci přiřadíme tzv. prohibitivní cenu (v maximalizačních úlohách je to značné nízké záporné číslo, v minimalizačních úlohách jde naopak o značně vysoké kladné číslo). Jestliže přesto nelze nulové hodnoty některé umělé proměnné dosáhnout, daná úloha nemá řešení. Druhou možností, jak vynulovat umělé proměnné, je využít dvoufázovou simplexovou metodou, kdy v 1. fázi minimalizujeme součet umělých proměnných (tzv. pomocnou účelovou funkci) a v případě, že dosáhneme jeho nulové hodnoty, přejdeme k 2. fázi výpočtu, kdy v simplexové tabulce vynecháme sloupce umělých proměnných a řádek s pomocnou účelovou funkcí a hledáme extrém původně zadané účelové funkce. Jestliže minimální hodnota pomocné účelové funkce je kladná, znamená to, že aspoň jedna umělá proměnná má kladnou hodnotu a že tedy daná úloha nemá přípustné řešení. V tomto případě výpočet končí již po 1. fázi.

Při dvoufázové simplexové metodě vytvoříme pomocnou účelovou funkci $z = u_1 + u_2 \to \min$ a její anulovanou rovnici přidáme do výchozí simplexové tabulky pod řádek s anulovanou rovnicí původní účelové funkce $z = 20x_1 \to \min$ (viz 0. krok tabulky 1.4). Aby umělé proměnné u_1 a u_2, které jsou ve výchozím řešení základními proměnnými, měly jednotkové vektory koeficientů včetně řádku s pomocnou účelovou funkcí, před zahájením výpočtu je vyloučíme z řádku z tak, že k němu přičteme 2. a 3. řádek v nultém kroku. V 0. kroku výpočtu o zařazovaných proměnných rozhodují čísla v řádku z. Po 2. kroku simplexového algoritmu tento řádek obsahuje pouze nekladná čísla, takže bylo dosaženo minimální, a to nulové hodnoty pomocné účelové funkce a tedy i nulových hodnot obou umělých proměnných. Protože po vynechání sloupců umělých proměnných u_1 a u_2 v indexním řádku z též není žádné kladné číslo, bylo současně dosaženo minima původní účelové funkce. Optimální řešení s minimální hodnotou účelové funkce $z = 360$ je dáno vektorem (18,4,13,0,0) s následující interpretací:
Minimálního odpadu 360 cm bude dosaženo, jestliže 18 dvoumetrových tyčí se rozřeže podle 1. řezné varianty a 4 tyče podle 2. varianty, takže zbude 13 nerozřezaných tyčí ($d_1 = 13$). Počet získaných tyčí délky 50 cm a 80 cm bude na jejich dolní požadované hranici ($d_2 = d_3 = 0$), viz tabulka 1.4.

Tabulka 1.4: Simplexová tabulka komplet – příklad 3

Báze	x_1	x_2	d_1	d_2	d_3	u_1	u_2	**b**	Krok
d_1	1	1	1	0	0	0	0	35	**0. krok**
u_1	2	4	0	-1	0	1	0	52	
u_2	1	0	0	0	-1	0	1	18	
z	-20	0	0	0	0	0	0	0	
z‘	0	0	0	0	0	-1	-1	0	
upravený z	3	4	0	-1	-1	0	0	70	
d_1	1/2	0	1	1/4	0	-1/4	0	22	**1. krok**
x_2	1/2	1	0	-1/4	0	1/4	0	13	
u_2	1	0	0	0	-1	0	1	18	
z	-20	0	0	0	0	0	0	0	
z‘	1	0	0	0	-1	-1	0	18	
d_1	0	0	1	1/4	1/2	-1/4	-1/2	13	**2. krok**
x_2	0	1	0	-1/4	1/2	1/4	-1/2	4	
x_1	1	0	0	0	-1	0	1	18	
z	0	0	0	0	-20	0	20	360	
z‘	0	0	0	0	0	-1	-1	0	

1.6 Zvláštní případy úloh LP v simplexové tabulce

Úloha má nekonečně mnoho rovnocenných řešení

Zvláštní případ řešení úlohy lineárního programování nastává, jestliže indexní číslo některé nezákladní proměnné ve výsledné simplexové tabulce je nulové. Jak vyplývá z ekonomické interpretace indexních čísel, zařazením této proměnné do řešení se optimální hodnota účelové funkce nezmění, neboli dostaneme rovnocenné (alternativní) optimální řešení. Libovolná konvexní kombinace těchto řešení představuje též optimální řešení, avšak už ne základní. Tuto vlastnost má výsledná simplexová tabulka 1.4 v poslední části, ze které vyplývá, že zařazením proměnné d_2 na místo d_1 vznikne rovnocenné základní optimální řešení se stejnou hodnotou účelové funkce $z = 360$ – viz tabulka 1.5. Toto řešení již bylo odvozeno graficky a znamená rozřezání 18 tyčí podle 1. varianty a 17 podle 2. varianty, takže nezbude žádná dvoumetrová tyč ($d_1 = 0$). Při tomto způsobu řezání bude získáno 52 tyčí délky 50 cm nad jejich požadovaný počet ($d_2 = 52$), zatímco počet tyčí délky 80 cm bude na jejich dolní požadované hranici ($d_3 = 0$). Kolik kterých tyčí bude nařezáno zjistíme tak, že výsledky dosadíme do omezujících podmínek příkladu 3 na straně 12. Libovolná celočíselná konvexní kombinace obou vektorů řešení, tj.

Tabulka 1.5: Simplexová tabulka komplet – příklad 3 – jiné optimální řešení

Báze	x_1	x_2	d_1	d_2	d_3	**b**
d_2	0	0	4	1	2	52
x_2	0	1	1	0	1	17
x_1	1	0	0	0	-1	18
z	0	0	0	0	-20	360

vektorů (18,4,13,0,0) a (18,17,0,52,0) představuje též rovnocenné optimální řešení. Např. vektor $\mathbf{x} = 9/13(18, 4, 13, 0, 0) + 4/13(18, 17, 0, 52, 0) = (18, 8, 9, 16, 0)$ je též optimální řešení, ale už ne základní.

Úloha nemá přípustné řešení

Jak již bylo uvedeno, tento případ nastává v úlohách s umělými proměnnými tehdy, když nelze dosáhnout nulové hodnoty všech umělých proměnných. Tuto vlastnost má úloha o výživovém doplňku, příklad 2 na straně 12. Pro jednoduchost zredukujeme soustavu vlastních omezujících podmínek na tyto tři:

- pro sacharidy
$$6x_1 + 80x_2 \leq 90$$
- pro tuk
$$0{,}1x_1 + 1{,}5x_2 = 1{,}2$$
- pro vápník
$$160x_1 \geq 2000$$

Soustavu omezujících podmínek převedeme na soustavu rovnic v kanonickém tvaru pomocí přičítané přídatné proměnné d_1 značící nevyužitou horní hranici pro sacharidy (v g), odečítané přídatné proměnné d_2 značící nadlimitní množství vápníku (v mg) a umělých proměnných u_1 a u_2 zařazených do 2. a 3. rovnice. Získaná soustava rovnic tvaru

$$\begin{aligned} 6x_1 + 80x_2 + d_1 &= 90 \\ 0{,}1x_1 + 1{,}5x_2 + u_1 &= 1{,}2 \\ 160x_1 - d_2 + u_2 &= 2000. \end{aligned}$$

je zapsána v 0. kroku tabulky 1.6. Úlohu budeme řešit dvoufázovou simplexovou metodou. K původní účelové funkci $z = 4x_1 + 10x_2 \to \min$ přidáme pomocnou účelovou funkci $z' = u_1 + u_2 \to \min$. Anulované rovnice těchto funkcí jsou též zapsány v 0. kroku tab. 1.6, ve které je ještě nutné vyloučit z řádku z' proměnné u_1 a u_2, a to přičtením 2. a 3. řádku v 0. kroku. Výpočet je patrný z dalších částí tab. 1.6. Po 1. kroku simplexového algoritmu byla získána optimální hodnota pomocné účelové funkce (všechna čísla v řádku z' jsou nekladná), ale nikoli nulová. Nelze tedy dosáhnout nulových hodnot obou umělých proměnných a daná úloha nemá přípustné řešení (stala by se řešitelnou např. po vynechání požadavku na obsah vápníku tak, jak bylo ukázáno při grafickém řešení tohoto problému). Z výpočetních důvodů je výhodné v každém kroku 1. fáze dvoufázové simplexové metody spočítat nejprve čísla v řádku z‘ a po zjištění, že minimální hodnota pomocné účelové funkce není nulová, další údaje v simplexové tabulce již nepočítat.

Tabulka 1.6: Simplexová tabulka – úloha nemá přípustné řešení

Báze	x_1	x_2	d_1	d_2	u_1	u_2	**b**	Krok
d_1	6	80	1	0	0	0	90	**0. krok**
u_1	0,1	1,5	0		1	0	1,2	
u_2	160	0	0	-1	0	1	2000	
z	-4	-10	0	0	0	0	0	
z‘	0	0	0	0	-1	-1	0	
upravený z	160,1	1,5	0	-1	0	0	2001,2	
d_1								**1. krok**
x_1	1	15	0	0	10	0	12	
u_2								
z								
z‘	0	-2400	0	-1	-1601	0	80	

Hodnota účelové funkce je neomezená

Tento případ nastane tehdy, když v klíčovém sloupci jsou pouze nekladná čísla. Tuto vlastnost má řešený příklad 1.1 na straně 28 o výrobě dvou výrobků, graficky řešená na obrázku 1.7 na straně 29. Soustavu vlastních omezujících podmínek převedeme na soustavu rovnic v kanonickém tvaru pomocí odečítané přídatné proměnné d_1, značící tržby nad jejich požadovanou dolní hranici (v tis. Kč), přičítané přídatné proměnné d_2, značící nevyužitý horní limit pro počet výrobků V2, a umělé proměnné u_1 zařazené do 1. rovnice. Soustava rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - d_1 + u_1 &= 30 \\ x_2 + d_2 &= 6 \end{aligned}$$

spolu s anulovanou rovnicí účelové funkce $z = x_1 + x_2 \to \max$ a pomocnou účelovou funkcí $z‘ = u_1 \to \min$ je zapsána v 0. kroku tabulky 1.7. Jak vyplývá z dalších částí této tabulky, po 2. kroku simplexového algoritmu bylo dosaženo nulové hodnoty umělé proměnné u_1 a výpočet pokračoval bez sloupce této proměnné a řádku z‘. V dalším kroku ještě nebyl splněn test optima pro původní účelovou funkci, ale sloupec zařazované proměnné d_1 obsahuje pouze nekladná čísla. Tuto proměnnou lze tedy zařadit do řešení v neomezené velikosti a tím i proměnná x_1 a odpovídající hodnota účelové funkce může být neomezeně velká.

Tabulka 1.7: Simplexová tabulka komplet – hodnota účelové funkce je neomezená

Báze	x_1	x_2	d_1	d_2	u_1	**b**	Krok
u_1	3	4	-1	0	1	30	**0. krok**
d_2	0	1	0	1	0	6	
z	-1	-1	0	0	0	0	
z‘	0	0	0	0	-1	0	
upravený z	3	4	-1	0	0	30	
u_1	3	0	-1	-4	1	6	**1. krok**
x_2	0	1	0	1	0	6	
z	-1	0	0	1	0	6	
z‘	3	0	-1	-4	0	6	
x_1	1	0	-1/3	-4/3	1/3	2	**2. krok**
x_2	0	1	0	1	0	6	
z	0	0	-1/3	-1/3	1/3	8	
z‘	0	0	0	0	-1	6	
x_1	1	4/3	-1/3	0		10	**3. krok**
d_2	0	1	0	1		6	
z	0	1/3	-1/3	0		10	

Degenerované řešení

Degenerované řešení, ve kterém některá základní proměnná je nulová, se v simplexové tabulce pozná podle toho, že sloupec **b** obsahuje nulu (mimo indexní řádek). K tomuto jevu může dojít hned ve výchozím řešení, jestliže na pravé straně některé omezující podmínky je nula (tohoto typu je např. úloha o optimálním výrobním programu nábytkářské firmy). V průběhu simplexového algoritmu dochází k degeneraci tehdy, když nelze jednoznačně určit vyloučenou proměnnou. Ukázkou je příklad řešený v tabulce 1.8 s tímto zadáním:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 10 \\ 5x_1 + 8x_2 &\leq 80 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ 5x_1 + 9x_2 &\rightarrow \max \end{aligned}$$

Při určování proměnné, kterou v 1. kroku simplexového algoritmu nahradí proměnná x_2, vycházejí stejné podíly 10/1 a 80/8, neboli z řešení může vystoupit proměnná d_1 nebo d_2. Jestliže se rozhodneme např. pro proměnnou d_1, základní proměnná d_2 bude v dalším kroku nulová.

Tabulka 1.8: Simplexová tabulka – degenerované řešení

Báze	x_1	x_2	d_1	d_2	**b**
d_1	1	1	1	0	10
d_2	5	8	0	1	80
z	-5	-9	0	0	0
x_2	1	1	1	0	10
d_2	-3	0	-8	1	0
z	4	0	9	0	90

1.6.1 Rozbor výsledné simplexové tabulky

Podle zadání příkladu 1 na straně 11 je optimální vyrábět 50 kusů cukrovinek s marcipánem a 100 kusů cukrovinek s marcipánem a oříšky. Tržby při této struktuře výroby budou 1000 Kč. Obě klíčové suroviny (marcipán i oříšky) budou spotřebovány. Rezervu 100 kusů máme ve třetím omezení (prodá se maximálně 150 kusů cukrovinky A, my vyrábíme pouze 50 kusů, prodalo by se více, ale vyrábět více nemůžeme, neboť nejsou k dispozici marcipán a oříšky). Čísla v indexním řádku mají také svou interpretaci. Ta, která jsou ve sloupci strukturních proměnných se nazývají **redukované náklady**, ta, která jsou ve sloupci přídatných (doplňkových) proměnných se nazývají **stínové (duální) ceny**.

- Redukované náklady nám říkají, o kolik by se zhoršila hodnota účelové funkce, pokud by se příslušná nebázická proměnná zařadila do báze (myslíme tím jednu jednotku této proměnné). Druhá možnost interpretace je, že nám redukovaný náklad udává minimální nutné navýšení ceny proměnné v účelové funkci, aby se tato proměnná dostala do optimální báze. V našem příkladu obě strukturní proměnné v bázi jsou, proto je redukovaný náklad u obou nulový.

- Stínová cena nám udává změnu v hodnotě účelové funkce při jednotkové změně pravé strany omezující podmínky. Prozatím předpokládejme, že uvažované změny jsou v rámci tzv. intervalu stability (podrobněji probereme později). Stínová cena se vyskytuje ve sloupci přídatné (doplňkové) proměnné - každá omezující podmínka má svou doplňkovou proměnnou. V našem příkladu je například ve sloupci první doplňkové proměnné v indexním řádku číslo 2/5. (Připomeňte si, že doplňková proměnná d_1 byla přidána k první omezující podmínce pro její vyrovnání na rovnici.) Pokud by se původní pravá strana omezující první omezující podmínky zvýšila (snížila o jednotku, tedy pokud by bylo k dispozici 2001 g (1999 g), hodnota účelové funkce by se zvýšila (snížila) o 0,4 Kč (o 2/5). Pokud by se disponibilní množství marcipánu navýšilo o 100 g, potom by hodnota účelové funkce (tržby) vzrostla o 40 Kč (100*0,04). Stejně tak kdyby se disponibilní množství marcipánu snížilo o 100 g, hodnota účelové funkce by se snížila o 40 Kč. Číslo 1/15 pod druhou doplňkovou proměnnou - vztah k druhé omezující podmínce má stejnou interpretaci. Pod třetí doplňkovou proměnnou je nula - třetí doplková proměnná je v bázi. Obecně vždy, když je příslušná proměnná v bázi, je v indexním řádku pod touto proměnnou nula.

Poznámka. Stejně jako můžeme určit změnu v hodnotě účelové funkce při změně pravé strany omezující podmínky pomocí čísel v indexním řádku, můžeme určit i hodnotu jednotlivých bázických proměnných při takové změně. Například pokud navýšíme disponibilní množství marcipánu o 100 g, hodnota účelové funkce vzroste o 40 Kč, množství vyráběné cukrovinky A vzroste o 5 kusů (100*1/20), tedy na 55 kusů, množství vyráběné cukrovinky B se nezmění a rezerva ve třetí omezující podmínce se sníží o 5 kusů (100*(-1/20)), tedy do horní hranici denního limitu prodeje chybí už jen 95 kusů.

Pro možnost rozsáhlejší ekonomické interpretace příklad 1 nevyhovuje, proto ho rozšíříme.

Řešený příklad 1.2. *Majitel cukrárny z příkladu 1 uvažuje o rozšíření výroby o cukrovinku C, která v jednom kusu obsahuje* 8 *g marcipánu a* 15 *g oříšků a jehož cena je vykalkulovaná na* 4 *Kč za kus. Na rozdíl od příkladu 1 není prodej cukrovinky A limitován.*

Řešení. V matematickém modelu přibude proměnná x_3, která představuje počet vyrobených cukrovinek C a proměnné d_1 a d_2 budou značit nevyužité množství oříšků v gramech. Tento model je zapsán v nultém kroku simplexové tabulky. V simplexové tabulce ve dvou krocích dospějeme k optimálnímu řešení.

Z poslední části tabulky, kde řešení je již optimální, zjistíme optimální strukturu výroby a výši tržeb. Výroba cukrovinek C se nevyplácí, není z hlediska tržeb výhodná, proměnná x_3 není

Tabulka 1.9: Simplexová tabulka – upravený příklad 1

Báze	x_1	x_2	x_3	d_1	d_2	**b**	Krok
d_1	**20**	10	8	1	0	2000	**0. krok**
d_2	0	30	15	0	1	3000	
z	-8	-6	-4	0	0	0	
x_1	1	1/2	2/5	1/20	0	100	**1. krok**
d_2	0	30	15	0	1	3000	
z	0	-2	-4/5	2/5	0	800	
x_1	1	0	3/20	1/20	-1/60	50	**2. krok**
x_2	0	1	1/2	0	1/30	100	
z	0	0	1/5	2/5	1/15	1000	
	Redukované náklady			**Stínové ceny**			

v bázi. V indexním řádku nalezneme (ve sloupci proměnné x_3) číslo 1/5. Jedná se o redukovaný náklad, který udává, že pokud bychom se rozhodli vyrábět jeden kus cukrovinky C, hodnota účelové funkce by se snížila o hodnotu 0,2 Kč (1/5). Pokud bychom vyráběli 10 kusů této cukrovinky, hodnota účelové funkce by se snížila o 10*0,2, tedy o 2 Kč. Druhý způsob interpretace redukovaných nákladů nám říká, že pokud bychom navýšili jednotkovou cenu cukrovinky C o minimálně 0,2 Kč, začala by se nám výroba této cukrovinky vyplácet - proměnná x_3 by se buď dostala do báze, nebo by v bázi nebyla, ale její redukovaný náklad by byl nulový. V indexním řádku by se pod nebázickou proměnnou vyskytla nula, což ukazuje na existenci ještě jiného optimálního řešení.

Poznámka. Zvláštní případ řešení úlohy lineárního programování nastává, jestliže indexní číslo některé nezákladní proměnné ve výsledné simplexové tabulce je nulové. Jak vyplývá z ekonomické interpretace indexních čísel, zařazením této proměnné do řešení se optimální hodnota účelové funkce nezmění, neboli dostaneme rovnocenné (alternativní) základní optimální řešení. Libovolná konvexní kombinace těchto řešení představuje též optimální řešení, avšak už ne základní.

1.6.2 Řešení pomocí SW

Pro řešení úloh lineárního programování lze použít různý software. Každý software má jiný způsob zadávání vstupních dat, i jinak uspořádané výsledky. V příloze A je popsána práce se Solverem (Řešitelem). V této podkapitole se zaměříme pouze na výsledky řešeného příkladu 1.2 ze strany 41 poskytované softwarem.

Výsledky získané Solverem

Výsledky získané pomocí Solveru jsou v tzv. Výsledkové zprávě – viz obrázek 1.8. V první tabulce je hodnota účelové funkce, v druhé tabulce jsou hodnoty proměnných a ve třetí tabulce jsou hodnoty doplňkových proměnných. Hodnota účelové funkce – v našem případě tržby – je 1000 Kč při výrobě 50 ks cukrovinky A a 100 kusů cukrovinky B. Žádná surovina nezbývá. Redukované (snížené) náklady a stínové ceny jsou v tzv. Citlivostní zprávě – viz obrázek 1.9. Z výsledků je patrné, že cukrovinka C se nevyplácí s původní cenou vyrábět. Redukovaný náklad pro cukrovinku C je 0,2 Kč (v citlivostní zprávě je redukovaný náklad s mínusem). Cena by se buď musela zvýšit o 0,2 Kč na jeden kus této cukrovinky, nebo by (při původní ceně) s každým vyrobeným kusem této cukrovinky klesly tržby o 0,2 Kč. Stínové ceny jsou pro obě suroviny ve druhé tabulce citlivostní zprávy. Například pro marcipán je stínová cena 0,4 Kč, což znamená, že rozšíření disponibilního množství marcipánu o 1 g by způsobilo nárůst účelové funkce o 0,4 Kč. Při interpretaci stínových cen a redukovaných nákladů předpokládáme, že změny by byly v rámci

Microsoft Excel 11.0 Výsledková zpráva
List: [Sešit1]List1
Zpráva vytvořena: 26.11.2008 13:53:43

Nastavovaná buňka (Max)

Buňka	Název	Původní hodnota	Konečná hodnota
$G$4	LS	0	1000

Měněné buňky

Buňka	Název	Původní hodnota	Konečná hodnota
$B$6	cukr A	0	50
$C$6	cukr B	0	100
$D$6	cukr C	0	0

Omezující podmínky

Buňka	Název	Hodnota buňky	Vzorec	Stav	Odchylka
$G$2	marcipan LS	2000	$G$2<=$F$2	Platí	0
$G$3	orechy LS	3000	$G$3<=$F$3	Platí	0

Obrázek 1.8: Výsledková zpráva k příkladu 1.2 – Solver

intervalů stability (bude vysvětleno v další části).

Microsoft Excel 11.0 Citlivostní zpráva
List: [Sešit1]List1
Zpráva vytvořena: 26.11.2008 13:53:43

Měněné buňky

Buňka	Název	Konečná hodnota	Snížené náklady	Cílový koeficient	Povolený nárůst	Povolený pokles
$B$6	cukr A	50	0	8	4	1,333333333
$C$6	cukr B	100	0	6	1E+30	0,4
$D$6	cukr C	0	-0,2	4	0,2	1E+30

Omezující podmínky

Buňka	Název	Konečná hodnota	Stínová cena	Omezující podmínka Pravá strana	Povolený nárůst	Povolený pokles
$G$2	marcipan LS	2000	0,4	2000	1E+30	1000
$G$3	orechy LS	3000	0,066666667	3000	3000	3000

Obrázek 1.9: Citlivostní zpráva k příkladu 1.2 – Solver

Výsledky získané pomocí doplňku LINKOSA

Výsledky získané pomocí modulu LINKOSA jsou na samostatném excelovském listě – viz obrázek 1.10. Pokud bychom chtěli i konečnou část simplexové tabulky (včetně redukovaných nákladů a stínových cen), nalezneme ji opět na zvláštním listě jako transformovanou matici strukturních koeficientů – viz obrázek 1.10. Jsou zde vynechány sloupce bázických proměnných, které obsahují jednotkové vektory.

Optimální řešení modelu Cukrovinky

Maximální hodnota účelové funkce tržby

1000

Strukturní proměnné

Název	Hodnota	Typ
cukr A	50	bázická
cukr B	100	bázická
cukr C	0	dolní mez

Omezení

Název	Hodnota	Rezerva
R-marcipá	2000	0
R-ořechy	3000	0

Matice transformovaných vektorů (vektory ALFA(J))

Báze	Hodnota	cukr C	R-marcipá	R-ořechy
cukr A	50	0,15	0,05	-0,01667
cukr B	100	0,5	0	0,033333
tržby	1000	0,2	0,4	0,066667

Obrázek 1.10: Výsledky k příkladu 1.2 – Linkosa

Příklad 6. Přestože výroba cukrovinek C není optimální, rozhodli jsme se vyhovět požadavku jednoho odběratele a vyrobit 100 *kusů této cukrovinky. Z výsledné simplexové tabulky (viz obrázek 1.10) zjistíme, jak se změní hodnota účelové funkce a hodnoty bázických proměnných. Účelová funkce se sníží o* $0{,}2 * 100$ *(redukovaný náklad krát počet vyráběných jednotek), tj. o* 20 *Kč. Zařazení cukrovinek C do výroby se projeví i v počtu vyráběných cukrovinek A a B. Počet vyráběných cukrovinek A se sníží o* $0{,}15 * 100$*, tj. o* 15 *kusů. (Číslo* 0,15 *nalezneme ve výsledné tabulce nad redukovanými náklady). Sníží se rovněž počet vyráběných cukrovinek B, a to o* $0{,}5 * 100$*, tedy o* 50 *kusů. Aby výrobek C byl rentabilní, tržby z něj by se měly zvýšit o* 0,2 *Kč za kus.*

Příklad 7. Zvýšené disponibilní množství marcipánu o 100 *g se projeví zvýšením hodnoty účelové funkce o* $0{,}4 * 100$ *a větším počtem vyráběných cukrovinek A o* $0{,}05 * 100$*, tzn. o* 5 *kusů. Hodnotu* 0,05 *nalezneme ve sloupci nad stínovou cenou pro marcipán. Na počtu výrobků B se větší množství marcipánu neprojeví* $(0 * 100)$.

1.6.3 Analýza citlivosti

Analýza citlivosti je rozbor citlivosti optimálního řešení na změny (stabilita optimálního řešení). Změny se mohou týkat vstupních dat (vektor požadavků, vektor cen a matice strukturních koeficientů), dále počtu proměnných a počtu omezujících podmínek. Změní se buď údaje ve výsledné simplexové tabulce při zachování optimální báze, nebo se změní i struktura optimální báze.

Změna vektoru požadavků

Jakákoliv změna ve vektoru požadavků se projeví v hodnotách základních proměnných a v hodnotě účelové funkce. Musíme rozlišovat změnu v tzv. intervalu stability a změnu mimo tento interval. V rámci tohoto textu nebude výpočet těchto intervalů odvozován. V případě zájmu je možné toto odvození nalézt například v publikaci [5]. My se soustředíme pouze na intepretaci výsledků získaných pomocí SW.

Výsledky získané pomocí Solveru

Intervaly stability vektoru pravých stran omezujících podmínek pro řešený příklad 1.2 ze strany 41 nalezneme v Citlivostní zprávě – viz obrázek 1.9. Ve druhé tabulce nadepsané Omezující podmínky nalezneme údaje povolený pokles a povolený nárůst pro obě omezující podmínky. Jsou to údaje, které nám říkají, o kolik maximálně můžeme navýšit nebo snížit hodnoty pravé strany jedné omezující podmínky, aby řešení (struktura báze) zůstalo pořád stejné. Změní se pouze hodnoty bázických proměnných a účelové funkce. V rámci intervalu stability se hodnoty mění tak, jak bylo uvedeno při intepretaci stínových cen.

Poznámka. Vždy uvažujeme změnu pouze u pravé strany jedné omezující podmínky.

Příklad 8. *V příkladu 1.2 je disponibilní množství marcipánu* 2000 *g. Povolený pokles je* 1000 *g a povolený nárůst není omezen. To znamená, že interval stability pro marcipán je od* 1000 *g do nekonečna. Pokud se změny v disponibilním množství budou pohybovat v tomto intervalu, nezmění se struktura báze, budou se vyplácet vyrábět cukrovinky A a B, žádná surovina nezbyde. Budeme vycházet ze stínové ceny pro marcipán –* 0,4 *Kč.*

- *změna v rámci intervalu*
  Jestliže disponibilní množství marcipánu bude pouze 1500 *g (disponibilní množství ořechů zůstává stejné), změna je v rámci intervalu stability. Disponibilní množství je nižší o* 500 *g proti původnímu, tzn. hodnota účelové funkce se sníží o* $500 * 0{,}4$*, tj. o* 200 *Kč. Pokud by naopak disponibilní množství vzrostlo o* 500 *g, změna opět v rámci intervalu stability (vše ostatní nezměněno), hodnota účelové funkce vzroste o* 200 *Kč.*

- *změna mimo interval stability*
  V případě, že by disponibilní množství marcipánu kleslo na 800 *g, z dosavadních výsledků nejsme schopni určit, které výrobky (a kolik) se budou vyrábět. Při změně mimo interval dojde k tomu, že při snížení zásoby jedné suroviny přestane tato stačit na výrobu jednoho z výrobků, jiná surovina začne ve větší míře zbývat; při nárůstu zásoby jedné suroviny zase může dojít k tomu, že přestane stačit druhá surovina apod. Úlohu je pak nutné přepočítat s novými vstupními údaji.*

- *změna na hranici intervalu stability*
  Pokud disponibilní množství marcipánu je právě 1000 *g, struktura báze zůstává stejná, ale řešení je degenerované (některá bázická proměnná má nulovou hodnotu). Účelová funkce klesne o* $1000 * 0{,}4$*, tj. o* 400 *Kč.*

Poznámka. Z výsledků poskytovaných Solverem nejsme schopni vyčíst, jak se mění hodnoty bázických proměnných při změnách pravých stran (není k dispozici výsledná simplexová tabulka). Zjistíme pouze, jak se mění hodnota účelové funkce pomocí stínových cen.

Změna vektoru cen

Intervaly stability vektoru cen pro příklad 1.2 nalezneme v Citlivostní zprávě – viz obrázek 1.9. V první tabulce nadepsané Měněné buňky nalezneme údaje povolený pokles a povolený nárůst. Jsou to údaje, které nám říkají, o kolik maximálně můžeme snížit nebo zvýšit ceny jednotlivých výrobků, aby se nezměnila struktura báze. Musíme odlišit dva případy:

- **změna cen nezákladních proměnných**

  Příklad 9. *Cukrovinka C se nevyplatí za cenu* 4 *Kč vyrábět (prodávat). Povolený nárůst je* 0,2 *a povolený pokles není omezen. Aby úloha měla smysl, povolený pokles bude maximálně* 4 *Kč, abychom neuvažovali zápornou cenu. To znamená, že interval stability je od* 0 *do* 4,2 *Kč.*

- *změna ceny v rámci intervalu*
  Pokud se cena bude měnit v tomto intervalu, struktura báze se nezmění – výrobek C se stále nevyplácí vyrábět, nezmění se ani hodnota účelové funkce. Změní se pouze redukované náklady.
- *změna mimo interval*
  Pokud se cena změní mimo interval, například výrobek C se bude prodávat za 4,5 *Kč, změní se struktura báze – výrobek C se začne vyplácet vyrábět, změní se i redukované náklady, stínové ceny i hodnota účelové funkce.*
- *změna na hranici intervalu*
  Pokud cena výrobku C bude 4,2 *Kč, struktura báze se nezmění, ale bude existovat ještě jiné rovnocenné optimální řešení, ve kterém jsou výrobky C v bázi.*

• **změna cen základních proměnných**

Příklad 10. *Cukrovinka A se vyplácí vyrábět (prodávat) za cenu* 8 *Kč. Povolený nárůst je* 4 *Kč, povolený pokles je* 1,333 *Kč. To znamená že interval stability je od* 6,666 *do* 12 *Kč.*

- *změna ceny v rámci intervalu*
  Pokud se cena bude měnit v tomto intervalu, struktura báze se nezmění – výrobek A se stále vyplácí vyrábět, změní se hodnota účelové funkce, redukované náklady i stínové ceny.
- *změna mimo interval*
  Pokud se cena změní mimo interval, například výrobek A se bude prodávat za 6 *Kč, změní se struktura báze, změní se i redukované náklady, stínové ceny i hodnota účelové funkce. Jak se změní ale nejsme schopni zjistit, je nutné úlohu přepočítat.*
- *změna na hranici intervalu*
  Pokud cena výrobku A bude 12 *Kč, struktura báze se nezmění, ale bude existovat ještě jiné rovnocenné optimální řešení.*

Výsledky získané pomocí modulu LINKOSA

Na rozdíl od Solveru jsou uvedeny dolní a horní hranice intervalů stability a ne povolený nárůst a pokles pravých stran omezujících podmínek – viz obrázek 1.11.

Interpretace intervalů stability již byla zmíněna u výsledků získaných Solverem, na tomto místě se jí již nebudeme zabývat.

Analýza citlivosti vektoru pravých stran

Intervaly stability řešení

Název	Hodnota	Dol.mez	Hor.mez
R-marcipá	2000	1000	
R-ořechy	3000	0	6000

Analýza citlivosti vektoru cen

Intervaly stability řešení

Název	Hodnota	Dol.mez	Hor.mez
Cena cukr	8	6,666668	12
Cena cukr	6	5,6	
Cena cukr	4		4,2
Cena R-m	0		0,4
Cena R-oř	0		0,066667

Obrázek 1.11: Intervaly stability k příkladu 1.2 – Linkosa

Cvičení

Cvičení 1.13. Výrobce čajů má k dispozici 3 kg sušené máty a 1,5 kg sušené třezalky. Má možnost vyrábět dva druhy bylinných čajů, a to čistý mátový čaj nebo směs máty a třezalky v poměru 3:2. Byliny jsou plněny do nálevových sáčků po 10 g . Při výrobě je nutné počítat s odpadem u máty 5% a u třezalky 8%. Čistého mátového čaje prodá maximálně 100 sáčků. Zisk z jednoho sáčku čisté máty je 2 Kč a z jednoho sáčku směsi 3 Kč. Kolik sáčků každého druhu má výrobce vyrobit, aby zisk byl maximální. Sestavte matematický model a úlohy vyřešte ”ručně”.

Cvičení 1.14. Výrobce nábytku produkuje dva modely lavic (L_1 a L_2) a tři druhy židlí (Z_1, Z_2 a Z_3). Na výrobu se spotřebovávají desky a hranoly. Výroba dále vyžaduje podíl ruční práce. Na jeden pracovní den má firma k dispozici 1500 běžných metrů desek, 1500 kusů hranolů a 2100 hodin ruční práce. Spotřeba uvedených zdrojů na jednotlivé výrobky a zisk na jeden kus v Kč je v následující tabulce:

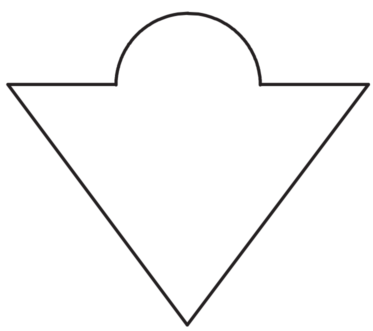
	L_1	L_2	Z_1	Z_2	Z_3
Desky (bm/ks)	4	3	1	1,5	1
Hranoly (ks/ks)	3	3	2	1	1,5
Ruční práce (hod/ks)	6	4	2	2	1,5
Zisk (Kč/ks)	500	350	120	175	110

Jaká má být struktura výroby, aby firma dosahovala maximálního zisku? Sestavte matematický model, vyřešte pomocí vhodného SW a odpovídejte na otázky (svá tvrzení zdůvodněte!!!).

1. Kolik kterých výrobků má firma vyrábět?
2. Jakého bude firma dosahovat zisku při dodržení optimální struktury výroby?
3. Který materiál bude zbývat?
4. Zvýšil by se zisk, kdyby firma měla k dispozici další desky? Pokud ano, předpokládejme dodatečné náklady, o které by se zisk na jeden metr desek snižoval. Jaké tyto dodatečné náklady mohou maximálně být, aby se firmě dodatečný nákup desek vyplatil?

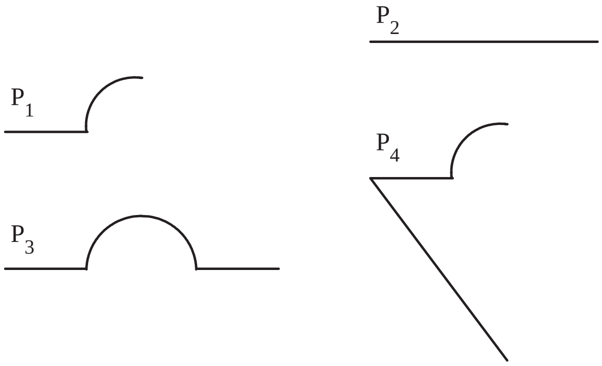
5. Kolik metrů desek by takto firma měla (mohla) dokoupit?
6. Vyplatí se dokoupit desky s dodatečnými náklady 45 Kč za metr?
7. Vyplatí se dokoupit desky s dodatečnými náklady 60 Kč?
8. Zvýšil by se zisk, kdyby firma přikoupila další hranoly?
9. Vyplatilo by se firmě propustit zaměstnance, který pracuje čtyři hodiny denně, kdyby tím ušetřila 400 Kč?
10. Kolik hodin by firma mohla kapacitu hodin snižovat, aby platila původní struktura řešení?
11. Jak se projeví změna disponibilního množství desek na 1550 metrů? Kde v tabulce tuto změnu poznáte?
12. Kolik kusů hranolů by firma mohla věnovat na jiné účely, aby se na původním řešení nic nezměnilo?
13. Která opatření by měla za následek zvýšení zisku? (Co by firma musela mít k dispozici ve větším množství?)
14. Při jakém množství desek (za jinak nezměněných podmínek) by produkce lavice 1, lavice 2 a zisk byly co největší?
15. Jaký by musel být zisk z jedné židle č. 1, aby se začala vyplácet vyrábět?
16. Co když zisk z jedné židle č. 1 bude přesně 150 Kč? Kde a jak se tato změna projeví?
17. Jak by se změnil zisk, kdyby firma vyráběla 100 kusů židlí č. 1 s původním ziskem 120 Kč za jednu židli?
18. Jak by se změnil zisk, kdyby firma vyráběla židle č. 2 se ziskem 175 Kč za jednu židli?
19. Zisk z jedné lavice č. 1 by se změnil na 480 Kč za kus. Kde se tato změna projeví?
20. S jakým minimálním ziskem by se stále vyplácela výroba lavic č. 1?

Cvičení 1.15. Podnik vyrábí formy z páskové oceli ve tvaru zakresleném na obrázku 1.12. Formy se získávají svařováním polotovarů P_1, P_2, P_3, P_4, jejichž tvary jsou zakresleny na obrázku 1.13.



Obrázek 1.12: Výrobek

Denní kapacita svářeček je 66 hodin 40 minut, přičemž každý svár spojující dva polotovary trvá 5 minut. Denně lze spotřebovat maximálně 100 kusů polotovaru P_1 a 200 kusů polotovaru P_4. Určete četnosti jednotlivých technologických postupů tak, aby počet vyrobených forem za den byl maximální.



Obrázek 1.13: Polotovary

Výsledky

Výsledky 1.13
Proměnné:
x_1 – počet sáčků čaje máta (ks),
x_2 – počet sáčků čaje směs (ks),
je u nich požadována nezápornost (celočíselnost by byla vhodná, ale vzhledem k řešení simplexovou metodou ji neuvažujeme). Model úlohy:

$$\begin{aligned} z = 2x_1 + 3x_2 &\rightarrow \max \\ 10x_1 + 6x_2 &\leq 2850 \\ 4x_2 &\leq 1380 \\ x_1 &\leq 100. \end{aligned}$$

$x_1 = 78$, $x_2 = 345$, $d_3 = 22$, $z = 1191$

Výsledky 1.14
Model úlohy:

$$\begin{aligned} z = 500x_1 + 350x_2 + 120x_3 + 175x_4 + 110x_5 &\rightarrow \max \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 1,5x_4 + x_5 &\leq 1500 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + 1,5x_5 &\leq 1500 \\ 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 1,5x_5 &\leq 2100. \end{aligned}$$

1. Lavice 1 – 150 kusů, lavice 2 – 300 kusů.
2. Zisk bude 180000 Kč.
3. Budou zbývat hranoly – 150 kusů.
4. Ano, pokud by dodatečné náklady byly menší než 50 Kč na metr.
5. Mohla by dokoupit 50 m, pokud by nakoupila více, měnilo by se struktura řešení.
6. Za 45 Kč se to vyplatí.
7. Za 60 kč se to nevyplatí.
8. Nezvýšil, hranoly zbývají.

9. Ano, vyplatilo, ve zisk z výroby by klesl o 200 Kč, úspora na zaměstnanci by byla 400 Kč.
10. O 100 hodin.
11. Změna se projeví ve výsledných hodnotách proměnných, vznikne degenerované řešení.
12. Mohla by věnovat 150 kusů hranolů (rezerva).
13. Desky a práci.
14. Při množství 1550 m.
15. Minimálně 150 Kč.
16. Projeví se v indexním řádku (změna v redukovaných nákladech), vznikne více rovnocenných řešení (hodnota účelové funkce a stínové ceny se nemění).
17. Zisk by se snížil o 3000 Kč.
18. Nezměnil by se, existuje více rovnocenných optimálních řešení.
19. Projeví se v indexním řádku, zisk se sníží o 20 Kč.
20. S minimálním ziskem 470 Kč.

Výsledky 1.15
Varianty, jak sestavit z polotovarů požadovaný výrobek, jsou obsaženy v následující tabulce:

Varianta	1	2	3	4
P_1	2	1	–	–
P_2	2	1	2	–
P_3	–	–	1	–
P_4	–	1	–	2

Proměnné:
x_1 – počet výrobků sestavených variantou 1,
x_2 – počet výrobků sestavených variantou 2,
x_3 – počet výrobků sestavených variantou 3,
x_4 – počet výrobků sestavených variantou 4,
je u nich požadována nezápornost (podmínka celočíselnosti by byla vhodná, ale vzhledem k řešení simplexovou metodou ji nebudeme uvažovat).
Model úlohy:

$$\begin{aligned} z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\quad\rightarrow\quad \max \\ 20x_1 + 15x_2 + 15x_3 + 10x_4 &\quad\leq\quad 4000 \\ 2x_1 + x_2 &\quad\leq\quad 100 \\ x_2 + 2x_4 &\quad\leq\quad 200. \end{aligned}$$

Maximální počet forem za den bude získán tak, že 200 forem bude vyrobeno svářením dvou polotovarů P_2 a jednoho polotovaru P_3 a 100 forem svářením dvou polotovarů P_4.

1.7 Dualita v úlohách LP

1.7.1 Formulace duálních úloh

Ke každé úloze lineárního programování můžeme z týchž vstupních dat formulovat úlohu duální, která je k původní, primární úloze, v jednoznačném – na první pohled pouze formálním – vztahu. Mezi duálně sdruženými úlohami však existují i věcné, logické souvislosti, jak můžeme ilustrovat na formulaci duální úlohy k řešenému příkladu 1.2 ze strany 41 o výrobě cukrovinek druhu A, B, C. Matematický model této úlohy je tvaru

$$\begin{aligned} z = 8x_1 + 6x_2 + 4x_3 &\quad\rightarrow\quad \max \\ 20x_1 + 10x_2 + 8x_3 &\quad\leq\quad 2000 \\ 30x_2 + 15x_3 &\quad\leq\quad 3000 \\ x_1 &\quad\geq\quad 0 \\ x_2 &\quad\geq\quad 0 \\ x_3 &\quad\geq\quad 0, \end{aligned}$$

kde omezující podmínky jsou dány disponibilním množstvím marcipánu a oříšků a kritériem optimality je dosažení maximálních tržeb.

Příklad 11. *Předpokládejme, že majitel cukrárny chce obě suroviny, tj.* 2000 *g marcipánu a* 3000 *g oříšků, prodat. Označíme-li cenu jednotkového množství těchto surovin, tj. jednoho gramu, symboly* y_1, y_2 *(zřejmě to musí být nezáporná čísla), cena obou disponibilních zdrojů je dána výrazem* $2000y_1 + 3000y_2$. *Majitel cukrárny uvažuje realisticky, tzn. spokojí se s co nejmenší částkou, kterou dostane, ale požaduje, aby úhrnná cena surovin, které jsou nutné na výrobu jedné cukrovinky každého druhu, nebyla menší než cena, za kterou se tato cukrovinka prodává. Musí tedy být splněna soustava podmínek*

$$\begin{aligned} 20y_1 &\quad\geq\quad 8 \\ 10y_1 + 30y_2 &\quad\geq\quad 6 \\ 8y_1 + 15_3 &\quad\geq\quad 4. \end{aligned}$$

Tato soustava lineárních nerovnic spolu s podmínkami nezápornosti obou proměnných

$$\begin{aligned} y_1 &\quad\geq\quad 0 \\ y_2 &\quad\geq\quad 0 \end{aligned}$$

a lineární účelovou funkcí

$$z = 2000y_1 + 3000y_2 \quad\rightarrow\quad \min$$

tvoří úlohu duální k řešenému příkladu 1.2.

Je to opět úloha lineárního programování, v níž strukturní proměnné y_1, y_2 jsou přiřazeny jednotlivým vlastním omezujícím podmínkám primárního modelu a naopak každé primární strukturní proměnné x_1, x_2, x_3 je přiřazeno jedno vlastní omezení duálu. Dualita je vztah vzájemný, tzn. model řešeného příkladu 1.2 můžeme považovat za primární a model sestavený v příkladu 11 je k ní duální. Tyto modely jsou příkladem symetrických duálně sdružených úloh, které můžeme obecně formulovat – viz tabulka 1.10. Vztahy mezi dvěma symetrickými duálně sdruženými úlohami jsou přehledně zapsány v tabulce 1.11. Jestliže jsou některá vlastní omezení primární maximalizační úlohy typu $\geq$, před formulací úlohy duálně sdružené je musíme převést na omezení typu $\leq$ vynásobením (-1). Podobně jestliže jsou v primární minimalizační úloze omezení typu $\leq$, musíme je převést na omezení typu $\geq$ vynásobením (-1). Zvláštní úpravu z hlediska duality si vyžádá model, v němž některá vlastní omezující podmínka je dána rovnicí. Tohoto typu

Tabulka 1.10: Vztah mezi symetrickými duálně sdruženými modely

Primární úloha		Duální úloha
$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$	$\leftrightarrow$	$\mathbf{y} \geq \mathbf{o}$
$\mathbf{x} \geq \mathbf{o}$	$\leftrightarrow$	$\mathbf{A}^T\mathbf{y} \geq \mathbf{c}$
$z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \rightarrow \max$	$\leftrightarrow$	$f = \mathbf{b}^T\mathbf{y} \rightarrow \min$

Tabulka 1.11: Vztah mezi symetrickými duálně sdruženými úlohami

	Primár	Duál
Počet proměnných	n	m
Počet vlastních omezení	m	n
Matice strukturních koeficientů	$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}^T$
Vektor požadavků	$\mathbf{b}$	$\mathbf{c}$
Vektor cen	$\mathbf{c}$	$\mathbf{b}$
Typ omezení	$\leq$	$\geq$
Nezápornost proměnných	ano	ano
Typ extrému účelové funkce	max	min

je úloha o optimálním složení výživového doplňku (příklad 2 ze strany 12), jejíž matematický model je tvaru

$$\begin{aligned}
z = 4x_1 + 10x_2 &\rightarrow \min \\
6x_1 + 80x_2 &\leq 90 \\
0,1x_1 + 1,5x_2 &= 1,2 \\
160x_1 &\geq 2000 \\
5x_1 + 9x_2 \geq 18 & \\
x_1 &\geq 0 \\
x_2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

Rovnici, která tvoří druhou omezující podmínku, můžeme nahradit dvěma nerovnicemi

$$\begin{aligned}
0,1x_1 + 1,5x_2 &\leq 1,2 \\
0,1x_1 + 1,5x_2 &\geq 1,2.
\end{aligned}$$

Po úpravě všech nerovnic na typ $\geq$ získáme soustavu omezujících podmínek, ekvivalentní se soustavou původního modelu příkladu 2, ve tvaru

$$\begin{aligned}
-6x_1 - 80x_2 &\geq -90 \\
0,1x_1 + 1,5x_2 &\geq 1,2 \\
-0,1x_1 - 1,5x_2 &\geq -1,2 \\
160x_1 &\geq 2000 \\
5x_1 + 9x_2 \geq 18. &
\end{aligned}$$

Označíme-li duální proměnné, přiřazené jednotlivým omezujícím podmínkám, po řadě symboly

y_1,$y_2^{`}$,$y_2^{``}$,y_3,y_4 pro duální model platí

$$\begin{array}{rcl} f = -90y_1 + 1,2y_2^{`} - 1,2y_2^{``} + 2000y_3 + 18y_4 & \rightarrow & \max \\ -6y_1 + 0,1y_2^{`} - 0,1y_2^{``} + 160y_3 + 5y_4 & \leq & 4 \\ -80y_1 + 1,5y_2^{`} - 1,5y_2^{``} + 9y_4 & \leq & 10 \\ y_1 & \geq & 0 \\ y_2^{`} & \geq & 0 \\ y_2^{``} & \geq & 0 \\ y_3 & \geq & 0 \\ y_4 & \geq & 0. \end{array}$$

Takto formulované duálně sdružené úlohy jsou symetrické. Protože koeficienty proměnných $y_2^{`}$ a $y_2^{``}$ se liší pouze znaménkem, je možné je vytknout a rozdíl $y_2^{`} - y_2^{``}$ označit jakožto proměnnou y_2. Potom můžeme vlastní omezující podmínky a účelovou funkci vytvořeného duálního modelu zapsat ve tvaru

$$\begin{array}{rcl} f = -90y_1 + 1,2y_2 + 2000y_3 + 18y_4 & \rightarrow & \max \\ -6y_1 + 0,1y_2 + 160y_3 + 5y_4 & \leq & 4 \\ -80y_1 + 1,5y_2 + 9y_4 & \leq & 10 \end{array}$$

Tento model má důležitou vlastnost: Zatímco proměnné $y_2^{`}$ a $y_2^{``}$ musely být nezáporné, jejich rozdíl, tj. proměnná y_2 , může být záporná. Jestliže speciálně všechna omezení v primární úloze jsou ve tvaru rovnic, žádná z duálních proměnných nemusí splňovat požadavek nezápornosti. Tyto úlohy se nazývají **nesymetrickými duálními problémy** a platí pro ně následující vztahy – viz tabulky 1.12 a 1.13. Uvedené duálně sdružené modely lze označit jako "čisté" nesymetrické

Tabulka 1.12: Vztah mezi nesymetrickými duálně sdruženými modely (1)

Primární úloha (maximalizační)		Duální úloha (minimalizační)
$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$	$\leftrightarrow$	$\mathbf{y}$ bez omezení
$\mathbf{x} \geq \mathbf{o}$	$\leftrightarrow$	$\mathbf{A}^T\mathbf{y} \geq \mathbf{c}$
$z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \rightarrow \max$	$\leftrightarrow$	$f = \mathbf{b}^T\mathbf{y} \rightarrow \min$

Tabulka 1.13: Vztah mezi nesymetrickými duálně sdruženými úlohami (2)

Primární úloha (minimalizační)		Duální úloha (maximalizační)
$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$	$\leftrightarrow$	$\mathbf{y}$ bez omezení
$\mathbf{x} \geq \mathbf{o}$	$\leftrightarrow$	$\mathbf{A}^T\mathbf{y} \leq \mathbf{c}$
$z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \rightarrow \min$	$\leftrightarrow$	$f = \mathbf{b}^T\mathbf{y} \rightarrow \max$

úlohy, kdy v jedné úloze jsou všechna vlastní omezení vyjádřena rovnicemi a žádná proměnná v druhé úloze nemusí být nezáporná. Výše zmíněná úloha o optimálním výživovém doplňku je příkladem smíšené duality, kdy v omezujících podmínkách primáru se vyskytují rovnice i nerovnice a v duálu jen některé proměnné musí být nezáporné.

1.7.2 Vztahy mezi řešením duálně sdružených úloh

Nejdůležitější vztahy mezi řešením duálně sdružených úloh jsou obsahem tzv. základní věty o dualitě, která se skládá ze tří tvrzení.

1. Má-li jedna z dvojice duálně sdružených úloh optimální řešení, má optimální řešení i úloha druhá a optimální hodnoty obou účelových funkcí jsou stejné ($z_{max} = f_{min}$).

2. Má-li jedna z dvojice duálně sdružených úloh přípustné řešení, ale hodnota její účelové funkce je neomezená, druhá úloha nemá přípustné řešení.

3. Nemá-li jedna z dvojice duálně sdružených úloh přípustné řešení, druhá úloha buď také nemá přípustné řešení, nebo má, ale účelová funkce může neomezeně vzrůstat (resp. klesat).

Řešením jedné ze sdružených úloh získáme i řešení druhé úlohy. Optimální hodnoty duálních proměnných najdeme v indexním řádku výsledné simplexové tabulky primární úlohy. Optimální hodnoty duálních strukturních proměnných se rovnají indexním číslům primárních přídatných proměnných. Optimální hodnoty duálních strukturních proměnných přiřazených rovnicím zjistíme v indexním řádku pod příslušnými doplňkovými proměnnými. Optimální hodnoty přídatných proměnných duální úlohy se rovnají indexním číslům primárních strukturních proměnných . Pokud primární úloha je minimalizační, indexní řádek ve výsledné simplexové tabulce obsahuje pouze nekladná čísla a indexní čísla musíme brát v absolutní hodnotě. Z uvedených vztahů mezi optimálním řešením duálně sdružených úloh vyplývá, že pokud jedna z úloh má nekonečně mnoho rovnocenných optimálních řešení, optimální řešení druhé úlohy je degenerované. Vztahy mezi optimálními výsledky duálně sdružených úloh ilustrujeme na řešeném příkladu 1.2 na straně 41 a úloze duálně sdružené, zformulovaných v úvodu této subkapitoly. Indexní řádek výsledné simplexové tabulky primární úlohy (tabulka 1.9) obsahuje následující čísla – viz tabulka 1.14. Z indexního řádku lze vyčíst toto optimální řešení úlohy duálně sdružené:

Tabulka 1.14: Duální proměnné v řešení primárního modelu

Báze	x_1	x_2	x_3	d_1	d_2	$\mathbf{b}$
z	0	0	1/5	2/5	1/15	1000
Duál	**Přídatné proměnné**			**Strukturní proměnné**		

- Strukturní duální proměnné: $y_1 = 2/5$, $y_2 = 1/15$
- Odečítané přídatné proměnné v duálu: $g_1 = g_2 = 0$, $g_3 = 1/5$
- Optimální hodnota účelové funkce v duální úloze: $f_{min} = 1000$

Podle stejných pravidel určíme optimální řešení primární úlohy, pokud známe výslednou simplexovou tabulku příslušné duální úlohy. Můžeme se rozhodnout, kterou úlohu budeme řešit podle toho, co je z výpočetního hlediska výhodnější.

1.7.3 Věta o rovnováze

Ve dvojici symetrických duálně sdružených úloh odpovídá každému vlastnímu omezení jedné úlohy podmínka nezápornosti příslušné proměnné v druhé úloze a naopak. Vztahy mezi sdruženými omezeními obou úloh po dosazení optimálního jednoznačného a nedegenerovaného řešení primárního modelu $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})^T$ a duálního modelu $\mathbf{y}^{(0)} = (y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_m^{(0)})^T$

lze vyjádřit následujícími ekvivalencemi:

$$x_j^{(0)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^{(0)} > c_j$$
$$x_j^{(0)} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^{(0)} = c_j$$
$$y_i^{(0)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(0)} < b_i$$
$$y_i^{(0)} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(0)} = b_j$$

Uvedené vztahy lze shrnout do tzv. věty o rovnováze: Je-li v optimálním řešení jedno z dvojice duálně sdružených omezení splněno jako ostrá nerovnost, je druhé omezení splněno jako rovnost a naopak.

1.7.4 Ekonomická interpretace duality

Ekonomický význam strukturních duálních proměnných lze odvodit z rovnosti optimálních hodnot účelových funkcí dvou duálně sdružených úloh. Známe-li optimální hodnoty strukturních duálních proměnných $(y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_m^{(0)})$, můžeme optimální hodnotu účelové funkce primáru vyjádřit ve tvaru $z = b_1 y_1^{(0)} + b_2 y_2^{(0)} + \ldots + b_m y_m^{(0)}$. Předpokládejme nyní změnu požadavkového čísla b_k o hodnotu $\triangle b_k$, kde $1 \leq k \leq m$. Označíme-li odpovídající změnu optimální hodnoty účelové funkce $\triangle z$, platí

$$z + \triangle z = b_1 y_1^{(0)} + b_2 y_2^{(0)} + \ldots + (b_k + \triangle b_k) y_k^{(0)} + \ldots + b_m y_m^{(0)},$$

odkud po úpravě dostaneme vztah

$$\triangle z = \triangle b_k y_k^{(0)},$$

neboli

$$y_k^{(0)} = \frac{\triangle z}{\triangle b_k}.$$

Z odvozeného zlomku vyplývá, že optimální hodnota strukturní duální proměnné udává změnu optimální hodnoty účelové funkce (primáru i duálu), připadající na jednotkovou změnu pravé strany příslušného omezení v primáru. Jestliže se omezující podmínka zmírní, tzn. v nerovnicích $\leq$ se pravá strana zvýší nebo v nerovnicích $\geq$ se sníží, optimální hodnota účelové funkce se zlepší, tj. v maximalizačních úlohách se zvýší a v případě minimalizační účelové funkce se sníží. Naopak zpřísnění omezující podmínky, tj. snížení pravé strany nerovnice $\leq$ nebo zvýšení pravé strany nerovnice $\geq$, má za následek zhoršení optimální hodnoty účelové funkce. Duální proměnné tedy představují ocenění činitelů tvořících jednotlivé omezující podmínky primární úlohy a bývají nazývány jejich stínovými cenami. Je to ocenění relativní, posuzované z hlediska daného, konkrétního modelu. V nesymetrických duálních úlohách se může stát, že optimální hodnota duální strukturní proměnné, přiřazené rovnici, je záporná. Interpretace tohoto výsledku znamená, že může dojít k paradoxní situaci, kdy např. rozšíření výrobního zdroje způsobí pokles dosahovaného zisku nebo větší množství výrobků je možné dosáhnout při nižších nákladech. Ekonomický význam přídatných duálních proměnných je dán tím, že se rovnají indexním číslům strukturních proměnných ve výsledné simplexové tabulce primární úlohy. Nenulové hodnoty těchto čísel udávají, oč by se zhoršila optimální hodnota účelové funkce zařazením jedné jednotky této proměnné do řešení, neboli o kolik je třeba cenu této nezákladní proměnné v maximalizační úloze zvýšit a v minimalizační úloze snížit, aby se stala základní proměnnou s kladnou hodnotou. Ekonomickou interpretaci věty o rovnováze lze dobře ilustrovat na úloze optimálního výrobního plánování: Je-li výrobní zdroj nevyužit ($\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^{(0)} < b_i$), jeho ocenění je nulové ($y_i = 0$), zatímco při vyčerpání výrobního zdroje ($\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^{(0)} = b_i$) jeho ocenění je kladné ($y_i > 0$). Je-li ocenění všech výrobních činitelů spotřebovaných na určitý výrobek větší než zisk, který tento výrobek vynáší ($\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^{(0)} > c_j$), jde o nerentabilní výrobek ($x_j = 0$). Jestliže zisk určitého výrobku je stejný jako ocenění všech spotřebovaných výrobních činitelů ($\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^{(0)} = c_j$), je výhodné tento výrobek vyrábět ($x_j > 0$).

Cvičení

Cvičení 1.16. U řešeného příkladu 1.1 na straně 28, v němž účelová funkce může neomezně vzrůstat, ověřte, že duálně sdružená úloha nemá řešení.

Cvičení 1.17. Podnik vyrábí roztok s požadovanou kyselostí pH 4 mícháním surovin S_1, S_2 a S_3. Kyselost roztoku je dána váženým aritmetickým průměrem kyselosti výchozích surovin. Celková cena použitých surovin nesmí přesáhnout 20 tisíc Kč. Stanovte množství surovin S_1, S_2 a S_3 tak, aby z nich za daných podmínek bylo vyrobeno maximální množství roztoku. Požadované údaje vztažené na litr surovin jsou uvedeny v následující tabulce.

	S_1	S_2	S_3
kyselost (pH)	5	2	3
cena (Kč)	20	10	25

a) Sestavte model této úlohy.

b) K primárnímu modelu sestavte model duálně sdružený a graficky ho vyřešte.

c) Obě úlohy vyřešte pomocí vhodného SW a porovnejte výsledky.

Cvičení 1.18. Formulujte duálně sdruženou úlohu ke cvičení 1.10 ze strany 30. Úlohu vyřešte nejprve graficky a potom i pomocí SW. Z výsledku odvoďte vliv měnících se požadavků na produkci zrna a slámy na minimálně nutnou plochu obou obilovin.

Výsledky

Výsledky 1.16
Model duálně sdružené úlohy:

$$\begin{aligned} z = -30y_1 + 6y_2 &\rightarrow \min \\ -3y_1 &\geq 1 \\ -4y_1 + y_2 &\geq 1 \\ y_1 &\geq 0 \\ y_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Vzhledem k podmínkám nezápornosti první podmínka nemůže být splněna.

Výsledky 1.17 a) Model úlohy je:

$$\begin{aligned} z = x_1 + x_2 + x_3 &\rightarrow \max \\ 20x_1 + 10x_2 + 25x_3 &\leq 20000 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \\ x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f = 20000y_1 &\rightarrow \min \\ 20y_1 + y_2 &\geq 1 \\ 10y_1 - 2y_2 &\geq 1 \\ 25y_1 - y_2 &\geq 1 \\ y_1 &\geq 0. \end{aligned}$$

$y_1 = 0,06; y_2 = -0,2; f = 1200$

Výsledky 1.18

$$\begin{aligned} f = 100y_1 + 90y_2 &\rightarrow \max \\ 4y_1 + 4,5y_2 &\leq 1 \\ 5y_1 + 4y_2 &\leq 1 \\ y_1 &\geq 0 \\ y_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

$y_1 = \frac{1}{13}; y_2 = \frac{2}{13}; f = \frac{280}{13}$
Pokud se změní požadavek na produkci zrna o 1 tunu, změní se minimálně nutná celková plocha žita a pšenice o $\frac{1}{13}$ ha. Změna v požadavku na produkci slámy se projeví změnou plochy o $\frac{2}{13}$ ha.

1.8 Vícekriteriální lineární programování

Při řešení optimalizačních úloh existuje zpravidla více kritérií optimálnosti, kterým by mělo být řešení omezujících podmínek podřízeno; existuje více hledisek, která bereme při optimalizaci v úvahu. Proto je nutné provést tzv. vícekriteriální optimalizaci. Ve vícekriteriální optimalizaci existuje k dané soustavě omezujících podmínek více účelových funkcí. Je nutné nalézt variantu, která by za daných podmínek nejlépe vyhovovala všem optimalizačním kritériím, hledáme tzv. **kompromisní řešení**.

Příklad 12. *Pražírny kávy vyrábějí dva druhy kávy (Super a Standard) ze dvou druhů kávových bobů KB1 a KB2, které mají smluvně zajištěny v množství* 4 *t a* 6 *t. Složení kávy (v procentech) a zisk (v tisících Kč) jsou uvedeny v tabulce.*

Druh kávy	*KB1*	*KB2*	*zisk*
Super	50	50	20
Standard	25	75	14

Pražírny mají za úkol vyrobit minimálně 4 *tuny kávy a snaží se:*

1. *maximalizovat svůj zisk,*
2. *minimalizovat spotřebu kávových bobů 2 (KB2),*
3. *maximalizovat výrobu kávy Super.*

Hledanými veličinami v dané úloze jsou vyráběné množství kávy Super a Standard (v tunách), a to
x_1 – *množství kávy Super*
x_2 – *množství kávy Standard.*
Účelová funkce, která maximalizuje dosahovaný zisk, je tvaru:

$$z_1 = 20x_1 + 14x_2 \;\rightarrow\; \text{max.}$$

Účelová funkce, která minimalizuje spotřebovávané množství kávových bobů 2, je tvaru:

$$z_2 = 0{,}5x_1 + 0{,}75x_2 \;\rightarrow\; \text{min.}$$

Účelová funkce, která maximalizuje vyráběné množství kávy Super, je tvaru:

$$z_3 = x_1 \;\rightarrow\; \text{max.}$$

Omezující podmínky jsou dány disponibilním množstvím kávových bobů a minimálním požadovaným množstvím kávy, což vyjadřují následující nerovnice:

- *pro kávové boby 1*
$$0{,}5x_1 + 0{,}25x_2 \leq 4$$
- *pro kávové boby 2*
$$0{,}5x_1 + 0{,}75x_2 \leq 6$$
- *pro minimální požadované množství kávy*
$$x_1 + x_2 \geq 4$$

Podmínky nezápornosti $(x_1, x_2 \geq 0)$ *jsou zde nutné, podmínky celočíselnosti nikoliv.*

1.8.1 Získání dílčích (parciálních) řešení

V příkladu 12 jsou tři hlediska, ke kterým bychom při optimalizaci měli přihlížet. Nejprve zjistíme, jak by řešení vypadalo s přihlédnutím pouze k jednomu kritériu optimality, získáme tzv. **parciální (dílčí) optimální řešení**. Jak získáme tyto dílčí řešení je popsáno v následujících řešených příkladech.

Řešený příklad 1.3. *Jaké je optimální řešení příkladu 12, budeme-li chtít za daných podmínek dosahovat maximálního zisku?*

Řešení. Hledanými veličinami v dané úloze jsou vyráběná množství kávy Super a Standard (v tunách), a to x_1 – množství kávy Super a x_2 – množství kávy Standard.

Model úlohy je:

$$\begin{aligned} z_1 = 20x_1 + 14x_2 &\rightarrow \max \\ 0{,}5x_1 + 0{,}25x_2 &\leq 4 \\ 0{,}5x_1 + 0{,}75x_2 &\leq 6 \\ x_1 + x_2 &\geq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Takto sestavený model vyřešíme např. pomocí vhodného SW (podrobněji v příloze A) a získáme dílčí řešení:

$$\mathbf{x}^{(1)} = (6; 4), z_1 = 176,$$

což znamená, že pokud bude kritériem optimality pouze zisk, za daných podmínek můžeme dosáhnout jeho maximální výše 176 tisíc Kč, pokud budeme vyrábět 6 tun kávy Super a 4 tuny kávy Standard.

Řešený příklad 1.4. *Jaké je optimální řešení příkladu 12, budeme-li chtít za daných podmínek spotřebovávat minimální množství kávových bobů 2?*

Řešení. Hledanými veličinami v dané úloze jsou vyráběné množství kávy Super a Standard (v tunách), a to x_1 – množství kávy Super a x_2 – množství kávy Standard.

Model úlohy je:

$$\begin{aligned} z_2 = 0{,}5x_1 + 0{,}75x_2 &\rightarrow \min \\ 0{,}5x_1 + 0{,}25x_2 &\leq 4 \\ 0{,}5x_1 + 0{,}75x_2 &\leq 6 \\ x_1 + x_2 &\geq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Takto sestavený model vyřešíme např. pomocí vhodného SW (podrobněji v příloze A) a získáme dílčí řešení:

$$\mathbf{x}^{(2)} = (4; 0), z_2 = 2,$$

což znamená, že pokud bude kritériem optimality pouze spotřeba kávových bobů 2, za daných podmínek můžeme dosáhnout její minimální hodnoty 2 tuny, pokud budeme vyrábět 4 tuny kávy Super a 0 tun kávy Standard.

Řešený příklad 1.5. *Jaké je optimální řešení příkladu 12, budeme-li chtít za daných podmínek vyrábět maximální možné množství kávy Super?*

Řešení. Hledanými veličinami v dané úloze jsou vyráběné množství kávy Super a Standard (v tunách), a to x_1 – množství kávy Super a x_2 – množství kávy Standard.

Model úlohy je:

$$\begin{aligned} z_3 = x_1 &\quad \rightarrow \quad \max \\ 0{,}5x_1 + 0{,}25x_2 &\quad \leq \quad 4 \\ 0{,}5x_1 + 0{,}75x_2 &\quad \leq \quad 6 \\ x_1 + x_2 &\quad \geq \quad 4 \\ x_1, x_2 &\quad \geq \quad 0 \end{aligned}$$

Takto sestavený model vyřešíme např. pomocí vhodného SW (podrobněji v příloze A) a získáme dílčí řešení:

$$\mathbf{x}^{(3)} = (8; 0), z_3 = 8,$$

což znamená, že pokud bude kritériem optimality pouze výroba kávy Super, za daných podmínek můžeme dosáhnout její maximální výše 8 tun, pokud budeme vyrábět pouze kávu Super a žádnou kávu Standard.

Všechny parciální řešení nyní zapíšeme do tabulky (tučně). V tabulce jsou dopočítány pro každé parciální řešení i hodnoty ostatních kritérií.

	Účelová funkce		
	z_1 – Zisk	z_2 – KB2	z_3 – Super
x_1	**6**	**4**	**8**
x_2	**4**	**0**	**0**
z_1 – Zisk	**176**	80	160
z_2 – KB2	6	**2**	4
z_3 – Super	6	4	**8**

Poznámka. V hlavičce tabulky je vždy uvedeno kritérium optimality, podle kterého byl model řešen. V řádcích tabulky jsou uvedeny hodnoty proměnných a všech kritérií. Vezměme například první parciální řešení, které je uvedeno ve druhém sloupci tabulky. Hodnoty proměnných jsou $x_1 = 6, x_2 = 4$ a účelová funkce – zisk má hodnotu 176 tisíc Kč. Kolik při této struktuře výroby spotřebujeme kávových bobů 2 zjistíme tak, že dosadíme vyráběné množství – hodnoty proměnných do účelové funkce vyjadřující spotřebu KB 2 v závislosti na vyrobeném množství. Spočítáme potom hodnotu výrazu $0{,}5*6+0{,}75*4 = 6$ (v tabulce uvedeno ve druhém sloupci, šestém řádku. Množství vyráběné kávy Super je patrné již ze struktury výroby – vyřešením dílčího modelu. Stejným způsobem dopočítáme i ostatní hodnoty kritérií z dalších dílčích optimálních řešení.

Všechna parciální řešení jsou tzv. **řešení nedominovaná**. Nedominovaná budou i kompromisní řešení, která získáme některou z metod vícekriteriální optimalizace. Řešení by bylo dominované, pokud by existovalo jiné řešení, které by bylo alespoň z jednoho hlediska lepší a ze všech ostatních hledisek stejné. Nedominované řešení není dominované žádným jiným řešením.

1.8.2 Základní symbolika používaná při popisu metod vícekriteriální optimalizace

Abychom mohli obecně popsat metody vícekriteriální optimalizace, zavedeme si následující symboliku.

- Počet neznámých – n, v příkladu 12 $n = 2$,
- počet účelových funkcí – r, v příkladu 12 $r = 3$,

- k-tá účelová funkce ($k = 1, 2, \ldots, r$) – $z_k = \sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_j$,
- vektor dílčího optimálního řešení $\mathbf{x}^{(k)}$ pro funkci z_k, nejlepší možná hodnota účelové funkce z_k^*,
- kladný váhový koeficient v_k, který oceňuje důležitost k-té účelové funkce, tyto koeficienty jsou normovány tak, aby $\sum_{k=1}^{r} v_k = 1$.

Rozdělení metod pro stanovení vah kritérií

Metody na stanovení vah kritérií lze rozdělit podle informace, která je nutná ke stanovení vah.

- *Rozhodovatel nemůže určit preference.* V případě, že rozhodovatel není schopen rozlišit důležitost jednotlivých kritérií, všem kritériím je přiřazena stejná váha. Máme-li tedy například tři kritéria ($r = 3$), každému z nich je přiřazena váha $\frac{1}{3}$ ($v_k = \frac{1}{r}$).
- *Rozhodovatel má ordinální informaci o kritériích.* V takovém případě je rozhodovatel schopen určit pořadí důležitosti kritérií. Mezi metody vyžadující ordinální informaci o kritériích patří *metoda pořadí* a *Fullerova metoda*.
- *Rozhodovatel má kardinální informace o kritériích.* Rozhodovatel zná nejen pořadí, ale i rozestupy v pořadí preferencí mezi jednotlivými kritérii. Mezi metody založené na tomto principu patří *bodovací metoda* a *Saatyho metoda*.

Metoda pořadí

Rozhodovatel seřadí kritéria optimality (účelové funkce) $z_1, z_2, \ldots, z_r$ od nejvýznamnějšího k nejméně významnému a takto uspořádaným kritériím (účelovým funkcím) přiřadí body $r, r-1, \ldots, 2, 1$. Váhy jsou získány tak, že se počet přiřazených bodů vydělí celkovým počtem bodů.

Řešený příklad 1.6. *Spočítejte váhy kritérií z příkladu 12 metodou pořadí, pokud víte, že kritéria jsou preferována v tomto pořadí:* z_1, z_3, z_2

Řešení. Například kritérium z_1 je první v pořadí ze tří kritérií, proto přiřadíme tomuto kritériu 3 body. Celkový počet bodů přidělený všem kritériím je 6 (3+2+1). Váha se pak vypočte jako podíl bodů přiřazených tomuto kritériu na celkovém počtu přiřazených bodů, tedy $v_1 = 3/6 = 0,5$. Stejně tak přiřazujeme body podle pořadí dalším kritériím a váhy jsou pak následující: $v_3 = 1/3$, $v_2 = 1/6$.

Fullerova metoda

Při větším počtu kritérií je výhodné srovnávat navzájem vždy pouze dvě kritéria, o kterých snáze rozhodneme, které je důležitější. Jednu z možností pro vyhodnocení těchto srovnání poskytuje tzv. Fullerův trojúhelník. Za předpokladu, že jednotlivá kritéria jsou pevně očíslována pořadovými čísly $1, 2, \ldots, r$, Fullerův trojúhelník je tvořen dvojřádky, v nichž každá dvojice kritérií se vyskytne právě jednou (viz schéma). U každé dvojice hodnotitel zakroužkuje nebo jinak vyznačí číslo toho kritéria, které považuje za důležitější, takže pro kritérium z_k představuje počet zakroužkovaných čísel k počet jeho preferencí, který označíme f_k. Protože při počtu kritérií r je počet párových srovnání roven kombinačnímu číslu $\binom{r}{2}$, tj. pro normovanou váhu kritéria z_k platí

$$v_k = \frac{f_k}{\frac{r(r-1)}{2}}, k = 1, 2, \ldots, r.$$

Schéma Fullerova trojúhelníku:

$$\begin{array}{ccccc}
1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\
2 & 3 & 4 & \dots & r \\
\hline
 & 2 & 2 & \dots & 2 \\
 & 3 & 4 & \dots & r \\
\hline
 & & & \dots & \\
\hline
 & & & r\text{-}2 & r\text{-}2 \\
 & & & r\text{-}1 & r \\
\hline
 & & & & r\text{-}1 \\
 & & & & r
\end{array}$$

Řešený příklad 1.7. *Spočítejte váhy kritérií z příkladu 12 Fullerovou metodou, pokud víte, že rozhodovatelovy preference jsou následující:* $z_1 \succ z_3 \succ z_2$.

Řešení. Zapíšeme každou dvojici kritérií do Fullerova trojúhelníku a tučně označíme to kritérium, které je ve dvojici preferováno.

$$\begin{array}{cc}
\hline
\mathbf{1} & \mathbf{1} \\
2 & 3 \\
\hline
 & 2 \\
 & \mathbf{3} \\
\hline
\end{array}$$

Pro každé kritérium spočítáme kolikrát je označené jako preferované před jiným kritériem. Počet preferencí pro každé kritérium vydělíme počtem všech porovnávání. Tím získáme váhy.

Kritérium	Počet preferencí	Váha
z_1	2	2/3
z_2	0	0
z_3	1	1/3
Celkem	3	1

Nevýhodou metody párového srovnávání je skutečnost, že nejméně důležité kritérium má nulovou váhu, i když nemusí jít o zcela bezvýznamné kritérium. Tento nedostatek lze odstranit tak, že četnost preferencí každého kritéria zvýšíme o 1 a celkový počet preferencí zvýšíme o r.

Řešený příklad 1.8. *Spočítejte váhy Fullerovou metodou tak, aby žádné z kritérií nemělo nulovou váhu. Preference jsou shodné se zadáním řešeného příkladu 1.7.*

Řešení. Vezmeme výsledky řešeného příkladu 1.7, navýšíme počet preferencí o jednotku, tím nám vzroste celkový počet porovnávání na 6 a váhy se pak počítají jako podíl počtu preferencí daného kritéria a celkového počtu porovnávání.

Kritérium	Počet preferencí	Váha	Navýšený počet preferencí	Upravená váha
K_1	2	2/3	3	1/2
K_2	0	0	1	1/6
K_3	1	1/3	2	1/3
Celkem	3	1	6	1

Existují modifikace metody párového srovnávání kritérií, které připouštějí stejnou důležitost nebo nesrovnatelnost některých kritérií, ale těmi se v tomto textu nebudeme zabývat. Pokud tedy budeme chtít použít Fullerovu metodu, musíme být schopni pomocí relace preference kritéria uspořádat.

Bodovací metoda

Na rozdíl od metody pořadí, která vychází pouze z porovnání významnosti jednotlivých kritérií, při bodovací metodě se důležitost kritérií ohodnotí počtem bodů (čím je kritérium důležitější, tím má větší počet bodů). Bodovací stupnice může mít větší či menší rozsah – např. 1 až 5, 1 až 10 apod. Přidělený počet bodů se převádí na normovanou váhu vydělením celkovým počtem bodů. Zvláštním případem bodovací metody je alokace 100 bodů (zvaná též **Metfesselova alokace**), kdy mezi jednotlivá kritéria se v souladu s jejich důležitostí rozděluje 100 bodů. Normované váhy jsou potom stokrát menší než příslušný počet bodů. Potřebné body pro výpočet vah získáme můžeme získat např.

– obodováním důležitosti dílčích řešení

  Příklad 13. *Mějme dvě kritéria optimality. Prvnímu přiřadíme důležitost* 2 *body, druhému* 3 *body. Váhy spočítáme tak, že přidělené body vydělíme celkovým počtem přidělených bodů, což je v našem případě* 5. *Jinými slovy body přidělené jednotlivým kritériím budeme normovat celkovým počtem bodů. Váhy prvního kritéria vypočteme* $v_1 = 2/5 = 0{,}4$ *a váhy druhého kritéria* $v_2 = 3/5 = 0{,}6$. *Součet vah nám musí vždy dát hodnotu 1, jak již bylo uvedeno výše.*

– určením kolikrát je jedno kritérium důležitější než jiné kritérium

  Příklad 14. *Mějme dvě kritéria optimality. Stanovíme si, že první je čtyřikrát důležitější než druhé – důležitost je* $4 : 1$. *Z toho přidělíme body oběma kritériím a postup je shodný jako v předchozím řešeném příkladu.*

Řešený příklad 1.9. *Spočítejte váhy kritérií z příkladu* 12 *bodovací metodou.*

Řešení. Nejprve si musíme nejen srovnat kritéria podle pořadí preferencí, ale i určit sílu těchto preferencí. Jedno z možných bodových ohodnocení spolu s výslednými vahami pro takové bodové ohodnocení je v následující tabulce.

Kritérium	Počet bodů	Váha
K_1	50	0,5
K_2	20	0,2
K_3	30	0,3
Celkem	100	1

Saatyho metoda, jak již bylo uvedeno, je též založena na kardinální informaci o důležitosti kritérií. V tomto textu se jí nebudeme více zabývat, v případě zájmu je možné popis metody i příklady nalézt např. v [1].
Váhy kritérií patří k údajům subjektivního charakteru, závisejícím jednak na použití metody, jednak na hodnotiteli.

Poznámka. Pro vlastní hodnocení variant stačí, aby si rozhodovatel vybral jednu metodu, tou spočítal váhy a s těmito vahami počítal dále.

1.8.3 Metody vícekriteriálního LP

Vícekriteriální optimalizace spočívá v tom, že chceme dílčí řešení nakombinovat tak, abychom získali kompromisní řešení, které bude alespoň částečně vyhovovat všem požadavkům. V tomto textu uvedeme pět základních metod, a to:

- Konvexní kombinace dílčích optimálních řešení
- Záměna účelové funkce za omezující podmínky

- Cílové programování
- Minimalizace maximální vzdálenosti od ideálního řešení
- Metoda váženého součtu

Nedominovaných kompromisních řešení získaných těmito metodami může být nekonečně mnoho.

Metoda konvexní kombinace dílčích optimálních řešení

Vektory $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}^{(r)}$ představují optimální řešení pro danou soustavu omezujících podmínek a pro účelové funkce $z_1, z_2, \ldots, z_r$. Tyto vektory se nazývají parciální optimální řešení. Vektor $\mathbf{x}$ představuje konvexní kombinaci parciálních optimálních řešení. Váha jednotlivých dílčích optimálních řešení se stanovuje podle důležitosti příslušného kritéria. Potom platí, že složky vektoru $\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{r} v_k \mathbf{x}^k$ pro $v_k \geq 0$ a $\sum_{k=1}^{r} v_k = 1$ též vyhovují soustavě omezujících podmínek, které vyhovují dílčí optimální řešení. Váhy lze získat různým způsobem.

Řešený příklad 1.10. *Najděte kompromisní řešení příkladu 12 metodou konvexní kombinace dílčích optimálních řešení, pokud víte, že důležitost jednotlivých kritérií (zisk, spotřeba KB2 a výroba kávy Super) je dána poměrem bodů* 5 : 2 : 3.

Řešení. Nejprve spočítáme váhy jednotlivých kritérií (dílčích řešení). Celkem jsme přidělili 10 bodů, přidělené body budeme dělit tímto počtem a z toho získáme $v_1 = 0{,}5; v_2 = 0{,}2; v_3 = 0{,}3$. Vektor kompromisního řešení pak vypočteme z dílčích optimálních řešení a vah:

$$\mathbf{x} = 0{,}5(6; 4) + 0{,}2(4; 0) + 0{,}3(8; 0) = (6{,}2; 2).$$

Hodnotu účelových funkcí získáme buď dosazením vektoru kompromisního řešení do těchto funkcí, nebo pomocí vah a hodnot těchto funkcí. Například zisk spočítáme:

$$0{,}5 * 176 + 0{,}2 * 80 + 0{,}3 * 160 = 152$$

Pro přehlednost uvedeme výsledky v následující tabulce:

	Účelová funkce			
	z_1 – Zisk	z_2 – KB2	z_3 – Super	Konvex.kombinace
x_1	6	**4**	**8**	6,2
x_2	**4**	**0**	**0**	2
z_1 – Zisk	**176**	**80**	160	152
z_2 – KB2	**6**	**2**	4	4,6
z_3 – Super	6	**4**	**8**	6,2

Poznámka. Všimněte si tučně vytištěných čísel v tabulce. V každém řádku jsou dvě tato čísla a představují vždy největší možnou hodnotu a nejmenší možnou hodnotu příslušného kritéria při splnění omezujících podmínek. Například zisk je největší možný 176 tisíc Kč a nejmenší 80 tisíc Kč. Kompromisní řešení musí být vždy v tomto intervalu (v našem případě je 152 tisíc Kč při struktuře výroby 6,2 tun kávy Super a 2 tuny kávy Standard).

Metoda záměny účelové funkce za omezující podmínky

Tato metoda hledání kompromisního řešení spočívá v tom, že vybereme jedno kritérium optimality (jednu účelovou funkci) jako nejdůležitější. Tuto vybranou účelovou funkci ponecháme a z ostatních vytvoříme omezující podmínky. Uvažujme obecně úlohu se dvěma maximalizačními účelovými funkcemi, které obecně zapíšeme $z_1 = \mathbf{c}_1^T\mathbf{x}$ a $z_2 = \mathbf{c}_2^T\mathbf{x}$. Parciální optimální řešení označíme $\mathbf{x}^{(1)}$ a $\mathbf{x}^{(2)}$. Parciální řešení je nejlepší vždy vzhledem k jednomu kritériu. Proto pokud bychom vektor parciálního optimálního řešení dosadili do druhé účelové funkce, hodnota této funkce bude horší, než je její nejlepší hodnota dosažená druhým parciálním řešení. Matematicky toto zapíšeme $\mathbf{c}_1^T\mathbf{x}^{(1)} > \mathbf{c}_1^T\mathbf{x}^{(2)}$. Toto platí i naopak $\mathbf{c}_2^T\mathbf{x}^{(2)} > \mathbf{c}_2^T\mathbf{x}^{(1)}$.

Poznámka. $\mathbf{c}_1^T\mathbf{x}^{(1)} > \mathbf{c}_1^T\mathbf{x}^{(2)}$ čtěte $\mathbf{c}_1^T\mathbf{x}^{(1)}$ je lepší než $\mathbf{c}_1^T\mathbf{x}^{(2)}$, protože v případě minimalizace větší není lepší.

Nyní máme pro obě účelové funkce dvě hodnoty. Jedna je optimální a druhá je dopočítaná dosazením dílčího řešení získaného s druhou účelovou funkcí. Tyto dvě hodnoty tvoří interval $\langle \mathbf{c}_1^T\mathbf{x}^{(2)}; \mathbf{c}_1^T\mathbf{x}^{(1)} \rangle$ pro první účelovou funkci a $\langle \mathbf{c}_2^T\mathbf{x}^{(1)}; \mathbf{c}_2^T\mathbf{x}^{(2)} \rangle$ pro druhou účelovou funkci. Pokud chceme převést některou z účelových funkcí za omezující podmínku, vybereme z těchto intervalů hodnotu d, která je pro nás přijatelná. Tuto hodnotu pak nastavíme jako pravou stranu nově vzniklé podmínky vytvořenou z původní účelové funkce.

Řešený příklad 1.11. *Najděte kompromisní řešení příkladu 12 metodou záměny účelové funkce za omezující podmínky. Nejdůležitějším kritériem je dosahovaný zisk.*

Řešení. Vyjdeme z parciálních řešení a stanovíme si nejprve intervaly, ze kterých budeme vybírat hodnotu d.

	Účelová funkce			
	z_1 – Zisk	z_2 – KB2	z_3 – Super	Interval
x_1	6	**4**	**8**	
x_2	**4**	**0**	**0**	
z_1 – Zisk	**176**	**80**	160	$\langle 80; 176 \rangle$
z_2 – KB2	**6**	**2**	4	$\langle 2; 6 \rangle$
z_3 – Super	6	**4**	**8**	$\langle 4; 8 \rangle$

Zisk podle zadaní ponecháme jako kritérium optimality a zbylé dvě účelové funkce převedeme na podmínky. Interval pro spotřebu kávových bobů 2 je $\langle 2; 6 \rangle$, je to kritérium minimalizační, budeme volit horní hranici spotřeby KB 2 (jak velkou spotřebu jsme maximálně ochotni tolerovat). Naopak kritérium výroby kávy Super je maximalizační, volíme dolní hranici (kolik minimálně požadujeme), opět z intervalu pro toto kritérium $\langle 4; 8 \rangle$. Model úlohy pak bude například následující:

$$
\begin{aligned}
z = 20x_1 + 14x_2 &\;\to\; \max \\
0{,}5x_1 + 0{,}25x_2 &\;\leq\; 4 \\
0{,}5x_1 + 0{,}75x_2 &\;\leq\; 6 \\
x_1 + x_2 &\;\geq\; 4 \\
0{,}5x_1 + 0{,}75x_2 &\;\leq\; 3{,}5 \\
x_1 &\;\geq\; 6 \\
x_1, x_2 &\;\geq\; 0
\end{aligned}
$$

Všimněte si, že omezující podmínka, která vyjadřuje spotřebu KB 2, je v modelu dvakrát, původní $0{,}5x_1 + 0{,}75x_2 \leq 6$ je mírnější, proto by ji bylo možné vynechat. Po vyřešení tohoto modelu získáme $\mathbf{x} = (7; 0)$ a $z = 140$. Hodnoty zbývajících dvou kritérií opět dopočítáme. Výsledky pro přehlednost shrneme v následující tabulce.

	Účelová funkce				
	z_1 – Zisk	z_2 – KB2	z_3 – Super	Interval	
x_1	6	**4**	**8**		7
x_2	**4**	**0**	**0**		0
z_1 – Zisk	**176**	**80**	160	$\langle 80; 176 \rangle$	140
z_2 – KB2	**6**	**2**	4	$\langle 2; 6 \rangle$	3,5
z_3 – Super	6	**4**	**8**	$\langle 4; 8 \rangle$	7

Cílové programování

Cílové programování hledá takové řešení soustavy omezujících podmínek, které poskytuje nejbližší hodnoty účelových funkcí k jejich ideálním hodnotám. Pro každou účelovou funkci je známá (rozhodovatelem zvolená) její požadovaná úroveň h_k, kde $k = 1, 2, \dots, r$. Odchylky skutečných hodnot od jejich zvolených hodnot vyjadřujeme pomocí tzv. odchylkových proměnných d_k^+ (odchylka od požadovaných hodnot zhora) a d_k^- (odchylka od požadovaných hodnot zdola). Jako požadovanou úroveň je také možné zvolit pro každé kritérium jeho ideální hodnotu. Potom stačí přidat do každé nové podmínky pouze jednu odchylkovou proměnnou, a to buď odchylku zdola nebo odchylku zdola – podle typu původní kriteriální funkce. U maximalizační účelové funkce stačí přidat proměnnou vyjadřující odchylku zdola a u minimalizačních úloh proměnnou vyjadřující odchylku zhora. Nutnost dosažení ideálních (námi zvolených) hodnot je vyjádřena těmito omezujícími podmínkami, které se přidají k původním omezujícím podmínkám: $\mathbf{c}_k^T\mathbf{x} - d_k^+ + d_k^- = h_k$ pro $k = 1, 2, \dots, r$. Účelová funkce minimalizuje odchylky a má tvar: $z = \sum_{k=1}^{r}(d_k^+ + d_k^-) \to \min$

Řešený příklad 1.12. *Najděte kompromisní řešení příkladu 12 metodou cílového programování, pokud bychom chtěli, aby dosahovaný zisk byl pokud možno* 170 *tisíc Kč, spotřeba kávových bobů 2 byla* 2,5 *tuny a množství vyrobené kávy Super bylo* 7 *tun.*

Řešení. Na základě uvedených požadavků sestavíme model úlohy:

$$
\begin{aligned}
z = d_1^+ + d_1^- + d_2^+ + d_2^- + d_3^+ + d_3^- &\to \min\\
0{,}5x_1 + 0{,}25x_2 &\le 4\\
0{,}5x_1 + 0{,}75x_2 &\le 6\\
x_1 + x_2 &\ge 4\\
20x_1 + 14x_2 - d_1^+ + d_1^- &= 170\\
0{,}5x_1 + 0{,}75x_2 - d_2^+ + d_2^- &= 2{,}5\\
x_1 - d_3^+ + d_3^- &= 7\\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

Vyřešením tohoto modelu získáme tyto výsledky: $\mathbf{x} = (6{,}75; 2{,}5)$, $z = 3$, $d_2^+ = 2{,}75$ a $d_3^- = 0{,}25$. V tomto modelu představuje účelová funkce pouze odchylky od požadovaných hodnot. Například v modelu bylo požadované množství kávy Super 7 tun, skutečná hodnota proměnné x_1 je 6,75. Do požadované hodnoty chybí 0,25 tuny ($d_3^- = 0{,}25$). Zisk, spotřebu KB 2 a množství kávy Super musíme dopočítat pomocí vektoru $\mathbf{x}$ a původních účelových funkcí. Pro úplnost výsledky shrneme do tabulky.

	Účelová funkce			
	z_1 – Zisk	z_2 – KB2	z_3 – Super	Cílové programování
x_1	6	**4**	**8**	6,75
x_2	**4**	**0**	**0**	2,5
z_1 – Zisk	**176**	**80**	160	170
z_2 – KB2	**6**	**2**	4	5,25
z_3 – Super	6	**4**	**8**	6,75

Požadované hodnoty volíme opět podle výsledků kriteriálních hodnot při různých dílčích řešeních. Je možné volit požadovanou hodnotu nejlepší možnou hodnotu (například zisk 176, ale pak je proměnná d_1^+ nulová a nemá smysl ji do modelu zařazovat). Nulová bude vždy jedna z dvojice odchylkových proměnných, které jsou přiřazeny k jedné původní účelové funkci. Není možné, aby požadovaná hodnota byla překročena a nedosažena zároveň. Aby byly obě odchylkové proměnné nulové je možné v případě, že požadovaná hodnota se shoduje se skutečnou hodnotou.

Minimalizace maximální vzdálenosti od ideálního řešení

Pro správné použití této metody je nutné, aby účelové funkce byly stejného typu.

Příklad 15. *V řešeném příkladu 12 jsou tři účelové funkce (dvě maximalizační a jedna minimalizační).*

$$z_2 = 0{,}5x_1 + 0{,}75x_2 \ \rightarrow\ \min.$$

Aby byly funkce stejného typu, minimalizační lze převést na maximalizační různými způsoby, například

- *změnou znamének*

$$z_2 = 0{,}5x_1 + 0{,}75x_2 \ \rightarrow\ \min.$$

$$z_2 = -0{,}5x_1 - 0{,}75x_2 \ \rightarrow\ \max.$$

- *odečtením původní minimalizační účelové funkce od hodnoty, která by vyšla při maximalizaci stejné účelové funkce. Dejme tomu, že úlohu 12 vyřešíme pouze s druhou účelovou funkcí, ale její typ bude maximalizační (maximalizujeme spotřebu KB2).*

$$\begin{aligned} z_2^{`} = 0{,}5x_1 + 0{,}75x_2 &\ \rightarrow\ \max. \\ 0{,}5x_1 + 0{,}25x_2 &\ \leq\ 4 \\ 0{,}5x_1 + 0{,}75x_2 &\ \leq\ 6 \\ x_1 + x_2 &\ \geq\ 4 \\ x_1, x_2 &\ \geq\ 0 \end{aligned}$$

Řešením tohoto modelu je:

$$\boldsymbol{x}^{(2^{`})} = (6; 4),\, z_2^{`} = 6.$$

Nyní převedeme původní účelovou funkci minimalizující spotřebu KB2 na maximalizační:

$$z_2 = 6 - 0{,}5x_1 - 0{,}75x_2 \ \rightarrow\ \max.$$

Tato funkce vyjadřuje rozdíl mezi maximálně možnou a skutečnou spotřebou KB2. Čím bude tento rozdíl větší, tím bude menší spotřeba KB2 (vyjadřuje stejný požadavek, jako původní druhá účelová funkce).

$$\begin{aligned} z_2^{``} = 6 - 0{,}5x_1 - 0{,}75x_2 &\ \rightarrow\ \max. \\ 0{,}5x_1 + 0{,}25x_2 &\ \leq\ 4 \\ 0{,}5x_1 + 0{,}75x_2 &\ \leq\ 6 \\ x_1 + x_2 &\ \geq\ 4 \\ x_1, x_2 &\ \geq\ 0 \end{aligned}$$

Řešením tohoto modelu je:

$$\boldsymbol{x}^{(2^{``})} = (4; 0),\, z_2^{``} = 4.$$

Zisk, spotřeba KB2 a množství vyrobené kávy Super je stejné, jako při druhém dílčím řešení.

Pokud jsou účelové funkce stejného (maximalizačního) typu, přistoupíme k sestavení modelu, pomocí kterého získáme kompromisní řešení. Ideálním řešením je z hlediska funkce z_k optimální řešení $\mathbf{x}^{(k)}$. Kompromisní řešení je takový vektor $\mathbf{x}$, pro který jsou odchylky skutečného řešení $\mathbf{c}_k^T\mathbf{x}$ od ideálních hodnot $z_k^*=\mathbf{c}_k^T\mathbf{x}^k$ minimální. Odchylky lze vyjádřit vztahem

$$\frac{|z_k^* - \mathbf{c}_k^T\mathbf{x}|}{z_k^*}, k = 1, 2, \ldots, r.$$

Model je nutno rozšířit o další proměnnou x_{n+1}, která představuje horní hranici pro výše uvedené relativní odchylky. Platí pro ni:

$$x_{n+1} \geq \frac{|z_k^* - \mathbf{c}_k^T\mathbf{x}|}{z_k^*}.$$

Účelová funkce je u tohoto modelu

$$z = x_{n+1} \to \min .$$

Pokud bychom chtěli účelové funkce odlišit vahami podle jejich důležitosti, podmínka by měla tvar

$$x_{n+1} \geq \frac{v_k|z_k^* - \mathbf{c}_k^T\mathbf{x}|}{z_k^*}.$$

Řešený příklad 1.13. *Najděte kompromisní řešení příkladu 12 metodou minimalizace maximální vzdálenosti od ideálního řešení, přičemž všechna kritéria optimality jsou stejně důležitá.*

Řešení. Na základě uvedených požadavků sestavíme model úlohy:

$$\begin{aligned}
z = x_3 &\quad\to\quad \min .\\
0{,}5x_1 + 0{,}25x_2 &\quad\leq\quad 4\\
0{,}5x_1 + 0{,}75x_2 &\quad\leq\quad 6\\
x_1 + x_2 &\quad\geq\quad 4\\
\frac{176 - (20x_1 + 14x_2)}{176} &\quad\leq\quad x_3\\
\frac{4 - (6 - 0{,}5x_1 - 0{,}75x_2)}{4} &\quad\leq\quad x_3\\
\frac{8 - x_1}{8} &\quad\leq\quad x_3\\
x_1, x_2 &\quad\geq\quad 0
\end{aligned}$$

Vyřešením tohoto modelu získáme tyto výsledky: $\mathbf{x} = (6{,}29; 0)$, $z = 0{,}29$. V tomto modelu představuje účelová funkce pouze horní hranici podílu odchylky na ideálním řešení. Zisk, spotřebu KB 2 a množství kávy Super musíme dopočítat pomocí vektoru $\mathbf{x}$ a původních účelových funkcí. Pro úplnost výsledky shrneme do tabulky.

	Účelová funkce			
	z_1 – Zisk	z_2 – KB2	z_3 – Super	Minimalizace max. vzdálenosti
x_1	6	**4**	**8**	6,29
x_2	**4**	**0**	**0**	0
z_1 – Zisk	**176**	**80**	160	125,8
z_2 – KB2	**6**	**2**	4	3,14
z_3 – Super	6	**4**	**8**	6,29

Poznámka. Metodu minimalizace maximální vzdálenosti od ideálního řešení lze modifikovat. Tuto modifikaci můžeme nazvat **metoda váženého součtu**. Tato metoda je založena na principu maximalizace součtu podílů skutečných řešení na řešeních ideálních, popřípadě minimalizace součtu podílů odchylky skutečného řešení od ideálního na řešením ideálním. I v tomto případě je nutné, aby účelové funkce byly stejného typu.

Příklad 16. *Model úlohy 12 při hledání kompromisního řešení bude v případě maximalizace součtu podílů skutečných řešení na řešeních ideálních následující:*

$$\begin{aligned} z = \frac{20x_1 + 14x_2}{176} + \frac{6 - 0{,}5x_1 - 0{,}75x_2}{4} + \frac{x_1}{8} \quad &\to \quad \max. \\ 0{,}5x_1 + 0{,}25x_2 \quad &\leq \quad 4 \\ 0{,}5x_1 + 0{,}75x_2 \quad &\leq \quad 6 \\ x_1 + x_2 \quad &\geq \quad 4 \\ x_1, x_2 \quad &\geq \quad 0, \end{aligned}$$

v případě minimalizace součtu podílů odchylky skutečného řešení od ideálního na řešením ideálním následující:

$$\begin{aligned} z = \frac{176 - (20x_1 + 14x_2)}{176} + \frac{4 - (6 - 0{,}5x_1 - 0{,}75x_2)}{4} + \frac{8 - x_1}{8} \quad &\to \quad \min. \\ 0{,}5x_1 + 0{,}25x_2 \quad &\leq \quad 4 \\ 0{,}5x_1 + 0{,}75x_2 \quad &\leq \quad 6 \\ x_1 + x_2 \quad &\geq \quad 4 \\ x_1, x_2 \quad &\geq \quad 0, \end{aligned}$$

Cvičení

Cvičení 1.19. Podnik vyrábí výrobky V_1, V_2, V_3 a V_4 ze suroviny S_1, která je k dispozici v množství 10,05 t a ze suroviny S_2, které by měl spotřebovat alespoň 8,04 t. Výrobek V_1 slouží též jako polotovar pro výrobu výrobků V_2 a V_3. Spotřeba surovin (v kg) a polotovaru V_1 (v ks) na jeden kus jednotlivých výrobků je patrna z následující tabulky, která obsahuje též ceny prodaných výrobků (v Kč/ks).

	V_1	V_2	V_3	V_4
S_1	2	15	26	12
S_2	3	8	18	40
V_1	0	1	2	0
Cena	200	1500	3100	1250

Stanovte takovou strukturu výroby, při které by bylo prodejem výrobků dosahováno maximálních tržeb (z_1) a zároveň maximálního počtu výrobků V_1 (z_2) a minimální spotřeby suroviny S_1 (z_3). Použijte všechny vám známé metody.

Cvičení 1.20. Centrální kotelna nakupuje uhlí od čtyřech uhelných společností, kterým bude vytápět místní školu. Jednotlivé druhy uhlí mají následující výhřevnost, obsah popela, obsah síry a cenu.

	MUS	OKD	SČD	Sokolov
výhřevnost(MJ/kg)	19,9	30,5	17,6	14,5
obsah popela (%)	10	6,5	9,8	15
obsah síry (%)	1,3	0,6	0,77	0,5
cena (Kč/q)	269	495	315	219

Cílem kotelny je topit směsí uhlí, která bude co nejlevnější, bude mít nejnižší obsah síry a bude mít co největší výhřevnost. Regulativa udávají, že spalované uhlí může mít obsah síry v průměru maximálně 1%, musí zajistit výhřevnost alespoň 1200 GJ, přičemž průměrná výhřevnost má být maximálně 25 GJ, a obsah popela v průměru maximálně 8%. Z kapacitních důvodů nesmí kotelna pořídit více než 50 tun uhlí. Kolik uhlí má být od jednotlivých společností objednáno? Sestavte model úlohy a získejte všechna dílčí řešení. Potom aplikujte vám známé metody pro získání kompromisních řešení.

Výsledky

Výsledky 1.19
Model úlohy: x_1 – počet vyrobených V_1 (ks),
x_2 – počet vyrobených V_2 (ks),
x_3 – počet vyrobených V_3 (ks),
x_4 – počet vyrobených V_4 (ks),

$$
\begin{aligned}
z_1 = 200x_1 + 1300x_2 + 2700x_3 + 1250x_4 &\;\rightarrow\; \max \\
z_2 = x_1 &\;\rightarrow\; \max \\
z_3 = 2x_1 + 15x_2 + 26x_3 + 12x_4 &\;\rightarrow\; \min \\
2x_1 + 15x_2 + 26x_3 + 12x_4 &\;\leq\; 10050 \\
3x_1 + 8x_2 + 18x_3 + 40x_4 &\;\geq\; 8040 \\
-x_1 + x_2 + 2x_3 &\;\leq\; 0 \\
x_i &\;\geq\; 0, i = 1, 2, 3, 4
\end{aligned}
$$

Aby bylo možné řešit model simplexovou metodou, nebrali jsme v úvahu podmínku celočíselnosti. Kompromisní řešení uvedená v tabulce byla získána za těchto podmínek:

- váhy pro konvexní kombinaci byly zvoleny $0,6;\ 0,2;\ 0,2$;
- u metody záměny účelové funkce za omezující podmínky byly jako kritérium optimality ponechány tržby, u výroby V_1 byl požadavek alespoň 3000 kusů a u spotřeby S_1 maximálně 8000 kg;
- u metody cílového programování byly požadovány tržby pokud možno 1000000 Kč, počet výrobků V_1 3000 kusů a spotřeba suroviny S_1 6000 kg.

	Dílčí řešení			Kompromisní řešení			
	z_1	z_2	z_3	Konv.komb.	Záměna	Cílové pr.	Min. max. vzd.
V_1	0	5025	0	1005	3000	3000	2791,67
V_2	0	0	0	0	0	0	0
V_3	0	0	0	0	0	0	0
V_4	837,5	0	201	542,7	166,67	320	18,61
z_1	1046875	1005000	251250	879375	808333,31	1000000	581597,22
z_2	0	5025	0	1005	3000	3000	3000
z_3	10050	10050	2412	8522,4	8000	9840	5806,67

Poznámka. Při stanovení jiných vah, jiných požadovaných hodnot atd. získáte jiné kompromisní řešení.

Výsledky 1.20
Model úlohy:
x_1 – množství uhlí objednané od MUS (t),
x_2 – množství uhlí objednané od OKD (t),
x_3 – množství uhlí objednané od SČD (t),
x_4 – množství uhlí objednané od Sokolov (t),

$$\begin{aligned}
z_1 = 2690x_1 + 4950x_2 + 3150x_3 + 2190x_4 &\ \rightarrow\ \min\\
z_2 = 1,3x_1 + 0,6x_2 + 0,77x_3 + 0,5x_4 &\ \rightarrow\ \min\\
z_3 = 19,9x_1 + 30,5x_2 + 17,6x_3 + 14,5x_4 &\ \rightarrow\ \max\\
0,3x_1 - 0,4x_2 - 0,23x_3 - 0,5x_4 &\ \leq\ 0\\
19,9x_1 + 30,5x_2 + 17,6x_3 + 14,5x_4 &\ \geq\ 1200\\
-5,1x_1 + 5,5x_2 - 7,4x_3 - 10,5x_4 &\ \leq\ 0\\
2x_1 - 1,5x_2 + 1,8x_3 + 7x_4 &\ \leq\ 0\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\ \leq\ 50\\
x_i &\ \geq\ 0, i = 1,2,3,4
\end{aligned}$$

	Dílčí řešení (účelová funkce)		
	z_1 – cena	z_2 – síra	z_3 – výhřevnost
x_1	5,66	0	0
x_2	26,53	27,78	28,94
x_3	15,81	19,21	20
x_4	0	1,01	1,06
z_1 – cena	196339,83	200228,39	208571,24
z_2 – síra	35,45	31,96	33,23
z_3 – výhřevnost	1200	1200	1250

1.9 Distribuční úlohy – speciální úlohy LP

1.9.1 Formulace distribuční (dopravní) úlohy

Je dáno m dodavatelů se známým počtem jednotek určitého produktu a_i, $(i = 1, 2, \ldots, m)$ a n spotřebitelů, kteří požadují tento produkt v množství b_j jednotek $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Přitom úhrn kapacit dodavatelů se rovná úhrnu požadavků spotřebitelů, tedy platí:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Dále je dáno mn čísel c_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$ a $j = 1, 2, \ldots, n$, která představují vzdálenosti od i-tého dodavatele k j-tému odběrateli nebo náklady na přepravu jedné jednotky produktu od i-tého dodavatele k j-tému odběrateli, apod. Čísla a_i a b_j nazýváme okrajové podmínky a čísla c_{ij} jsou sazby. Úkolem je určit takový plán přepravy, aby:

1. kapacita každého dodavatele byla vyčerpána,

2. požadavek každého odběratele byl uspokojen,

3. celkový rozsah přepravy (tkm) nebo celkové náklady na přepravu byly minimální.

Zadání dopravní (distribuční) úlohy lze provést v přehledné tabulce 1.15. Neznámé veličiny

Tabulka 1.15: Obecné zadání distribuční úlohy

	O_1	O_2	$\ldots$	O_n	
D_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	$\ldots$	c_{1n} x_{1n}	a_1
D_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	$\ldots$	c_{2n} x_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
D_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	$\ldots$	c_{mn} x_{mn}	a_m
	b_1	b_2		b_n	

$x_{ij}(i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$ představují přepravovaná množství od i-tého dodavatele k j-tému spotřebiteli. Pokud je $x_{ij} > 0$, pak říkáme, že políčko (i, j) je obsazené.

Jak již bylo uvedeno, distribuční úlohy jsou speciální případ úloh lineárního programování a lze je popsat modelem tvořeným omezujícími podmínkami a účelovou funkcí (viz kapitola Lineární programování). Model distribučních úloh je tvořen:

- Omezujícími podmínkami pro všechny dodavatele a jejich kapacity

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} &= a_1 \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} &= a_2 \\ \vdots \quad &\vdots \quad \vdots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} &= a_m \end{aligned}$$

neboli

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \quad = \quad a_i; i = 1, 2, \ldots, m,$$

omezujícími podmínkami pro všechny odběratele a jejich požadavky

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} &= b_1 \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} &= b_2 \\ \vdots \quad &\vdots \quad \vdots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} &= b_n \end{aligned}$$

neboli

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \quad = \quad b_j; j = 1, 2, \ldots, n,$$

- podmínkami nezápornosti

$$x_{ij} \quad \geq \quad 0; i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n,$$

- účelovou funkcí

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \quad \rightarrow \quad \min .$$

V úloze je uvažováno m dodavatelů a n odběratelů. Model obsahuje mn neznámých a $m+n$ rovnic, z nichž pouze $m+n-1$ jich je lineárně nezávislých. V základním přípustném řešení je tedy maximálně $m+n-1$ obsazených políček. Pokud je obsazeno právě $m+n-1$ řešení je nedegenerované, pokud je jich obsazeno méně, řešení je degenerované. Matice koeficientů těchto $m+n-1$ základních neznámých musí být regulární. Z tohoto požadavku vyplývá pravidlo pro výběr obsazených políček: jejich spojením svislými a vodorovnými čarami nesmí vzniknout uzavřený obvod.

Příklad 17. ***Základní řešení, nedegenerované***

+		+
	+	+
+		

Řešení je základní, neboť nelze pomocí svislých a vodorovných čar uzavřít obvod a je obsazeno přesně $m+n-1$, proto jde o řešení nedegenerované.

Příklad 18. ***Nezákladní řešení***

	+	
+		+
+		+

Řešení je nezákladní, neboť lze pomocí svislých a vodorovných čar uzavřít obvod.

Příklad 19. ***Základní řešení, degenerované***

		+
+		
+	+	

Řešení je základní, neboť nelze pomocí svislých a vodorovných čar uzavřít obvod a je obsazeno méně než $m + n - 1$, proto jde o řešení degenerované.

Příklad 20. ***Nezákladní řešení***

	+	
+	+	+
+		+

Řešení je nezákladní, neboť lze pomocí svislých a vodorovných čar uzavřít obvod.

1.9.2 Vyváženost dopravního problému

Podmínka řešitelnosti dopravního problému je vyváženost souhrnu kapacit dodavatelů a požadavků odběratelů,

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Před řešením distribuční úlohy vždy zkontrolujeme vyváženost, zda se rovná součet kapacit součtu požadavků.

Nevyvážené dopravní úlohy - součet požadavků a kapacit se liší, tzn.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Mohou nastat dva případy:

- Kapacity dodavatelů jsou menší než požadavky odběratelů,

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Zadávací tabulku pak rošíříme o řádek, do kterého zavedeme fiktivního dodavatele, který "dodá to, co se nedostává". Ve skutečnosti dále bude u některých odběratelů jejich požadavek neuspokojen (dodává jim fiktivní dodavatel).

Fiktivní dodavatel	0	0	0	0	$(\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i)$

Do řádku fiktivního dodavatele se zavádí nulové sazby, to znamená, že obsazením těchto políček nijak nezměníme výsledný rozsah přepravy (tkm nebo náklady). Pokud máme preferovaného odběratele (nesmí se stát, že jeho požadavek nebude uspokojen), musíme mu dodat od skutečných dodavatelů. Fiktivnímu dodavateli dáme v příslušném poli prohibitivní sazbu, což bude značně vysoké kladné číslo (jedná se o minimalizační úlohu) a tím je zajištěno uspokojení odběratele od skutečných dodavatelů.

- Kapacity dodavatelů jsou vyšší než požadavky odběratelů,

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Pro tento případ zavedeme fiktivního odběratele, tzn. tabulku rozšíříme o jeden sloupec. Tento fiktivní odběratel "odebere" přebývající množství, ve skutečnosti toto množství zbude, neodebere ho nikdo. Ani zde se rozsah přepravy ani náklady nezmění.

FO
0
0
0
0
$(\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j)$

Pokud máme preferovaného dodavatele, opět zavedeme prohibitivní sazby. Tyto prohibitivní sazby zajistí, že tento dodavatel nebude dodávat fiktivnímu odběrateli (část produkce by mu zbyla).

1.9.3 Metody pro řešení dopravního problému

Přestože dopravní problém, jakožto úlohu lineárního programování, lze řešit univerzální simplexovou metodou, zvláštnosti jeho matematického modelu vedly k vypracování speciálních, výhodnějších metod pro jeho řešení. Všechny tyto metody mají společný postup (podobný, jaký jste poznali u simplexové metody), který spočívá v provedení následujících kroků:

- získání výchozího základního přípustného řešení,
- test optima,
- přechod k jinému základnímu řešení s lepší hodnotou účelové funkce, pokud testované řešení nebylo optimální.

Všechny metody budou ilustrovány na následujícím příkladu.

Příklad 21. *Stanovte optimální plán rozvozu stavebního materiálu ze tří podniků na čtyři stavby. Kapacity dodavatelů (t), požadavky odběratelů (t) a vzdálenosti mezi jednotlivými dodavateli a odběrateli (km) jsou v následující tabulce. Kritériem optimality je minimální počet tkm.*

	O_1	O_2	O_3	O_4	
D_1	6	10	4	2	100
D_2	8	14	10	6	140
D_3	4	18	12	8	180
	60	80	80	200	

1.9.4 Metody pro získání základního, výchozího, přípustného řešení

- Metoda severozápadního rohu
  Vždy poskytne základní řešení, neboť políčka jsou obsazována "schodovitě". Jejím hlavním nedostatkem je, že nepřihlíží ke vzdálenostem mezi dodavateli a odběrateli.

  Řešený příklad 1.14. *Pro příklad 21 získejte základní, výchozí, přípustné řešení metodou severozápadního rohu.*

  Řešení. S obsazováním políček začínáme v levém horním rohu. Hodnota této neznámé $x_{11} = \min(100, 60) = 60$ (menší z okrajových podmínek). Tím je uspokojen požadavek prvního odběratele, proto tento sloupec proškrtneme. Dále určujeme hodnotu proměnné $x_{12} = \min(100 - 60, 80) = 40$. Obsazením tohoto políčka je vyčerpána kapacita prvního dodavatele, zbytek prvního řádku proškrtneme. Stejným způsobem pokračujeme od levého horního rohu k pravému dolnímu rohu (od každého obsazeného pole buď dolů nebo napravo) do vyčerpání všech kapacit a uspokojení všech požadavků.

	O_1	O_2	O_3	O_4	
D_1	6 60	10 40	4 –	2 –	100
D_2	8 –	14 40	10 80	6 20	140
D_3	4 –	18 –	12 –	8 180	180
	60	80	80	200	

  Z prvního podniku (D_1) bude na první stavbu O_1 dodáno 60 tun materiálu a na druhou stavbu 40 tun materiálu. Z D_2 do O_2 40 tun, do O_3 80 tun a do O_4 20 tun materiálu. Z D_3 do O_4 180 tun materiálu. Hodnota účelové funkce (celkový rozsah přepravy – počet tkm) vypočteme takto:

$$z = 60 * 6 + 40 * 10 + 40 * 14 + 80 * 10 + 20 * 6 + 180 * 8 = 3680 tkm$$

- Metody indexové
  Jsou to aproximativní metody, které dávají řešení blízké optimu, někdy též optimální.

  – Vzestupná
    Sazby (zde vzdálenosti mezi dodavateli a odběrateli) seřadíme od nejmenších k největším a v tomto pořadí obsazujeme příslušná políčka vždy maximálně možnou hodnotou (do výše některé omezující podmínky – kapacity dodavatele nebo požadavku odběratele).

    Pokud jsou ve více políčkách stejné sazby, přednost dáme políčku, které můžeme obsadit větší hodnotou.

    Řešený příklad 1.15. *Pro příklad 21 získejte základní, výchozí, přípustné řešení indexovou metodou vzestupnou.*

    Řešení. S obsazováním políček začínáme v políčku s nejnižší sazbou (políčko $(1, 4)$ – sazba 2). Hodnota této neznámé $x_{14} = \min(100, 200) = 100$ (menší z okrajových podmínek). Tím je vyčerpána kapacita prvního dodavatele, proto ostatní políčka v prvním řádku proškrtneme. Další nejnižší sazba 4 je v políčku $(3, 1)$, proto určujeme hodnotu proměnné $x_{31} = \min(180 - 100, 60) = 60$. Obsazením tohoto políčka je uspokojen požadavek prvního odběratele, zbytek prvního sloupce proškrtneme. Stejným způsobem pokračujeme, vybíráme vždy nejnižší možnou sazbu a políčka obsazujeme v pořadí $(2, 4), (2, 3), (3, 3), (3, 2)$ do vyčerpání všech kapacit a uspokojení všech požadavků.

	O_1	O_2	O_3	O_4	
D_1	6 –	10 –	4 –	2 100	100
D_2	8 –	14 –	10 40	6 100	140
D_3	4 60	18 80	12 40	8 –	180
	60	80	80	200	

Z prvního podniku (D_1) bude na čtvrtou stavbu O_4 dodáno 100 tun materiálu. Z D_2 do O_3 40 tun, do O_4 100 tun materiálu. Z D_3 do O_1 60 tun, do O_2 80 tun a do O_3 40 tun materiálu. Hodnota účelové funkce (celkový rozsah přepravy – počet tkm) vypočteme takto:

$$z = 100 * 2 + 40 * 10 + 100 * 6 + 60 * 4 + 80 * 18 + 40 * 12 = 3360tkm$$

– Sestupná
  Sazba seřadíme od největších k nejmenším a políčka postupně proškrtáváme, dokud proškrtávání nebude vadit splnění okrajových podmínek.

Řešený příklad 1.16. *Pro příklad 21 získejte základní, výchozí, přípustné řešení indexovou metodou sestupnou.*

Řešení. Nejvyšší sazba je 18, políčko s touto sazbou proškrtneme. Další nejnižší sazba je 14, i toto políčko ještě můžeme proškrtnout. Ve druhém sloupci zbývá poslední políčko – okrajová podmínka pro toto políčko (pro druhého odběratele) je 80 tun a v prvním řádku je okrajová podmínka pro prvního dodavatele 100 tun (zde je prázdných políček více, proto je pro nás limitující, jestli lze do posledního možného políčka ve druhém sloupci umístit celé požadované množství – 80 tun). Toto je možné, hodnota této neznámé $x_{12} = \min(100, 80) = 80$ (menší z okrajových podmínek). Tím je splněn požadavek druhého odběratele, ostatní políčka ve druhém sloupci jsou již poškrtnutá. Další nejvyšší sazba je 12, i políčko s touto sazbou můžeme bez problémů vyškrtnout. Další nejvyšší sazba je 10 v políčku $(2, 3)$. Kdybychom toto políčko proškrtli, zbylo by ve třetím sloupci pouze jedno pole, do kterého bychom (vzhledem k požadavkům třetího odběratele) měli umístit množství 80 tun. Toto ale není možné vzhledem ke kapacitě prvního dodavatele, která je nyní již jen 20 tun (80 tun z její původní kapacity již odebral druhý odběratel). Proto alespoň zbylých 20 tun pro třetího odběratele dodá první dodavatel (vzdálenost mezi nimi je jen 4 km) a zbytek musí dodat druhý dodavatel (i přes větší vzdálenost – 10 km). Stejným způsobem pokračujeme, vybíráme vždy nejvyšší sazbu a políčka proškrtáváme, ale musíme stále hlídat kapacity a požadavky. Políčka jsou obsazována dále v pořadí $(2, 4), (3, 4), (3, 1)$ do vyčerpání všech kapacit a uspokojení všech požadavků.

	O_1	O_2	O_3	O_4	
D_1	6 –	10 80	4 20	2 –	100
D_2	8 –	14 –	10 60	6 80	140
D_3	4 60	18 –	12 –	8 120	180
	60	80	80	200	

Z prvního podniku (D_1) bude na druhou stavbu O_2 dodáno 80 tun a na třetí stavbu 20 tun materiálu. Z D_2 do O_3 60 tun, do O_4 80 tun materiálu. Z D_3 do O_1 60 tun a do O_4 120 tun materiálu. Hodnota účelové funkce (celkový rozsah přepravy – počet tkm) vypočteme takto:

$$z = 80 * 10 + 20 * 4 + 60 * 10 + 80 * 6 + 60 * 4 + 120 * 8 = 3160tkm$$

- Vogelova aproximační metoda
  Zde se neberou v úvahu absolutní velikosti sazeb. Přednostně se obsazují pole s tou malou sazbou, od které se nejblíže vyšší sazba v odpovídající řadě (tj. řádku nebo sloupci) co nejvíce liší. To znamená obsazujeme přednostně ta pole s malou sazbou, která mají k druhé nejbližší sazbě nejdále. Postup je následující:

  – v každé řadě a v každém sloupci uděláme rozdíl mezi dvěma nejnižšími kladnými sazbami (pokud jsou v řádku nebo sloupci dvě stejně nízké sazby, počítáme rozdíl mezi nimi),

  – v řadě s nejvyšším rozdílem najdeme pole s nejnižší kladnou sazbou a to přednostně obsadíme maximálně možným množstvím. Pokud tento rozdíl vyjde stejný pro více polí, hledáme sedlový bod (pole s nejmenší sazbou z hlediska řádku i sloupce), pokud nenalezneme sedlový bod, obsazujeme políčko s nejnižší sazbou ve sloupci nebo řádku,

  – po uspokojení řádkové (sloupcové) okrajové podmínky zbývající políčka proškrtneme, přepočítáme řádkové a sloupcové rozdíly a postup opakujeme až do vyřešení úlohy.

  Řešený příklad 1.17. *Pro příklad 21 získejte základní, výchozí, přípustné řešení Vogelovou aproximační metodou.*

  Řešení. Rozdíly mezi dvěma nejnižšími kladnými sazbami pro každý řádek a sloupec si zapisujeme vedle tabulky a pod tabulku. Vybereme největší rozdíl – třetí sloupec, rozdíl 6 a v tomto sloupci vybíráme nejnižší sazbu – sazba 4 v políčku $(1, 3)$. Sem umístíme maximální možné množství $x_{13} = \min(100, 80) = 80$. Tím je uspokojen požadavek třetího odběratele, zbylá políčka ve třetím sloupci vyškrtneme a pokračujeme znovu počítáním rozdílů mezi dvěma nejnižšími sazbami ve sloupcích a řádcích (výsledky opět zapisujeme vedle tabulky a pod tabulku). Nyní získáme stejný rozdíl 4 ve dvou sloupcích a dvou řádcích. Sedlový bod se pak nachází v políčku $(1, 4)$. Sem umístíme možné maximum 20 tun ($x_{14} = \min(100 - 80, 80) = 20$). Ostatní políčka v prvním řádku proškrtneme – kapacita prvního dodavatele je vyčerpána. Stejným způsobem pokračujeme, vybíráme vždy nejnižší možnou sazbu a políčka obsazujeme v pořadí $(3, 1), (3, 4), (2, 4), (2, 2)$ do vyčerpání všech kapacit a uspokojení všech požadavků.

	O_1	O_2	O_3	O_4		
D_1	6 –	10 –	4 80	2 20	100	2,4,–,–
D_2	8 –	14 80	10 –	6 60	140	2,2,2,8
D_3	4 60	18 –	12 –	8 120	180	4,4,4,10
	60	80	80	200		
	2,2,4,–	4,4,4,4	6,–,–,–	4,4,2,2		

Z prvního podniku (D_1) bude na třetí stavbu O_3 dodáno 80 tun, na čtvrtou stavbu O_4 dodáno 20 tun materiálu. Z D_2 do O_2 80 tun, do O_4 60 tun materiálu. Z D_3 do O_1 60 tun a do O_4 120 tun materiálu. Hodnota účelové funkce (celkový rozsah přepravy – počet tkm) vypočteme takto:

$$z = 80 * 4 + 20 * 2 + 80 * 14 + 60 * 6 + 60 * 4 + 120 * 8 = 3040tkm$$

1.9.5 Metody pro optimálního řešení

- MODI metoda (MOdifikovaná DIstribuční metoda)
  Použití MODI metody vyžaduje znalost základního přípustného řešení. MODI metodou prověřujeme, zda je výchozí řešení optimální. Pokud není řešení optimální, touto metodou ho získáme. MODI metoda vychází z duality (viz subkapitola 1.7). Všechna omezení distribuční úlohy jsou ve tvaru rovnic a jedná se o úlohy minimalizační, žádná z duálních proměnných nemusí splňovat podmínky nezápornosti a všechna omezení duálu jsou typu $\leq$. Duální proměnné, které se vztahují k dodavatelům, označujeme $u_1, u_2, \ldots, u_m$ a duální proměnné, které se vztahují k odběratelům označujeme $v_1, v_2, \ldots, v_n$.
  Zápis primární a duální distribuční úlohy
  Primární model

$$\begin{aligned} z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} &\rightarrow \min \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= a_i; i = 1, 2, \ldots, m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} &= b_j; j = 1, 2, \ldots, n \\ x_{ij} &\geq 0 \end{aligned}$$

  Duální model

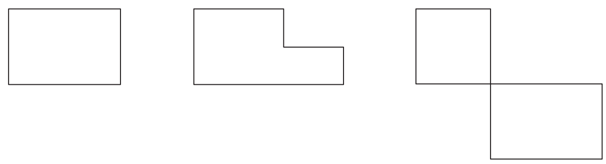
$$\begin{aligned} z = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j &\rightarrow \max \\ u_i &\in \mathbb{R}; i = 1, 2, \ldots, m \\ v_j &\in \mathbb{R}; j = 1, 2, \ldots, n \\ u_i + v_j &\leq c_{i,j} \end{aligned}$$

  Pro kladnou hodnotu x_{ij} je $u_i + v_j = c_{ij}$ (v soustavě je splněno tolik omezení ve tvaru rovnic, kolik je obsazených políček v řešení původní úlohy). Z těchto rovnic lze určit hodnoty duálních proměnných. U nedegenerovaného řešení dopravního problému je obsazeno

$m+n-1$ políček, počet duálních proměnných je $m+n$ můžeme jednu duální proměnnou libovolně zvolit (více neznámých než počet rovnic).

Postup při MODI metodě

1. Výchozí řešení je nedegenerované (je obsazeno $m+n-1$ políček). Pro obsazená pole musí platit vztah $u_i + v_j = c_{ij}$. Výpočet se provádí přímo v tabulce se řešením dopravního problému. Vpravo od tabulky se přidá sloupeček s proměnnými u_i a pod tabulku se přidá řádek s proměnnými v_j. Jednu z těchto duálních proměnných zvolíme libovolně (vhodné je volit nulu). Ostatní duální proměnné dopočítáme na základě výše uvedeného vztahu duálních proměnných a sazby pro obsazená pole.
2. Ve všech neobsazených políčkách porovnáme součet $u_i + v_j$ s příslušnou sazbou c_{ij}. Pokud ve všech neobsazených polích platí $u_i+v_j \leq c_{ij}$, prověřované řešení je optimální (u minimalizační úlohy). Pokud v některém neobsazeném poli je tato podmínka splněna ve tvaru rovnice, existuje rovnocenné optimální řešení (hodnota účelové funkce je v obou případech stejná). Pokud tato podmínka není pro některé pole splněna, řešení není optimální a lze je zlepšit obsazením tohoto pole. Jestliže nastane případ, že tato nerovnost není splněna ve více políčkách, vybereme to, ve kterém je rozdíl součtu duálních proměnných a sazby největší. Pole obsazujeme maximálním možným množstvím v Dantzigově uzavřeném cyklu. Dantzigův cyklus začíná v neobsazeném poli, které nesplňuje výše zmíněnou podmínku. Je tvořen vodorovnými a svislými čarami, které se lámou v obsazených políčkách a končí opět ve výchozím neobsazeném poli. Ke každému neobsazenému políčku v nedegenerovaném řešení existuje jeden uzavřený Dantzigův cyklus. Tyto cykly mohou mít různé tvary:



Obrázek 1.14: Příklad tvarů Dantzigových cyklů

Po vyznačení cyklu do políček, kde se čára láme, vepíšeme znaménka. Začneme v neobsazeném políčku znaménkem "+" a pokračujeme v dalších rozích cyklu střídavě "−" a "+". Potom vybíráme z přepravovaných množství x_{ij} v políčkách označených "−"nejmenší a to přesouváme (v políčkách označených "+" přičítáme a v políčkách označených "−" odečítáme). Na takto zlepšené řešení opět aplikujeme MODI metodu. Postup opakujeme tak dlouho, dokud není splněn test optima.
Postup při MODI metodě budeme ilustrovat na řešeném příkladu 1.16. Ověříme optimalitu řešení získaného indexní metodou sestupnou. Řešení úlohy touto metodou je v následující tabulce. Hodnota účelové funkce je 3 160 tkm. Nejprve jsme zvolili proměnnou u_1 nulovou. Potom jsme dopočítali ostatní duální proměnné podle vztahu $u_i + v_j = c_{ij}$ (pro obsazená pole). Pro každé neobsazené pole se pak porovnává součet příslušných duálních proměnných. Musí platit $u_i + v_j \leq c_{ij}$. Řešení není optimální, neboť v poli $(2,2)$ tento vztah neplatí. Proto z něho vytvoříme Dantzigův cyklus (viz přerušovaná čára). Označíme rohy cyklu znaménky (začneme v poli $(2,2)$ znaménkem "+" , v poli $(2,3)$ "−", v poli $(1,3)$ "+" a v poli $(1,2)$ "−"). V políčkách označených "−" vybereme menší přepravované množství ($\min(60,80) = 60$), což je maximálně možné přesouvané množství. Provedeme přesun a znovu ověříme, zda je řešení optimální provedeme přesun podle již zmíněných pravidel.

	O_1	O_2	O_3	O_4		u_i
D_1	- 6 –	- 10 80	4 20 +	- 2 –	100	0
D_2	- 8 –	+2 14 + –	10 60 -	6 80	140	6
D_3	4 60	0 18 –	0 12 –	8 120	180	8
	60	80	80	200		
v_j	-4	10	4	0		

Obrázek 1.15: Ověření optimality řešení příkladu 1.16

Hodnota účelové funkce se vypočítá buď z nového řešení podle vztahu $z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$

	O_1	O_2	O_3	O_4		u_i
D_1	- 6 –	10 20	4 80	0 2 –	100	0
D_2	- 8 –	14 60	10 –	6 80	140	4
D_3	4 60	- 18 –	- 12 –	8 120	180	6
	60	80	80	200		
v_j	-2	10	4	2		

nebo snížíme hodnotu staré účelové funkce o přesouvané množství krát rozdíl, o který nebyla splněna nerovnost. V našem příkladu z = 3160 - 2*60 = 3040. Nalezené řešení je optimální. V políčku $(1,4)$ platí $u_i + v_j = c_{ij}$, tedy existuje rovnocenné optimální řešení (viz řešený příklad 1.17 - řešení VAM) se stejnou hodnotou účelové funkce.

Využití duálních proměnných u_i a v_j

1. Využití v MODI metodě při zjišťování optimality řešení.
2. Ocenění dodavatelů a odběratelů z hlediska změn jejich kapacit a požadavků. Vzhledem k tomu, že jednu z duálních proměnných volíme, musíme uvažovat vždy dva dodavatele nebo dva odběratele nebo jednoho dodavatele a jednoho odběratele. Například dodavatel D_x má kapacitu a_x. Dodavatel D_y má kapacitu a_y. Jestliže zvýšíme kapacitu D_x o jednotku a snížíme kapacitu D_y o jednotku, účelová funkce se změní o rozdíl $u_x - u_y$. Z hlediska minimalizace účelové funkce je nejvýhodnější rozšiřovat kapacitu dodavatele, kterému připadá nejnižší hodnota u. Naopak nejvýhodnější je snižovat kapacitu dodavatele, kterému připadá nejvyšší hodnota u. Stejné pravidlo platí i pro odběratele. Při zvýšení (snížení) kapacity x-tého dodavatele a y-tého spotřebitele o jednotku se hodnota účelové funkce změní $u_x + v_y(-u_x - v_y)$.

   Příklad 22. Chceme-li snížit hodnotu účelové funkce (zjištěnou metodou sestupnou a *následně MODI metodou) pomocí změny kapacit dodavatelů, provedeme to následujícím způsobem: Nejnižší hodnota duální proměnné u je u prvního dodavatele, proto je výhodné jeho kapacitu zvýšit. Nejvyšší hodnota duální proměnné u je u třetího dodavatele, proto je výhodné jeho kapacitu snížit. Původní kapacita je* $a_1 = 100$ *a* $a_3 = 180$*. Po změně bude kapacita* $a_1 = 101$ *a* $a_3 = 179$ *a účelová funkce poklesne o 6 jednotek* $(0 - 6 = -6)$*. Stejné platí pro odběratele, nejnižší hodnota duální proměnné v je u prvního odběratele a nejvyšší hodnota duální proměnné v je u druhého odběratele. Původní požadavek je* $b_1 = 60$ *a* $b_2 = 80$*. Po změně budou požadavky* $b_1 = 61$ *a* $b_2 = 79$ *a účelová funkce poklesne o 12 jednotek* $(-2 - 10 = -12)$*. V případě zvyšování kapacity jednoho dodavatele a jednoho odběratele vybereme opět dodavatele i odběratele s nejnižšími hodnotami duálních proměnných (prvního dodavatele s kapacitou* $a_1 = 100$ *jednotek a prvního odběratele s požadavkem* $b_1 = 60$ *jednotek). Po změnách bude* $a_1 = 101$ *a* $b_1 = 61$ *a hodnota účelové funkce se sníží o dvě jednotky* $(0 + (-2) = -2)$*.*

3. Výpočet koeficientů zhoršení účelové funkce.
   Z matematického hlediska optimální výsledek je často nutné při řešení praktických úloh upravit (výskyt dodatečného požadavku na nějakou neuskutečněnou objednávku, neuspokojení požadavků při nevyváženém dopravním problému je nutné rozdělit mezi více odběratelů, atd.). Při těchto úpravách, při hledání suboptimální varianty, dochází ke zvýšení hodnoty účelové funkce. Aby toto zhoršení optimálního výsledku bylo co nejmenší, je potřeba získat co nejvíce informací o nevyužitých spojích. Tyto informace získáme pomocí koeficientu zhoršení a pomocí průtočnosti jednotlivých tras. Koeficient zhoršení ukazuje, o kolik se zhorší velikost účelové funkce při přepravě jedné jednotky po nevyužité cestě (pro spoj i, j označujeme r_{ij}). Vhodné je při dodatečných úpravách obsazovat spoje s nízkým koeficientem zhoršení. Koeficienty zhoršení se počítají podle vztahu $\|u_i + v_j - c_{ij}\|$.

Příklad 23. *Pro řešení získané VAM spočítáme koeficienty zhoršení.*

	O_1	O_2	O_3	O_4		u_i
D_1	6 –	10 –	4 80	2 20	100	2
D_2	8 –	14 80	10 –	6 60	140	6
D_3	4 60	18 –	12 –	8 120	180	8
	60	80	80	200		

v_j	-4	8	2	0

Koeficienty zhoršení pro všechna neobsazená pole obsahuje následující tabulka.

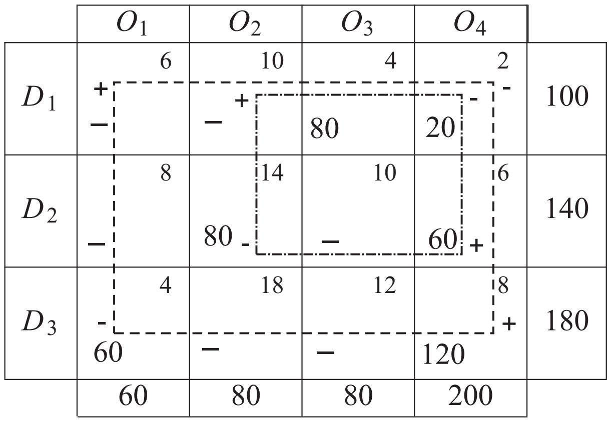
(i,j)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,3)$	$(3,2)$	$(3,3)$
r_{ij}	8	0	6	2	2	2

Z koeficientů zhoršení vyplývá, že pokud bychom přepravili od prvního dodavatele k druhému odběrateli jednu jednotku, hodnota účelové funkce by se nezhoršila. K největšímu zhoršení hodnoty účelové funkce by došlo při přepravě mezi prvním dodavatelem a prvním odběratelem.

Využití Dantzigových cyklů

1. Přesuny při získávání optimálního řešení MODI metodou.
2. Při výpočtech průtočnosti jednotlivých neobsazených spojů.
   Průtočnost je maximálně možné množství, které lze po nevyužité cestě přepravit. Označujeme ji p_{ij} a je žádoucí obsazovat spoje s vysokou průtočností. Při zjišťování průtočnosti je nutné najít pro každé neobsazené pole Dantzigův cyklus. Průtočnost je maximální množství, které v cyklu lze přesunout.

   Příklad 24. V řešení dopravní úlohy získané metodou VAM budeme zjišťovat průtočnosti pro všechna neobsazená pole. V následující tabulce jsou znázorněny dva Dantzigovy cykly, a to pro políčko $(1,1)$ *a* $(1,2)$*. Průtočnosti všech neobsazených políček*



Obrázek 1.16: Ověřování průtočnosti řešení příkladu 1.17

obsahuje následující tabulka.

(i,j)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,3)$	$(3,2)$	$(3,3)$
p_{ij}	20	20	60	60	80	80

Z hlediska průtočnosti je nejvýhodnější při dodatečném využívání dosud nevyužitých spojů (tras) využívat trasy mezi třetím dodavatelem a druhým nebo třetím odběratelem.

Hledání perspektivních spojů

Pro nalezení perspektivních spojů bereme v úvahu jak koeficienty zhoršení, tak průtočnost.

Příklad 25. Pro všechna neobsazená pole (pro řešení získané VAM), budeme zjišťovat perspektivnost jednotlivých tras. V následující tabulce jsou všechny údaje a na jejich základě je možné tvrdit, že perspektivní jsou spoje $(3,2)$ *a* $(3,3)$*. Oba mají nízké koeficienty zhoršení a vysokou průtočnost.*

(i,j)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,3)$	$(3,2)$	$(3,3)$
r_{ij}	8	0	6	2	2	2
p_{ij}	20	20	60	60	80	80

1.9.6 Degenerace v dopravním problému

Degenerace může být z praktického hlediska žádoucí, neboť doprava je více koncentrovaná po menším počtu cest. MODI metoda však vyžaduje přesně $m+n-1$ obsazených políček, tedy nedegenerované řešení. Pokud je řešení degenerované, musíme degeneraci formálně odstranit. Degeneraci odstraňujeme pomocí proměnné ε, což je zanedbatelně malé číslo (množství), které se neprojeví v účelové funkci. Je dodáváno do řešení jen z výpočetních důvodů. Toto zanedbatelně malé množství umístíme do některého neobsazeného políčka tak, aby řešení bylo základní a nedegenerované (počítáme s ním jako s kterýmkoliv jiným číslem).

Vznik degenerovaného řešení:

1. degenerace ve výchozím řešení - současně vyčerpáme kapacitu dodavatele a uspokojíme požadavek spotřebitele, proškrtneme zároveň řádek i sloupec. Aby k tomuto nedošlo, zvýšíme jednu z okrajových podmínek o ε, takže můžeme proškrtnout jen sloupec nebo jen řádek

   Řešený příklad 1.18. *Vyřešte distribuční úlohu zadanou v následující tabulce metodou indexovou vzestupnou.*

5 –	3 –	1 –	30
2 –	8 –	4 –	50
25	25	30	

   Řešení. Pole $(1, 3)$ s nejnižší sazbou obsadíme maximálním možným množstvím 30. Tím bychom vyčerpali kapacitu dodavatele i uspokojili požadavek odběratele. Pokud bychom proškrtli jak řádek, tak sloupec, došlo by k degeneraci (optimalitu řešení by nebylo možné ověřit MODI metodou). Proto proškrtneme buď pouze řádek nebo pouze sloupec (my jsme si vybrali sloupec). Okrajovou podmínku u prvního řádku jsme zvýšili o zanedbatelně malé množství ε. Potom jsme úlohu řešili dále, tzn. vybrali další nejmenší sazbu a obsadili maximálně možným množstvím atd. S ε se pracuje stejně jako s jiným číslem, jediný rozdíl je ten, že se neprojeví v účelové funkci.

5 –	3 ε	1 30	$30 + \varepsilon$
2 25	8 25	4 –	50
25	$25 + \varepsilon$	30	

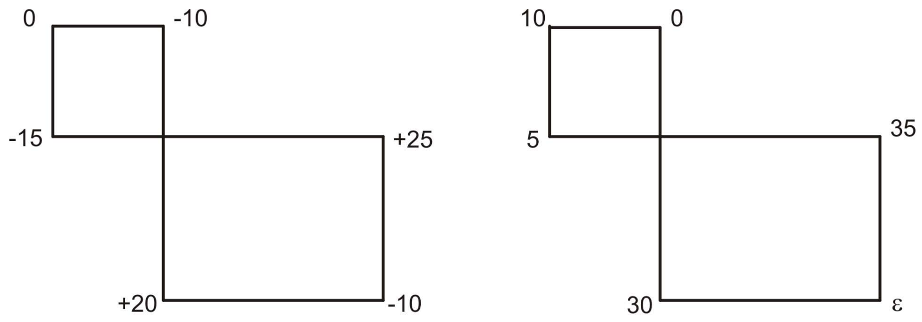
2. Degenerace po přesunech v Dantzigových cyklech – v rozích cyklu se zápornými znaménky jsou dvě stejně nízké hodnoty x_{ij}. Po obsazení jednoho prázdného políčka se dvě jiná vynulují. Opět do nadbytečně vynulovaných políček dosadíme ε.

   Příklad 26. *Mějme Dantzigův cykus, kde jsou dvě stejně nízké hodnoty, které máme přesouvat. Abychom předešli vzniku degenerovaného řešení, místo jedné nuly zapíšeme do políčka ε a s políčkem pak zacházíme jako s obsazeným – viz obrázek 1.17.*

- Simplexová metoda
  Jak již bylo uvedeno dříve, distribuční úlohy lze řešit rovněž simplexovou metodou. Na tomto místě se již simplexovou metodou nebudeme zabývat, pojednáno je o ní v kapitole 1.4

1.9.7 Maximalizační distribuční problém

Doposud byly uvažovány pouze úlohy s minimalizačním kritériem optimality (minimální počet tkm nebo minimální náklady). Existují ale úlohy, kdy je kritérium optimality maximalizační.



Obrázek 1.17: Vznik degenerace v Dantzigových cyklech

Pro jejich řešení se používají metody jako pro minimalizační problém, s určitými úpravami.

1. metoda severozápadního rohu – stejný postup

2. metod indexní vzestupná – pole s největšími sazbami obsazujeme maximálně možným množstvím a pole s nejmenšími sazbami proškrtáváme

3. VAM – v každé řadě počítáme rozdíl dvou největších čísel, vybereme největší rozdíl a obsazujeme přednostně pole s největšími sazbami

4. MODI metoda – zajímáme se o pole, jejichž obsazení by zvýšilo hodnoty účelové funkce. Řešení je optimální, pokud platí ve všech neobsazených polích $u_i + v_j \geq c_{ij}$.

Řešený příklad 1.19. *Pěstitel ovoce se rozhoduje, jak rozdělit broskve, meruňky a jahody pro výrobu kompotů a džemů, aby zisk byl maximální. Jahody musí být zpracovány beze zbytku. Disponibilní množství ovoce (v kg), požadované množství kompotů a džemů (v kg) a ceny za jednotlivé druhy kompotů a džemů (v Kč) jsou v tabulce. Úloha není vyvážená, musí být zaveden fiktivní odběratel s prohibitivní sazbou u jahod. Prohibitivní sazba u maximalizačních úloh je nízké záporné číslo.*

	Kompot	*Džem*	
Broskve	30	20	350
Meruňky	20	10	420
Jahody	40	40	50
	500	300	

Řešení. Nejprve je potřeba získat výchozí přípustné řešení některou z metod k tomu určených (zde bude použita VAM).

	Kompot	Džem	Zbytek		
Broskve	30 350	20 –	0 –	350	10,10
Meruňky	20 150	10 250	0 20	420	10,10
Jahody	40 –	40 50	-M –	50	0,–
	500	300	20		
	10,10	20,10	0,0		

Metodou VAM jsme získali výchozí přípustné řešení. Nyní ještě ověříme optimalitu tohoto řešení metodou MODI.

	Kompot	Džem	Zbytek		u_i
Broskve	30 350	20 –	0 –	350	10
Meruňky	20 150	10 250	0 20	420	0
Jahody	40 –	40 50	-M –	50	30
	500	300	20		
v_j	20	10	0		

Řešení je optimální, ale ne jediné, neboť při ověřování MODI metodou v poli $(1, 2)$ platí $u_i + v_j = c_{ij}$. Hodnota účelové funkce $z = 18000$ Kč při použití 350 kg broskví na kompot, 150 kg meruněk na kompot, 250 kg meruněk na džem a 50 kg jahod na džem. Zbude 20 kg meruněk.

1.9.8 Přiřazovací problém

V přiřazovacím problému je úkolem přiřadit m zdrojů (pracovníci, výrobky) k m cílům (pracoviště, výrobní linky) tak, aby efekt tohoto přiřazení byl optimální (maximální výkon, minimální potřeba času apod.).

Zdroje se přiřazují cílům tak, aby:

1. každý zdroj byl přiřazen nějakému cíli,
2. každému cíli byl přiřazen nějaký zdroj,
3. celkový efekt přiřazení byl optimální.

V přiřazovacím problému je $m \times m$ ocenění c_{ij}. Sazbami c_{ij} se vyjadřuje efekt přiřazení (doba, za kterou i-tý pracovník dělá výrobek na j-tém stroji). Indikátor přiřazení jsou proměnné x_{ij}, které nabývají hodnoty 0 nebo 1, podle toho, zda i-tý zdrojový objekt je přiřazen j-tému cílovému objektu ($i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, m$). Matematický model přiřazovacího problému je tvořen:

- omezujícími podmínkami

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m} x_{ij} &= 1; i = 1, 2, \ldots, m, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} &= 1; j = 1, 2, \ldots, m,\end{aligned}$$

- účelovou funkcí

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \quad \rightarrow \quad \text{extrém.}$$

Poznámka. V omezujících podmínkách je součet indikátorů přiřazení v řádku či ve sloupci vždy jedna. Je tomu tak proto, že nelze přiřadit jeden zdroj k více cílům a jeden cíl může být cílem vždy pro jeden zdroj.

V případě minimalizace účelové funkce je možné řešit jako dopravní problém. Řešení je několikanásobně degenerované, neboť počet obsazených políček je m (v nedegenerovaném řešení by jich bylo $2m - 1$). Z toho důvodu je výhodnější chápat tento druh úloh jako minimalizační úlohu teorie grafů a řešit ho maďarskou metodou.

Maďarská metoda

Řešení se provádí v tabulce, jejíž řádky se vztahují ke zdrojovým objektům, sloupce k cílovým objektům a v jejíž políčkách jsou zapsány příslušné sazby c_{ij}. Podmínkou řešitelnosti je, že počet zdrojů se rovná počtu cílů. Pokud tomu tak není, zavádíme fiktivní zdroj nebo fiktivní cíl. Metoda bude ilustrována na příkladech.

Řešený příklad 1.20. *Stavební firma má k dispozici tři stavební stroje (zdroje) na třech stavbách, ze kterých tyto stroje potřebuje přesunout na jiné stavby (cíle). Vzdálenosti mezi zdroji a cíli (v* 10 *km) jsou uvedny v tabulce:*

	C_1	C_2	C_3	
Z_1	2	5	6	1
Z_2	3	8	4	1
Z_3	4	9	7	1
	1	1	1	

Řešení. Sazby zapíšeme do matice, ve které provádíme následující úpravy:

1. řádková redukce - v každém řádku vybereme nejnižší číslo a to odečteme od všech čísel v příslušném řádku

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 3 & 8 & 4 \\ 4 & 9 & 7 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

2. sloupcová redukce - v každém sloupečku, ve kterém po řádkové redukci není žádná 0, vybereme nejnižší číslo a to odečteme od všech čísel v příslušném sloupci

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

3. výběr nezávislých nul - nezávislá je označená nula (0), která je samotná v řádu i ve sloupci; v tomto sloupci a řádku nemohu označit jinou nulu jako nezávislou; pro snazší hledání dalších nezávislých nul ostatní čísla ve sloupci a v řádku proškrtnu (nezaměňovat s krycími čarami - viz dále); pokud bylo vybráno m nezávislých nul, vypočte se hodnota účelové funkce; pokud bylo vybráno méně než m nezávislých nul, ověřuje se správnost jejich výběru (viz 5.),

$$\begin{pmatrix} 0 & (0) & 3 \\ 0 & 2 & (0) \\ (0) & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

4. výpočet hodnoty účelové funkce - na pozicích, kde jsou nezávislé nuly, se uskuteční přiřazení ($x_{ij} = 1$); v našem případě zdroj 1 je přiřazen cíli 2 ($x_{12} = 1$), zdroj 2 je přiřazen cíli 3 ($x_{23} = 1$) a zdroj 3 je přiřazen cíli 1 ($x_{31} = 1$); ve výchozí matici vybereme sazby u uskutečněných přiřazení a jejich součtem získáme hodnotu účelové funkce

$$z = x_{12}c_{12} + x_{23}c_{23} + x_{31}c_{31} = 5 + 4 + 4 = 13$$

5. ověření správnosti výběru nezávislých nul podle Königovy věty - maximální počet nezávislých nul se rovná minimálnímu počtu svislých a vodorovných čar (krycí čáry), které pokrývají všechny nulové sazby; po řádkové a sloupcové redukci zjistíme, že počet nezávislých nul je menší než m; vybereme řady (řádky i sloupce), které neobsahují nezávislé nuly a nulovými prvky těchto řad vedeme kolmice, potom sestrojíme krycí čáry přes ostatní nuly

Příklad 27. *Mějme matici, která ve které jsou uvedeny sazby - vzdálenosti mezi zdroji a cíli. V této matici provedeme řádkovou a sloupcovou redukci:*

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3 & (0) & 0 \\ (0) & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

označeny jsou pouze dvě nezávislé nuly, proto sestrojíme krycí čáry (přerušovaně); ve třetím řádku není nezávislá nula a nulou na pozici $(3,1)$ *vedeme kolmici ke třetímu řádku – krycí čára škrtá první sloupec; ve třetím sloupci není nezávislá nula, proto nulou na pozici* $(1,3)$ *vedeme kolmici ke třetímu sloupci - krycí čára škrtá první řádek. Dále se provádí redukce sazeb - z nepokrytých čísel vybereme nejmenší (označme ho např. d) a odečteme ho od všech ostatních; nepokryté sazby se zmenší o d; sazby pokryté krycí čarou se nezmění; prvky dvakrát pokryté krycími čarami (krycí čáry se zde kříží) se zvětší o d.*

Nyní se vyhledávají nezávislé nuly v nově získané matici; od bodu 3) postup opakujeme až do získání m nezávislých nul; pokud poloha těchto nul není jednoznačná, existují rovnocenná optimální řešení.

$$\begin{pmatrix} 3 & (0) & 0 \\ (0) & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1_d \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & (0) & 0 \\ (0) & 1 & 2 \\ 0 & 1 & (0) \end{pmatrix}$$

Nalezli jsme m nezávislých nul, získali jsme optimální řešení úlohy, účelová funkce $z = 10$ (viz bod 4)

Poznámka. Pokud není problém vyvážený, to znamená pokud není stejný počet zdrojů a cílů, přidáváme opět fiktivní zdroj nebo fiktivní cíl (podle toho, co chybí). Ve sloupci fiktivního zdroje, popřípadě v řádku fiktivního cíle zavádíme nulové sazby. Pokud některý skutečný zdroj, popřípadě skutečný cíl preferujeme (nechceme, aby byly přiřazeny k fiktivnímu cíli nebo zdroji), použijeme prohibitivní sazby (stejně jako u distribučních úloh minimalizačního typu vysoké číslo).

1.9.9 Okružní dopravní problém (problém obchodního cestujícího)

V tomto typu problémů existuje jeden dodavatel, který rozváží zboží na místa spotřeby. Po navštívení posledního místa se dopravní prostředek vrací zpět do výchozího místa, přičemž každé místo navštíví jen jednou. Cílem řešení je stanovit pořadí navštěvovaných míst tak, aby celkový počet km nebo celkové náklady (Kč) na dopravu byly minimální.

Aplikace maďarské metody na řešení okružního problému

Zdrojové a cílové objekty jsou zde totožné a představují zdrojová a cílová místa. Spojení mezi totožnými místy je nepřípustné, proto jsou na hlavní diagonále matice prohibitivní sazby.

Řešený příklad 1.21. *Prodejce sídlí v městě P má za úkol nabízet zboží v městech M1, M2 a M3. V jakém pořadí má tato města navštívit, aby najetý počet km byl minimální. Vzdálenosti mezi jednotlivými městy (v* 10 *km) jsou v následující tabulce:*

	P	*M1*	*M2*	*M3*
P	-	8	2	1
M1	8	-	5	4
M2	2	5	-	3
M3	1	4	3	-

Řešení. Postupujeme stejně jako v předchozí části, tzn. provedeme řádkovou a sloupcovou redukci.

$$\begin{pmatrix} - & 8 & 2 & 1 \\ 8 & - & 5 & 4 \\ 2 & 5 & - & 3 \\ 1 & 4 & 3 & - \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} - & 7 & 1 & 0 \\ 4 & - & 1 & 0 \\ 0 & 3 & - & 1 \\ 0 & 3 & 2 & - \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} - & 4 & 0 & 0 \\ 4 & - & 0 & 0 \\ 0 & 0 & - & 1 \\ 0 & 0 & 1 & - \end{pmatrix}$$

Dále je potřeba najít nezávislé nuly. Vzhledem k tomu, že je zde více možností, které nuly se mají označit jako nezávislé, musíme dávat pozor, aby se okruh neuzavřel dříve, než v něm budou obsažena všechna místa. Ukážeme si dvě možnosti.

1. $$\begin{array}{c} \\ P \\ M1 \\ M2 \\ M3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P & M1 & M2 & M3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 4 & (0) & 0 \\ 4 & - & 0 & (0) \\ 0 & (0) & - & 1 \\ (0) & 0 & 1 & - \end{pmatrix} \end{array}$$

   Podle umístění nezávislých nul zjistíme řešení. Odkud jedeme čteme v řádku, kam jedeme čteme ve sloupci. Jako výchozí bereme místo P (první řádek), najdeme nezávislou nulu v prvním řádku (v našem případě je pod M2). První část trasy je P → M2 . Dále vybereme řádek, který patří k M2 (v našem příkladu třetí řádek zhora), v něm najdeme nezávislou nulu, zjistíme pod kterým místem se nachází a opět zjistíme další trasu. Postup opakujeme až do uzavření okruhu (až do návratu do místa P). Řešení je P → M2 → M1 → M3 → P. Hodnotu účelové funkce vypočteme tak, že sčítáme vzdálenosti mezi jednotlivými místy, které jsou na trase (P → M2 = 2, M2 → M1 = 5, M1 → M3 = 4, M3 → P = 1). Hodnota účelové funkce $z = 2 + 5 + 4 + 1 = 12$, trasa je dlouhá 120 km.

2. $$\begin{array}{c} \\ P \\ M1 \\ M2 \\ M3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P & M1 & M2 & M3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -- & 4 & 0 & (0) \\ 4 & -- & (0) & 0 \\ 0 & (0) & -- & 1 \\ (0) & 0 & 1 & -- \end{pmatrix} \end{array}$$

   Při určování okruhu postupujeme stejným způsobem, jako v předchozím případě. Okruh se zde ale uzavře dříve, než se projdou všechna místa (P → M3 → P). Toto řešení nelze použít pro stanovení optimální trasy.

Metoda nejbližšího souseda

Metoda spočívá v tom, že postupně každé místo bereme jako výchozí, z každého výchozího místa najdeme nejbližší místo, z tohoto pak zase nejbližší místo (pokud jsme ho již nezařadili do řešení, pak by se muselo vybrat druhé nejbližší místo) a tímto způsobem pokračujeme, dokud neuzavřeme okruh. Stejně postupujeme ze všech výchozích míst. U výchozích míst, která ve skutečnosti výchozí nejsou, se musí okruh vhodně posunout.

Řešený příklad 1.22. *Určete optimální trasu pro prodejce z řešeného příkladu 1.21 metodou nejbližšího souseda.*

Řešení. Vycházíme z původní matice vzdáleností

$$\begin{array}{c} \\ P \\ M1 \\ M2 \\ M3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P & M1 & M2 & M3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -- & 8 & 2 & 1 \\ 8 & -- & 5 & 4 \\ 2 & 5 & -- & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -- \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Výchozí je místo P, k němu je nejblíže M3, z M3 je nejblíže P, ale v tomto místě už jsme byli, další nejbližší místo je M2. Z M2 opět vybereme nejbližší místo, které je přípustné, a to je M1 a konečně z M1 do P. Trasa je následující, a to P → M3 → M2 → M1 → P a hodnota účelové funkce $z = 170$ km.

2. Výchozí místo je M1, k němu je nejblíže M3, z M3 je nejblíže P, z P je možné jít do M2. Z M2 opět vybereme nejbližší místo, které je přípustné a to je M1. Trasa je následující, a to M1 → M3 → P → M2 → M1, trasu musíme přizpůsobit tak, aby se vycházelo ze skutečného výchozího místa, tedy P → M2 → M1 → M3 → P a hodnota účelové funkce $z = 120$ km.

3. Výchozí místo je M2, z M2 je nejblíže do P. Z P do M3, z M3 do M1 a z M1 do M2. Řešení je tedy M2 → P → M3 → M1 → M2, po úpravě P → M3 → M1 → M2 → P , hodnota účelové funkce $z = 120$ km.

4. Výchozí místo je M3, z M3 je nejblíže P, z P je nejblíže (z přípustných) M2, z M2 do M1 a odtud do M3. Řešení je M3 → P → M2 → M1 → M3, po úpravě P → M2 → M1 → M3 → P, hodnota účelové funkce $z = 120$ km.

Možné jsou následující trasy (rovnocenná optimální řešení) s hodnotou účelové funkce $z = 120$ km: P → M2 → M1 → M3 → P nebo opačný směr P → M3 → M1 → M2 → P.

1.9.10 Maximalizační přiřazovací problém

Používáme Maďarskou metodu. U všech sazeb změníme znaménka, v každé řádce nebo sloupci vybereme nejnižší číslo a jeho absolutní hodnotu přičteme ke všem prvkům řádku nebo sloupce. Tím odstraníme záporná čísla a získáme alespoň jeden nulový prvek. Potom pokračujeme stejným způsobem jako u minimalizačních úloh.

Řešený příklad 1.23. *V podniku se mají rozhodnout, které pracovníky vyberou pro práci na jednotlivých strojích. Každý pracovník umí pracovat s každým strojem, ale jejich výkon je ohodnocen počtem bodů (jeden bod = jeden výrobek), viz následující tabulka. Žádoucí je, aby počet bodů byl maximální.*

	S1	*S2*	*S3*
P1	15	7	9
P2	12	5	10
P3	13	8	11
P4	10	6	8

Řešení. Počet strojů je menší než počet pracovníků, proto zavedeme fiktivní stroj s nulovými sazbami. Znamená to, že jeden z pracovníků nezíská práci na žádném stroji.

$$\begin{pmatrix} -15 & -7 & -9 & 0 \\ -12 & -5 & -10 & 0 \\ -13 & -8 & -11 & 0 \\ -10 & -6 & -8 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 8 & 6 & 15 \\ 0 & 7 & 2 & 12 \\ 0 & 5 & 2 & 13 \\ 0 & 4 & 2 & 10 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} (0) & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & (0) & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & (0) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nezávislých nul je méně než m, proto sestrojíme krycí čáry, provedeme redukci a získáme další nezávislou nulu. Hodnota účelové funkce $z = 33$ bodů (výrobků) a pracovníci jsou rozmístěni

$$\begin{pmatrix} (0) & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & (0) & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & (0) & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} (0) & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & (0) & 1 \\ 0 & (0) & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & (0) \end{pmatrix}$$

následujícím způsobem: P1 → S1, P2 → S3, P3 → S2. Pracovník P4 byl přiřazen k fiktivnímu stroji, tedy nezískal práci na žádném ze skutečných strojů.

Cvičení

Cvičení 1.21. Při výstavbě silnice byla v místech A, B a C vybagrována zemina, kterou je možné rozvést na vyrovnání terénu v místech M_1, M_2, M_3 a M_4. Množství vyhrnuté a požadované zeminy (v m^3) a vzdálenosti mezi zdrojovými a cílovými místy dopravy (v km) jsou v následující tabulce:

	M_1	M_2	M_3	M_4	
A	4	5	9	10	300
B	5	4	7	8	350
C	6	5	4	7	150
	150	190	160	220	

Za daných podmínek

a) stanovte optimální využití vyhrnuté zeminy z hlediska nákladů na její dopravu,

b) mezi nevyužitými cestami při optimálním způsobu rozvozu zeminy najděte perspektivní spoje s koeficientem zhoršení 1 a průtočností alespoň 100 m^3.

Cvičení 1.22. Závod na výrobu limonád vlastní tři velkoobchody V_1, V_2, V_3, ze kterých se rozváží přepravky s limonádami do sedmi prodejen P_1, P_2, …, P_7 za těchto podmínek:

- velkoobchod V_2 může uskladnit 200 přepravek, zatímco ve zbývajících velkoobchodech může být skladováno maximálně 300 přepravek,
- prodejna P_3 neuzavřela smlouvu s velkoobchodem V_1 a prodejny P_5 a P_7 s velkoobchodem V_2,
- odhadnutá cena za přepravu jedné přepravky na vzdálenost 1 km činí 1 Kč.

a) Stanovte optimální způsob rozvozu limonád z velkoobchodních skladů do prodejen v určitém období, jsou-li známy požadavky prodejen (80, 50, 40, 80, 90 110, 80 přepravek) a vzdálenosti mezi jednotlivými velkoobchody a prodejnami (v km) tak, jak je uvedeno v následující tabulce.

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
V_1	2	3	6	9	12	13	7
V_2	6	4	5	6	10	11	5
V_3	9	12	6	7	2	5	8

b) Kolik přepravek s limonádami stačí dovézt do uvažovaných velkoobchodních skladů, má-li být realizován rozvoz stanovený v úkolu a).

c) Jaký vliv bude mít na optimální rozvoz limonád dodatečné uzavření smlouvy mezi prodejnou P_7 a velkoobchodem V_2?

Cvičení 1.23. Po uzavření některých zastaralých cukrovarů byly ponechány dva v místech A a B a uvažuje se o rekonstrukci jednoho z cukrovarů v místě C nebo D. Celoroční kapacita (v tisících tun), sklizené množství řepy v oblastech O_1, O_2, O_3 a O_4 (v tisících tun), náklady na přepravu 1 tuny mezi oblastmi a cukrovary (v Kč) a náklady na zpracování 1 tuny (v Kč) v jednotlivých cukrovarech jsou uvedeny v následující tabulce:

	A	B	C	D	sklizeň
O_1	15	17	10	13	50
O_2	10	14	35	32	40
O_3	12	25	15	27	30
O_4	31	18	28	9	60
Kapacita	45	50	85	90	
Výrobní náklady	2200	2000	1600	1500	

Cukrovar v místě C má po rekonstrukci, která vyžaduje náklady ve výši 24 milionů Kč, životnost 20 let. Náklady na rekonstrukci cukrovaru v místě D činí 30 milionů Kč při stejné době životnosti. Rozhodněte, zda z hlediska minimalizace investičních, dopravních a výrobních nákladů je pro rekonstrukci vhodnější cukrovar v místě C nebo D.

Cvičení 1.24. Cukrárna objednává tři druhy zákusků Z_1, Z_2, Z_3 od tří výrobců V_1, V_2, V_3. Denní požadavky cukrárny, výrobní možnosti dodavatelů (v kusech zákusků) a ceny, které výrobci stanovili za jeden kus zákusků, jsou uvedeny v následující tabulce.

	Z_1	Z_2	Z_3	
V_1	3	6	5	200
V_2	4	7	6	180
V_3	4	8	6	220
	200	150	200	

a) Určete optimální strukturu objednávek zákusků z hlediska minimalizace jejich ceny za předpokladu, že druhému výrobci nesmí žádné zákusky zbýt (cukrárna za to získá nějaké výhody od tohoto výrobce).

b) Z alternativních optimálních řešení vyberte to, kterému odpovídá nejmenší počet objednávek.

c) U kterého druhu zákusků by bylo výhodné z hlediska minimalizace celkové ceny zákusků objednávku zvýšit a u kterého naopak snížit?

Cvičení 1.25. Tři odrůdy pšenice mají být rozmístěny do čtyř oblastí s různými půdními podmínkami tak, aby bylo dosaženo maximální sklizně pšenice všech odrůd. Potřebné údaje (výnosy jednotlivých odrůd v různých oblastech (tuny na ha), plánovaná plocha pšenice v jednotlivých oblastech (ha) a plocha zajištěná danou odrůdou (ha)) jsou v následující tabulce.

odrůdy	O_1	O_2	O_3	O_4	plocha zajištěná
I	4,2	3,9	4,3	4,4	200
II	4,3	4	4,1	3,9	300
III	4,4	4,1	4	4,2	250
plánovaná plocha	150	250	100	200	

Cvičení 1.26. V obchodě s oděvy jsou během sezóny požadovány šaty o velikostech I, II, III a IV v množství 20, 35, 40 a 15 kusů. Obleky vyrábějí tři dílny D_1, D_2 a D_3, které mohou zajistit ušití 30, 40 a 35 obleků. Předpokládaný zisk z prodeje jednoho obleku závisí na velikosti obleku a na jeho výrobci, jak je patrné z následující tabulky (zisk je uveden ve 100 Kč).

	I	II	III	IV
D_1	2,5	4	5	2
D_2	3	3,5	5,5	1,5
D_3	2	4,5	4,5	2,5

a) Jak má majitel obchodu rozdělit sezónní objednávku obleků mezi uvažované dílny, chce-li dosáhnout maximálního zisku?

b) Budou při optimální struktuře objednávky uspokojeny požadavky prodejny na obleky všech velikostí?

c) Z alternativních optimálních řešení vyberte to, kterému odpovídá nejmenší počet uzavřených objednávek.

Cvičení 1.27. Pět závodníků připravujících se na závody ve štafetovém běhu 4×400 m dosahovalo v nasazení na různé dráhy různého času, jak je uvedeno v následující tabulce (čas v sekundách). Stanovte, v jakém pořadí mají závodníci běžet, aby čas štafety byl co nejkratší.

Hráč	Úsek dráhy			
	I	II	III	IV
A	50	49	48	48
B	52	50	49	48
C	51	50	49	49
D	53	51	51	50
E	51	50	50	50

Cvičení 1.28. U firmy TRANSLATOR pracují čtyři překladatelé z anglického jazyka s různými výkony podle toho, zda jde o texty technické, ekonomické, právnické, nebo zda se jedná o beletrii. Průměrný počet stránek, který tito pracovníci přeloží za jeden den v různých oborech, je v následující tabulce.

	technika	ekonomika	právo	beletrie
Jan	7	6	3	4
Petr	6	7	2	5
Ivan	4	7	5	4
Karel	6	6	4	5

Za předpokladu, že všechny uvedené druhy textů jsou přibližně stejně zastoupeny, jak mají být zaměstnancům firmy přidělovány překlady, aby výkon firmy byl co největší?

Cvičení 1.29. Akciová společnost Mlékárny denně sváží mléko ze čtyř kravínů. Vzdálenost jednotlivých míst (v km) jsou uvedeny v následující tabulce. Stanovte optimální trasu cisterny, jejíž kapacita stačí na denní produkci mléka v uvažovaných kravínech, s minimálním počtem kilometrů.

	M	K_1	K_2	K_3	K_4
M	–	5	7	4	6
K_1	5	–	4	3	8
K_2	7	4	–	4	6
K_3	4	3	4	–	5
K_4	6	8	6	5	–

Cvičení 1.30. Cizinec, který přijel do Českých Budějovic, chce autem navštívit tato města: Tábor, Písek, Prachatice a Jindřichův Hradec. V automapě si zjistil vzdálenosti (v km) mezi těmito městy (viz následující tabulka) a nyní se rozhoduje, v jakém pořadí má uvedená města navštívit (pak se chce vrátit do Českých Budějovic), aby ujel co nejméně kilometrů. Navrhněte trasu.

	ČB	TA	PI	PT	JH
ČB	–	57	54	42	54
TA	57	–	44	91	44
PI	54	44	–	47	88
PT	42	91	47	–	96
JH	54	44	88	96	–

Výsledky

Výsledky 1.21 a) Byl zaveden fiktivní odběratel s požadavkem $80m^3$. Přeprava bude realizována takto: $AM_1 = 150$, $AM_2 = 70$, $AF = 80$, $BM_2 = 120$,$BM_3 = 10$, $BM_4 = 220$, $CM_3 = 150$. Minimální nrozsah přepravy je $3860m^3km$.

b) Trasa s koeficientem zhoršení 1 a zároveň s průtočností alespoň $100m^3$ neexistuje.

Výsledky 1.22 a) Přeprava bude realizována takto: $V_1P_1 = 80$, $V_1P_2 = 50$, $V_1P_7 = 80$, $V_2P_3 = 40$, $V_2P_4 = 80$, $V_3P_5 = 90$, $V_3P_6 = 110$. Náklady na přepravu budou 2280 Kč.

b) Ve velkoobchodním skladu V_1 stačí zásoba 210 přepravek, ve V_2 120 a ve V_3 200 přepravek.

c) Vznikne degenerované řešení, náklady budou 2120 Kč.

Výsledky 1.23
Vhodnější je rekonstrukce v místě D, úhrnné náklady 326,65 milionů Kč.

Výsledky 1.24 a) Minimální náklady na nákup zákusků jsou 2850 kč, řešení nelze určit jednoznačně

b) Nejmenší počet objednávek bude při objednání $V_1Z_1 = 200$, $V_2Z_2 = 150$, $V_2Z_3 = 30$, $V_3Z_3 = 170$. Třetí výrobce by mohl dodat 50 kusů zákusků jinému odběrateli.

c) Výhodné je objednávat více Z_1 a méně Z_2.

Výsledky 1.25
Optimální řešení není jednoznačné. Jedním ze základních optimálních řešení je $x_{14} = 200$ ha, $x_{22} = 150$ ha, $x_{23} = 100$ ha, $x_{31} = 150$ ha, $x_{32} = 100$ ha, $z = 2960$ tun.

Výsledky 1.26 a) Maximální zisk za daných podmínek je 44750 Kč, optimální strukturu výroby nelze stanovit jednoznačně.

b) Obleků velikosti IV bude dodáno o 5 kusů méně.

c) Stačí uzavřít pouze čtyři objednávky, a to velikosti I s dílnou D_1, velikosti II s dílnou D_3, velikosti III s dílnou D_2 a velikosti IV s dílnou D_1

Výsledky 1.27
Nejkratší čas štafety je 197 s, závodník D se neuplatní, pořadí ostatních závodníků nelze určit jednoznačně.

Výsledky 1.28
Největší denní výkon je 24 stránek, Jan bude překládat technické testy, Petr ekonomické, Ivan právnické texty a Karel beletrii.

Výsledky 1.29
Optimální okruh je dlouhý 23 km a vede po trase $M \to K_3 \to K_1 \to K_2 \to K_4 \to M$ nebo opačně.

Výsledky 1.30
Cesta s minimálním počtem 231 km povede městy v pořadí České Budějovice → Prachatice → Písek → Tábor → Jindřichův Hradec → České Budějovice.

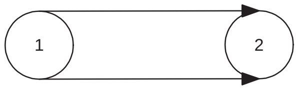
Kapitola 2

Síťová analýza

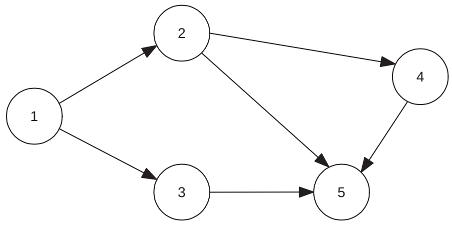
Využívá graficko-analytické metody pro plánování, řízení a kontrolu složitých návazných procesů. Tyto procesy se dají rozložit na dílčí a organizačně spolu související činnosti. Tyto procesy se nazývají v síťové analýze **projekty** (výstavba budov, silnic; výzkumné úkoly; plánování zavádění informačního systému do podniku). Matematický základ síťové analýzy vychází z teorie grafů.

2.1 Základní pojmy

Graf
Je dána konečná množina prvků $u_1, u_2, \ldots, u_n$ a množina některých dvojic těchto prvků $\overline{u_i, u_j}$. Sjednocením množin $u_1, u_2, \ldots, u_n \cup \overline{u_i, u_j}$ nazýváme grafem.
Uzly grafu
Prvky u_i, kde $i = 1, 2 \ldots, n$ nazýváme uzly grafu a zobrazujeme je kroužky. Pro zjednodušení u_i, u_j označujeme pouze i, j, čísla i, j se vepisují do kroužků.
Hrany grafu
Dvojice $\overline{u_i, u_j}$ nazýváme hranami grafu. Zobrazujeme je přímými nebo různě lomenými čarami, pro zjednodušení označujeme (i, j).
Konečný graf
Graf, který má konečný počet uzlů a hran.
Orientovaný graf
Graf, který je tvořen orientovanými hranami, kterým je přiřazen určitý směr.
Hranově (uzlově) ohodnocený graf
Graf, jehož každé hraně (uzlu) je přiřazeno alespoň jedno číslo (mapa trasy dálkového pochodu, každé spojnici mezi jednotlivými stanovišti je přiřazena její délka).
Cesta
Posloupnost hran v orientovaném grafu, ve kterém každá hrana vychází z uzlu, v němž končí předcházející. Pokud cesta začíná a končí ve stejném uzlu, potom se jedná o cyklus.
Acyklický graf
Neobsahuje žádný cyklus.
Souvislý graf
Graf, pro který platí, že pro všechny dvojice jeho uzlů existuje alespoň jedna cesta, která je spojuje.
Multigraf
Graf, ve kterém mezi některou dvojicí uzlů existuje více souhlasně orientovaných hran.
Síť
Konečný souvislý, orientovaný, acyklický, hranově nebo uzlově ohodnocený graf, v němž existuje jeden počáteční uzel (nevstupuje do něj žádná hrana) a jeden uzel koncový (žádná hrana z něj nevystupuje).



Obrázek 2.1: Multigraf – příklad



Obrázek 2.2: Síť – příklad

Síťový diagram
Síťový graf, jehož hrany jsou ohodnoceny časovými údaji. Délka cesty v síťovém diagramu představuje součet časových údajů přiřazených hranám, které tvoří uvažovanou cestu.

Grafické modely projektů

Projekty lze znázornit síťovým diagramem. V tomto textu budeme uvažovat hranově ohodnocené grafy. Hrany představují jednotlivé činnosti a uzly představují začátky a konce jednotlivých činností. Podmínky pro modelování a řízení projektu síťovým diagramem:

1. pro každou činnost je známá doba trvání,
2. pro každou činnost je definována činnost předcházející a činnost následující,
3. pokud je přihlíženo i k jiným kritériím optimality, každá činnost musí být ohodnocena příslušnými ukazateli,
4. cíl projektu je splněn, pokud jsou ve správném časovém sledu provedeny všechny činnosti.

Síťový graf musí být zakreslen co nejpřehledněji. Délka hran nemusí odpovídat době trvání na rozdíl od harmonogramu. Při sestavování grafu lze začít od počátečního uzlu (zvláště u známých projektů) nebo od konečného uzlu (především u doposud nerealizovaných projektů) nebo lze kombinovat oba způsoby. Uzly jsou číslovány přirozenými čísly, počáteční uzel má nižší číslo než koncový. Hrany mají buď kladné ohodnocení (u skutečných činností) nebo nulové ohodnocení (u fiktivních činností). Fiktivní činnost slouží k vyjádření návaznosti skutečných činností nebo k zamezení vzniku multigrafu a má vždy nulovou dobu trvání.

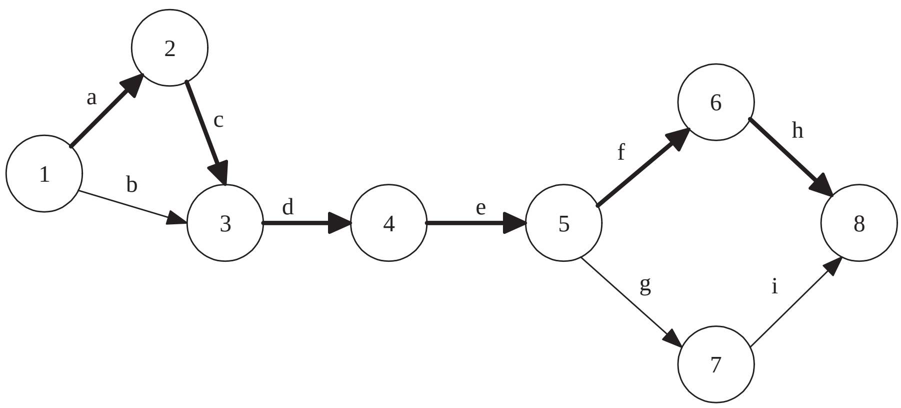
Řešený příklad 2.1. *V závodě se má provést rekonstrukce výrobní linky, spojená s výměnou výrobního zařízení, stavebními úpravami, generální opravou elektroinstalace a zlepšením pracovního prostředí. Projekt byl rozložen na dílčí činnosti, které jsou spolu s předpokládanou dobou jejich trvání (v týdnech) uvedeny v tabulce.*

Činnost	*Popis činnosti*	*Doba trvání*
a	*Demontáž starého zařízení*	8
b	*Oprava střechy výrobní haly*	6
c	*Oprava podlahy*	2
d	*Vnitřní stavební úpravy*	4
e	*Generální oprava elektroinstalace*	10
f	*Montáž nového výrobního zařízení*	12
g	*Montáž klimatizačního zařízení*	5
h	*Zkušební provoz*	4
i	*Dokončení vnitřních stavebních úprav*	3

Rozborem souvislostí mezi dílčími činnostmi bylo zjištěno, že demontáž starého zařízení a oprava střechy mohou probíhat nezávisle vedle sebe. Vnitřní stavební úpravy lze provádět po skončení opravy střechy a podlahy, přičemž opravu podlahy lze provést až po demontáži. Generální oprava elektroinstalace může být provedena po dokončení vnitřních stavebních úprav. Montáž nového výrobního a klimatizačního zařízení lze provádět současně, ale musí být skončena generální oprava elektroinstalace. Zkušební provoz může být zahájen po skončení montáže výrobního zařízení a dokončovací úpravy mohou probíhat nezávisle na zkušebním provozu, jakmile byla provedena montáž klimatizačního zařízení. Zakreslete síťový diagram znázorňující tento projekt.

Řešení. Nejprve si informace o jednotlivých činnostech a jejich návaznostech z textu zapíšeme do tabulky.

Činnost	a	b	c	d	e	f	g	h	i
Předchozí činnost	–	–	a	b,c	d	e	e	f	g



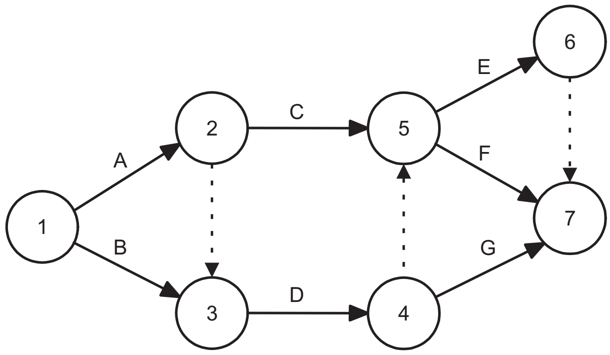
Obrázek 2.3: Síťový diagram k řešenému příkladu 2.1

U tohoto příkladu není fiktivní činnost nutná, avšak jejím zavedením se doba trvání projektu nijak neovlivní.

Řešený příklad 2.2. Sestavte síťový diagram k projektu popsanému v následující tabulce.

Činnost	*Předchůdce*
A	–
B	–
C	*A*
D	*A,B*
E	*C,D*
F	*C,D*
G	*D*

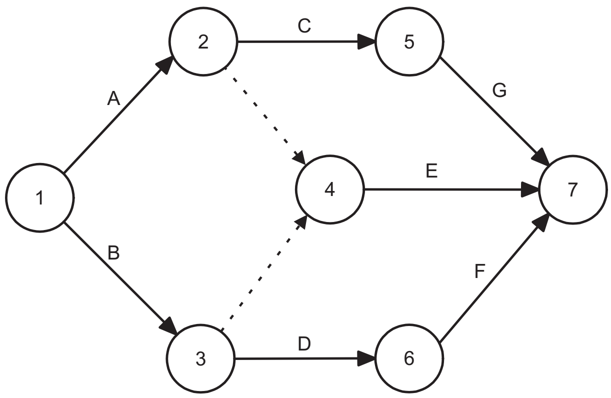
Řešení. Síťový diagram se v tomto případě neobejde bez fiktivní činnosti. Pokud by fiktivní činnost nebyla použita, vznikl by multigraf a činnosti by nebyly správně provázány.



Řešený příklad 2.3. *Sestavte síťový diagram k projektu popsanému v následující tabulce.*

Činnost	*Předchůdce*
A	–
B	–
C	*A*
D	*B*
E	*A,B*
F	*D*
G	*C*

Řešení. I v tomto případě musíme použít fiktivní činností.



2.2 Časová analýza deterministických projektů

V deterministických projektech je doba trvání každé činnosti jednoznačně určena. Všechny dílčí činnosti, které tvoří projekt musí být dokončeny, aby mohl být ukončen celý projekt. Jak bylo zmíněno výše, činnosti na sebe různě navazují, což je potřeba respektovat. Cílem časové analýzy projektů je stanovení tzv. **kritické cesty**, jejíž délka určuje dobu trvání celého projektu. Kritická cesta je nejdelší cesta mezi prvním a posledním uzlem. Činnosti, které tvoří kritickou cestu, jsou činnosti kritické (na jejich průběhu závisí termín dokončení projektu).

Příklad 28. *V síťovém diagramu z řešeného příkladu* 2.1 *existují mezi počátečním uzlem 1 a koncovým uzlem 8 celkem čtyři cesty.*

Cesta	*Délka (týdny)*
$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 8$	40
$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 7 \to 8$	32
$1 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 8$	36
$1 \to 3 \to 4 \to 5 \to 7 \to 8$	28

Z tabulky vyplývá, že rekonstrukci lze nejdříve stihnout za 40 *týdnů, přičemž pro dodržení této doby jsou rozhodující průběhy činností "a", "c", "d", "e", "f", "h". Kritická cesta je vyznačena na obrázku 2.3 tučnou čarou. Ostatní cesty jsou kratší, to znamená zde máme určité rezervy (o rezervách bude pojednáno později). Na kritické cestě se žádná činnost nesmí zpozdit, jinak dojde k prodloužení doby trvání celého projektu.*

Poznámka. Pro rozsáhlé projekty není tento postup vhodný. Nejrozšířenější metodou pro stanovení kritické cesty u deterministických projektů je metoda CPM.

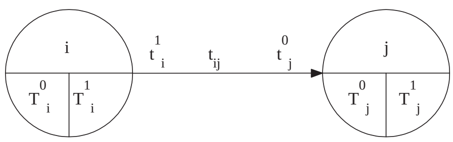
2.2.1 Metoda CPM – Critical Path Method

Metodou CPM lze stanovit dobu trvání projektu. Výpočet provádíme buď v síťovém diagramu, nebo v incidenční matici nebo pomocí lineárního Ganntova diagramu. Nejprve si zavedeme pojmy, se kterými budeme dále pracovat:

- t_{ij} – doba trvání činnosti (i, j),
- t_i^0 – nejdříve možný začátek činnosti (i, j),
- $t_j^0 = t_i^0 + t_{ij}$ – nejdříve možný konec činnosti (i, j),
- t_j^1 – nejpozději přípustný konec činnosti (i, j),
- $t_i^1 = t_j^1 - t_{ij}$ – nejpozději přípustný začátek činnosti (i, j),
- T_i^0 – nejdříve možný čas uzlu i; nejdříve možný začátek činností vystupujících z tohoto uzlu,
- T_j^1 – nejpozději přípustný čas uzlu j; nejpozději přípustný konec činností vstupujících do tohoto uzlu,
- $R_i = T_i^1 - T_i^0$ – časová rezerva uzlu i.

Výpočet v síťovém grafu

Pro usnadnění výpočtu si jednotlivé uzly graficky upravíme a zavedeme symboliku následujícím způsobem.



Obrázek 2.4: Symbolika pro výpočet kritické cesty

Postup výpočtu kritické cesty

Postup budeme ilustrovat na řešeném příkladu 2.1. Na obrázku 2.5 je znázorněn síťový diagram s výpočtem kritické cesty.

- *Stanovení nejdříve možných časů uzlů.* Postupujeme směrem od počátku projektu (od prvního uzlu) k jeho konci (k poslednímu uzlu), přičemž nejdříve možný počátek projektu volíme rovný nule ($T_1^0 = 0$). Nejdříve možný začátek projektu sčítáme nejprve s délkami trvání činností $(1, 2)$ a $(1, 3)$. Výsledky zapíšeme k šipkám u uzlů 2 a 3 (koncovým uzlům činností). Získáme tak nejdříve možný konec činnosti $(1, 2)$ a $(1, 3)$. Konkrétně $0 + 8 = 8$, nejdříve možný konec činnosti $(1, 2)$ je 8 týdnů a $0 + 6 = 6$, nejdříve možný konec činnosti $(1, 3)$ je 6 týdnů. Z uzlu 1 už jiné činnosti nevychází. Nyní musíme určit nejdříve možný čas uzlu 2 (T_2^0). Do uzlu 2 směřuje jediná činnost $(1, 2)$ – uzel 2 není koncovým uzlem další činnosti, proto nejdříve možný čas uzlu 2 je totožný s nejdříve možným koncem činnosti $(1, 2)$, což je čas 8 týdnů. Tento čas opíšeme do levé dolní třetiny uzlu 2. Postoupíme k uzlu 3 a budeme určovat jeho nejdříve možný čas (T_3^0). K tomu potřebujeme znát nejdříve možné konce činností do něho vstupující. Nejdříve možný konec činnosti $(1, 3)$ máme určený (6 týdnů) a nejdříve možný konec činnosti $(2, 3)$ spočítáme z nejdříve možného času počátečního uzlu 2 (8 týdnů) a doby trvání činnosti $(2, 3)$ – 2 týdny podle vztahu $t_3^0 = T_2^0 + t_{23} = 8 + 2 = 10$. Nejdříve možný konec činnosti $(2, 3)$ je 10. Všimněte si, že do uzlu 3 vstupují dvě činnosti. V takovém případě ztotožníme nejdříve možný čas tohoto uzlu s pozdějším nejdříve možným koncem činnosti – v našem případě je to čas 10 týdnů, který opíšeme do levé dolní třetiny uzlu 3. Pozdější čas vybíráme proto, že pro pokračování v projektu musí být ukončeny obě činnosti a limituje nás proto ta s pozdějším nejdříve možným koncem. Stejným způsobem se pokračuje ve výpočtu v síťovém diagramu až do vypočítání nejdříve možného času posledního uzlu (v našem příkladu T_8^0).

- *Stanovení nejpozději přípustných časů uzlů.* Postupujeme od konce projektu k jeho začátku. Pokud není dána doba trvání celého projektu, jeho nejpozději přípustný konec ztotožníme s jeho nejdříve možným koncem ($T_8^1 = T_8^0 = 40$). Od nejpozději přípustného času koncového uzlu činnosti odečteme dobu trvání činnosti $T_j^1 - t_{ij}$ a získám tím nejpozději přípustné začátky (t_i^1) konkrétní činnosti. Např. pro činnost $(7, 8)$ je nejpozději přípustný začátek $t_7^1 = 37$ ($T_8^1 - t_{78}; 40 - 3 = 37$). Číslo zapíšeme k hraně, která vystupuje z počátečního uzlu činnosti. Nyní je třeba určit nejpozději přípustný čas uzlu 7 (T_7^1). Z uzlu 7 jiná činnost, než $(7, 8)$ nevystupuje, proto ztotožníme nejpozději přípustný začátek této činnosti s nejpozději přípustným časem počátečního uzlu (T_7^1). Pokud by z počátečního uzlu vystupovalo více hran (činností), s nejpozději přípustným časem tohoto uzlu ztotožníme dřívější nejpozději nutný začátek (nižší číslo – viz uzel 5) Tímto způsobem se pokračuje až do vypočítání nejpozději přípustného času prvního uzlu.

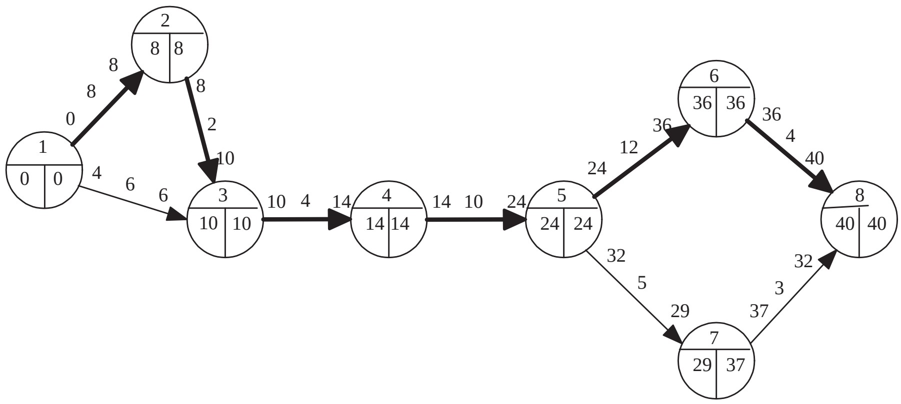
- *Stanovení rozdílů $T_j^1 - T_i^0$ pro $i = j$ (časová rezerva příslušného uzlu).* Pro každý uzel spočítáme jeho časovou rezervu tak, že pro každý uzel spočítáme rozdíl mezi nejdříve možným a nejpozději přípustným časem. Uzly, u kterých je tato rezerva nulová, leží na kritické cestě. V našem příkladu kromě uzlu 7 všechny.

Kritickou cestu lze znázornit i pomocí tzv. Ganntova diagramu, kde na ose x je čas a na ose y jednotlivé činnosti. Při tvorbě tohoto diagramu se postupně znázorní všechny činnosti v časovém úseku, kdy probíhají a jak navazují na ostatní činnosti. Na obrázku 2.6 je znázorněn Ganntův diagram pro příklad 2.1. Kritické činnosti jsou znázorněny plnými obdélníky. Všimněte si, že na kritické cestě na sebe činnosti navazují. Pokud probíhá více činností najednou, kritické jsou ty, které trvají déle.

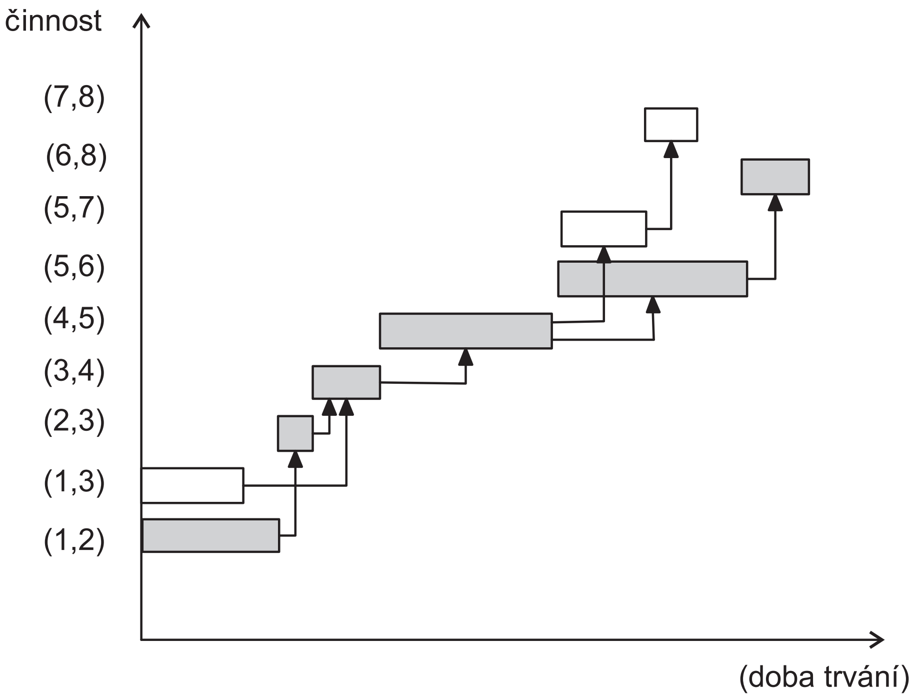
2.2.2 Časové rezervy činností

Pomocí termínů T_i^0, T_i^1, T_j^0, T_j^1 a t_{ij} můžeme pro každou činnost (i, j) určit čtyři časové rezervy.

Celková časová rezerva



Obrázek 2.5: Výpočet kritické cesty v síťovém diagramu



Obrázek 2.6: Výpočet kritické cesty v Ganntově diagramu

Celková časová rezerva se počítá podle vztahu:

$$CR_{ij} = T_j^1 - T_i^0 - t_{ij}.$$

Celková časová rezerva určuje počet časových jednotek, o který je možné dobu trvání činnosti prodloužit nebo její nejdříve možný začátek oddálit, aniž se tím ovlivní termín ukončení celého projektu. K čerpání celkové rezervy může dojít tehdy, když všechny předchozí činnosti byly ukončeny v nejdříve možném konci a všechny následující činnosti budou zahájeny v nejpozději přípustném začátku. Po vyčerpání celkové rezervy se z nekritické činnosti stane kritická činnost.

Řešený příklad 2.4. Pro činnost $(1,3)$ *(oprava střechy výrobní haly) z projektu v řešeném příkladu 2.1 vypočtěte celkovou rezervu.*

Řešení.

$$CR_{13} = T_3^1 - T_1^0 - t_{13}$$

$$CR_{13} = 10 - 0 - 6 = 4$$

To znamená, že opravu střechy výrobní haly můžeme provádět o 4 týdny déle, nebo můžeme začít o 4 týdny déle oproti nejdříve možnému začátku a nijak tím neovlivníme termín ukončení celého projektu.

Volná časová rezerva

Volná časová rezerva vzniká tehdy, když do uzlu j vstupuje ještě kromě činnosti (i, j) ještě další činnost s pozdějším nejdříve možným koncem (viz projekt 2.1 činnost $(1, 3)$ a činnost $(2, 3)$). Volná časová rezerva se počítá podle vztahu:

$$VR_{ij} = T_j^0 - T_i^0 - t_{ij}.$$

Volná časová rezerva udává počet časových jednotek, o který lze dobu trvání činnosti prodloužit nebo její nejdříve možný začátek oddálit, aniž se tím ovlivní nejdříve možné začátky následujících činností. K čerpání volných časových rezerv může dojít, pokud všechny předchozí činnosti byly ukončeny v nejdříve možných koncích. Pokud vyčerpáme tuto časovou rezervu u činnosti, jejíž koncový uzel leží na kritické cestě, stane se z této činnosti činnost kritická.

Řešený příklad 2.5. *Pro činnost* $(7, 8)$ *(oprava střechy výrobní haly) z projektu v řešeném příkladu 2.1 vypočtěte volnou časovou rezervu.*

Řešení.

$$VR_{13} = T_3^0 - T_1^0 - t_{13}$$

$$VR_{13} = 10 - 0 - 6 = 4$$

To znamená, že opravu střechy výrobní haly můžeme provádět o 4 týdny déle, nebo můžeme začít o 4 týdny déle oproti nejdříve možnému začátku a nijak tím neovlivníme nejdříve možný začátek bezprostředně následujících činností (v našem případě činnost vnitřní stavební úpravy).

Závislá časová rezerva

Závislá časová rezerva vzniká tehdy, pokud z uzlu i vystupují kromě činnosti (i, j) ještě jiné činnosti, a to s dřívějšími nejpozději přípustnými začátky (viz projekt 2.1 činnost $(5, 6)$ a činnost $(5, 7)$). Závislá časová rezerva se počítá podle vztahu:

$$ZR_{ij} = T_j^1 - T_i^1 - t_{ij}.$$

Závislá časová rezerva udává počet časových jednotek, o který můžeme dobu trvání dané činnosti prodloužit nebo její začátek oddálit oproti nejpozději přípustnému konci bezprostředně předcházející činnosti, aniž by se změnily nejpozději přípustné začátky následujících činností. Pokud vyčerpáme závislou rezervu u činnosti, jejíž počáteční uzel leží na kritické cestě, stane se z této činnosti kritická činnost.

Řešený příklad 2.6. *Pro činnost* $(5, 7)$ *(montáž klimatizačního zařízení) z projektu v řešeném příkladu 2.1 vypočtěte závislou časovou rezervu.*

Řešení.

$$ZR_{57} = T_7^1 - T_5^1 - t_{57}$$

$$ZR_{57} = 37 - 24 - 5 = 8$$

To znamená, že montáž klimatizačního zařízení můžeme provádět o 8 týdnů déle, nebo můžeme začít o 8 týdnů déle oproti nejpozději přípustnému konci bezprostředně předcházející činnosti (generální oprava elektroinstalace), aniž by se tím změnil nejpozději přípustný začátek následující činnosti (dokončení vnitřních stavebních úprav).

Nezávislá časová rezerva

Nezávislá časová rezerva vyniká tehdy, pokud uzel i je počátečním uzlem více činností a uzel j je koncový uzel více činností, přičemž termíny T_i^1 a T_j^0 byly vypočítány nezávisle na činnosti (i,j). Nezávislá časová rezerva se počítá podle vztahu:

$$NR_{ij} = max(0; T_j^0 - T_i^1 - t_{ij}).$$

Nezávislá rezerva udává počet časových jednotek, o který můžeme trvání dané činnosti prodloužit nebo její nejdříve možný začátek oddálit, když všechny předchozí činnosti byly zakončeny v nejpozději přípustných koncích a všechny následující činnosti budou zahájeny v nejdříve možných začátcích. Vyčerpáme-li NR u činnosti, jejíž počáteční i koncový uzel leží na kritické cestě, stane se z této činnosti činnost kritická.

Řešený příklad 2.7. *Pro činnost* $(1,3)$ *(oprava střechy) z projektu v řešeném příkladu 2.1 vypočtěte nezávislou časovou rezervu.*

Řešení.

$$NR_{13} = max(0; T_3^0 - T_1^1 - t_{13})$$

$$NR_{13} = max(0; 10 - 0 - 6) = 4$$

2.3 Časová analýza stochastických projektů

Pro řešení stochastických projektů, kde doba trvání jednotlivých činností není určena jednoznačně, je nejrozšířenější metoda **PERT** (Program Evaluation and Review Techique).

PERT

Je to modifikace metody CPM. Při aplikaci metody CPM známe přesně dobu trvání jednotlivých činností. Při použití metody PERT známe pro každou činnost pouze tři odhady doby trvání každé činnosti, ze kterých vypočítáme střední hodnotu doby trvání činnosti.U metody PERT jsou tedy jednoznačně určené termíny nahrazeny středními hodnotami náhodných veličin. Jak již bylo zmíněno, pro každou činnost se předpokládá znalost tří odhadů doby jejího trvání, a to:

- optimistický odhad a_{ij} – představuje nejkratší dobu, za kterou je možno danou činnost provést za nejlepších podmínek,
- pesimistický odhad b_{ij} – představuje nejdelší dobu trvání činnosti za nejnepříznivějších podmínek,
- nejpravděpodobnější odhad m_{ij} – představuje dobu trvání činnosti za normálních podmínek.

Pokud zvolíme v intervalu $\langle a_{ij}; b_{ij}\rangle$ diskrétní doby trvání dané činnosti a zkoumáme-li pravděpodobnost, s jakou těchto hodnot nabývá, získáme určité rozdělení pravděpodobnosti. Z teoretických rozdělení toto rozdělení nejlépe vystihuje tzv. β rozdělení (jednovrcholové, spojité, má konečné rozpětí a může být libovolně asymetrické). Jestliže předpokládáme, že doba trvání činností ve stochastických projektech má β rozdělení a že jsou dány tři odhadnuté doby trvání, střední hodnota a rozptyl doby trvání činnosti (i,j) se vypočte podle následujících vzorců:

$$\bar{t}_{ij} = \frac{a_{ij} + 4m_{ij} + b_{ij}}{6}$$

$$\sigma^2(t_{ij}) = \left(\frac{(b_{ij} - a_{ij})}{6}\right)^2$$

Řešený příklad 2.8. *V projektu v řešeném příkladu 2.1 neznáme doby trvání jednotlivých činností přesně, jsme pouze schopni odhadnout tři doby trvání (optimistickou, pesimistickou a nejpravděpodobnější).*

Činnost	*Popis činnosti*	a_{ij}	b_{ij}	m_{ij}
a	*Demontáž starého zařízení*	5	8	10
b	*Oprava střechy výrobní haly*	4	6	7
c	*Oprava podlahy*	1	2	5
d	*Vnitřní stavební úpravy*	2	4	6
e	*Generální oprava elektroinstalace*	7	10	14
f	*Montáž nového výrobního zařízení*	10	12	13
g	*Montáž klimatizačního zařízení*	4	5	8
h	*Zkušební provoz*	3	4	6
i	*Dokončení vnitřních stavebních úprav*	1	3	5

Řešení. Z odhadů vypočteme střední doby trvání jednotlivých činností a rozptyly těchto dob trvání.

činnost (i, j)	a_{ij}	b_{ij}	m_{ij}	t_{ij}	σ^2
$a(1,2)$	5	10	8	7,83	0,69
$b(1,3)$	4	7	6	5,83	0,25
$c(2,3)$	1	5	2	2,33	0,44
$d(3,4)$	2	6	4	4	0,44
$e(4,5)$	7	14	10	10,17	1,36
$f(5,6)$	10	13	12	11,83	0,25
$g(5,7)$	4	8	5	5,33	0,44
$h(6,8)$	3	6	4	4,17	0,25
$i(7,8)$	1	5	3	3	0,44

Pomocí střední hodnoty trvání všech činností stanovíme při metodě PERT kritickou cestu podobně jako u metody CPM. Každý údaj v síťovém diagramu je zde "zdvojen". První údaj vyjadřuje střední hodnotu a druhý údaj rozptyl. Při postupu od začátku do konce síťového diagramu se oba údaje načítají (odděleně střední doba trvání a rozptyl). U koncového uzlu ztotožníme nejdříve možný čas uzlu s nejpozději přípustným časem uzlu a rozptyl "vynulujeme". Při postupu zpět směrem k počátečnímu uzlu doby trvání odečítáme a rozptyly opět načítáme.

Poznámka. Při výběru činnosti, která ovlivní nejdříve možný (nejpozději přípustný) čas uzlu, se řídíme podle střední hodnoty doby trvání činnosti.

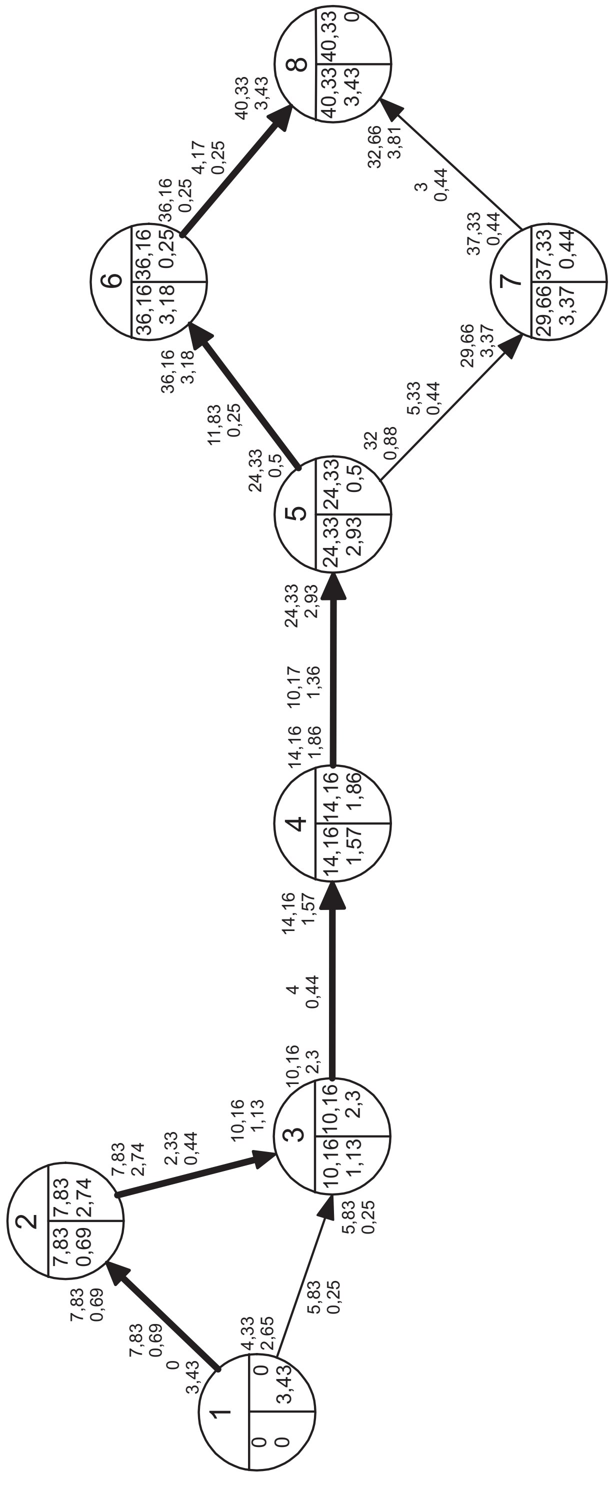
Řešený příklad 2.9. *Ve stochastickém projektu v řešeném příkladu 2.8 určete střední dobu trvání celého projektu, její rozptyl a určete, které činnosti jsou kritické.*

Řešení. Náš projekt má střední hodnotu doby trvání 40,33 týdnů a rozptyl 3,43 – výpočet je v diagramu na obrázku 2.7

Poznámka. Na kritické cestě leží uzly, které mají v obou dolních třetinách stejnou střední hodnotu a součet rozptylů je 3,43.

2.3.1 Pravděpodobnostní výpočty

Pravděpodobnostní výpočty provádíme za předpokladu, že zkoumané termíny jsou nezávislé náhodné veličiny. Tento předpoklad je splněn zpravidla u projektů s velkým počtem činností. Zdůvodnitelný je zejména u doby trvání celého projektu. Podle centrální limitní věty platí, že rozdělení náhodné veličiny T, která je součtem velkého počtu nezávislých náhodných veličin t_{ij}, se blíží normálnímu rozdělení $N = (\overline{T}, \sigma^2(\overline{T}))$.



Obrázek 2.7: Výpočet kritické cesty v síťovém diagramu – PERT

Výpočet pravděpodobnosti dodržení plánovaného termínu

Tato pravděpodobnost se určí pomocí hodnot distribuční funkce $\Phi(x)$ normovaného normálního rozdělení $N(0;1)$. Nejprve se musí náhodná veličina T_n^0 transformovat na normovanou proměnnou

$$U = \frac{T_n^0 - \overline{T_n}^0}{\sigma(T_n^0)}.$$

Potom

$$P(T_n^0 \le T_{pl}) = \Phi\left(\frac{T_{pl}^0 - \overline{T_n}^0}{\sigma(T_n^0)}\right).$$

- Pokud je plánovaný konec dřívější, než střední hodnota doby trvání projektu ($T_{pl} < \overline{T_n}^0$), argument funkce $\Phi(x)$ ve vzorci je záporný. Hodnotu distribuční funkce normovaného normálního rozdělení počítáme podle vztahu

  $$\Phi(-u) = 1 - \Phi(u), u > 0.$$

  Pravděpodobnost dodržení termínu je menší než 50%.

- Pokud je plánovaný konec shodný se střední hodnotou doby trvání projektu ($T_{pl} = \overline{T_n}^0$), pravděpodobnost dodržení termínu bude 50%.

- Pokud je plánovaný konec pozdější než střední hodnota doby trvání projektu ($T_{pl} > \overline{T_n}^0$), pravděpodobnost dodržení termínu je větší než 50%.

Řešený příklad 2.10. *Střední hodnota doby trvání projektu v řešeném příkladu 2.8 je* 40,33 *týdnů s rozptylem* 3,43. *S jakou pravděpodobností bude projekt ukončen nejpozději v čase* 42 *týdnů?*

Řešení.

$$P(T_8^0 \le 42) = \Phi\left(\frac{42 - 40{,}33}{\sqrt{3{,}43}}\right) = \Phi(0{,}90) = 0{,}8159.$$

V tabulce distribuční funkce normovaného normálního rozdělení k příslušnému argumentu najdeme pravděpodobnost. Projekt bude ukončen nejpozději ve 42. týdnu s pravděpodobností 81,59%.

Poznámka. Tabulka distribuční funkce normovaného normálního rozdělení se nachází v příloze.

Řešený příklad 2.11. *Střední hodnota doby trvání projektu v řešeném příkladu 2.8 je* 40,33 *týdnů s rozptylem* 3,43. *S jakou pravděpodobností bude projekt ukončen nejpozději v čase* 39 *týdnů?*

Řešení.

$$P(T_8^0 \le 39) = \Phi\left(\frac{39 - 40{,}33}{\sqrt{3{,}43}}\right) = \Phi(-0{,}72) = 1 - \Phi(0{,}72) = 1 - 0{,}7642 = 0{,}2358.$$

V tabulce distribuční funkce normovaného normálního rozdělení k příslušnému argumentu (jako by byl kladný) najdeme pravděpodobnost a tuto pravděpodobnost odečteme od 1. Projekt bude ukončen nejpozději ve 39. týdnu s pravděpodobností 23,58%.

Určení doby trvání projektu při zvolené míře rizika

Tuto dobu lze stanovit rovněž s využitím tabulek funkce $\Phi(x)$. Je-li velikost rizika r v procentech, v tabulce distribuční funkce normovaného normálního rozdělení najdeme argument t, pro který funkce $\Phi(t)$ nabývá hodnoty $1 - 0{,}1r$. Odpovídající dobu trvání projektu T zjistíme ze vztahu:

$$t = \frac{T - \overline{T}}{\sigma(T)},$$

ze kterého vyjádříme dobu trvání projektu T:

$$T = \overline{T} + t\sigma(T).$$

Řešený příklad 2.12. *Střední hodnota doby trvání projektu v řešeném příkladu 2.8 je* 40,33 *týdnů s rozptylem* 3,43*. Určete dobu realizace projektu, která bude dodržena s rizikem* 20%*.*

Řešení. 20-ti procentnímu riziku nedokončení odpovídá 80-ti procentní pravděpodobnost dokončení. Pro tuto pravděpodobnost zjistíme argument distribuční funkce $t = 0{,}84$. Po dosazení do vzorce zjistíme požadovanou dobu

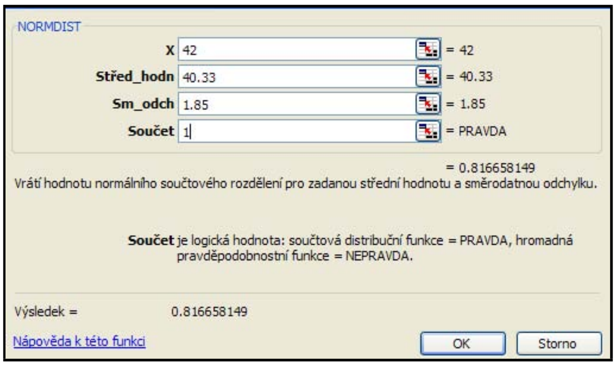
$$T = 40{,}33 + 0{,}84\sqrt{3{,}43} = 41{,}88.$$

S 80-ti procentní pravděpodobností můžeme očekávat, že projekt skončí dříve než v čase 41,88 týdne.

Využití statistických funkcí EXCELu

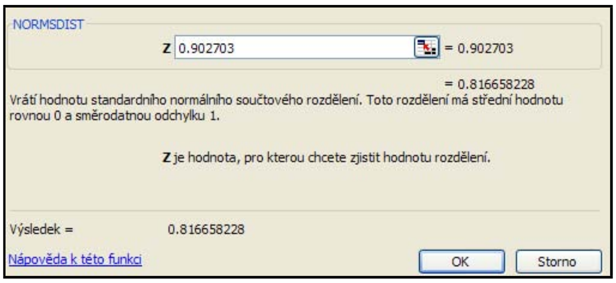
Pro oba výše zmíněné pravděpodobnostní výpočty můžeme využít tabulkový kalkulátor MS Excel. Statistické funkce nalezneme v menu *Vložit – Funkce – Statistické*. Pro zjištění pravděpodobnosti, že projekt skončí nejpozději v určitém čase, použijeme buď funkci NORMDIST (vrací hodnotu distribuční funkce normálního rozdělení s parametry μ a σ) nebo funkci NORMSDIST (vrací hodnotu distribuční funkce normovaného normálního rozdělení).

Příklad 29. *Vezměme řešený příklad 2.10. Pokud pro jeho řešení použijeme funkci NORMDIST, zadáváme údaje: čas, na který se ptáme, střední hodnotu doby trvání, směrodatnou odchylku a logickou proměnnou součet viz obrázek 2.8, pokud použijeme funkci NORMSDIST, zadáváme*



Obrázek 2.8: Dialogové okno pro funkci Normdist

již normovaný časový údaj, viz obrázek 2.9. V obou případech nám Excel vrátí pravděpodobnost,

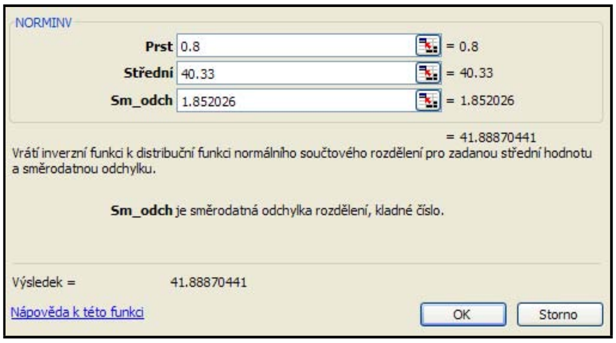


Obrázek 2.9: Dialogové okno pro funkci Normsdist

že projekt skončí v čase 42 *týdnů, nebo čase kratším.*

Pro zjištění času, který dodržíme s určitou pravděpodobností, můžeme použít statistickou funkci NORMINV.

Příklad 30. *Vezměme řešený příklad 2.12. Pokud pro jeho řešení použijeme funkci NORMINV, zadáváme pravděpodobnost, střední hodnotu doby trvání a směrodatnou odchylku, viz obrázek 2.10*



Obrázek 2.10: Dialogové okno pro funkci Norminv

2.3.2 Simulace

Simulace je proces, během něhož počítač napodobuje reálné situace. Neznámý parametr se nevypočte žádnými vzorci, nýbrž napodobováním běhu reálného systému na počítači. Simulace se věnuje systémům pravděpodobnostním a dynamickým, neboť právě ty jsou pro analytické řešení složité. S modelem se provádí experiment, nastavují se různé parametry modelu a zjišťuje se jeho chování. V simulačním modelu jde o statistický experiment. Výsledek matematického modelu je přesný, výsledkem simulačního modelu je odhad. Bez výpočetní techniky by nebylo možné rozsáhlé výpočty realizovat.

Cvičení

Cvičení 2.1. Znázorněte požadovanou časovou závislost mezi danými činnostmi a očíslujte uzly při splnění podmínky $i < j$:

a) činnosti a, b, a c začínají současně; po skončení činností a a b může být zahájena činnost d a začátku činnosti e musí předcházet ukončení činnosti b a c

b) a, b, a c začínají současně; činnost d lze zahájit po skončení činnosti a; zahájení činnosti e musí předcházet ukončení činností a a b a činnost f lze zahájit až po ukončení činností b a c

c) a, b, a c začínají současně; činnost d může začít až po ukončení činnosti a, b, c; začátku e musí předcházet zakončení činností b a c.

Cvičení 2.2. Výzkumný úkol se skládá z osmi dílčích navzájem propojených subetap, z nichž subetapy I a II mohou začít současně. Na etapu I navazují subetapy III a IV, na subetapu IV navazuje subetapa VI a VII. Řešení subetapy V může být zahájeno až po vyřešení subetap II a III a subetapa VIII si vyžádá vyřešení subetap V a VI.

a) Zadaný návazný proces znázorněte pomocí síťového diagramu.

b) Stanovte, s využitím údajů v následující tabulce, dobu nutnou pro uzavření celého výzkumu. Které subetapy jsou pro splnění celého projektu rozhodující?

c) V časovém plánu zjistěte, o kolik týdnů lze prodloužit dobu řešení nebo oddálit nejdříve možný začátek subetapy II, jestliže požadujeme, aby řešení subetapy V začalo

- v nejdříve možném začátku
- nejpozději přípustném začátku

subetapa	doba řešení v týdnech
I	8
II	7
III	1
IV	6
V	1
VI	5
VII	8
VIII	5

Cvičení 2.3. Projekt je zadán množinou činností a ke každé činnosti množinou bezprostředně předcházejících činností. Zakreslete hranově ohodnocený síťový diagram.

Činnost	Předchůdci
A	–
B	–
C	–
D	A
E	A
F	B,D
G	B,D
H	C
I	E,F

Cvičení 2.4. Projekt je zadán množinou činností, jejich počátečními a koncovými uzly a dobami trvání činností. Nakreslete hranově ohodnocený síťový diagram a pomocí metody CPM proveďte časovou analýzu. Nalezněte kritickou cestu a spočítejte celkové a volné rezervy nekritických činností.

Činnosti	Uzly	Doba
A	1,2	5
B	1,3	2
C	1,4	7
D	2,3	3
E	2,5	5
F	3,5	4
G	3,6	2
H	4,6	8
I	5,6	5

Cvičení 2.5. Výstavba hotelu a jeho uvedení do provozu je spojeno s těmito činnostmi:

A – Nakreslení a schválení projektu

B – Zajištění stavební firmy

C – Stavební řízení

D – Provedení zemních prací

E – Nákup a dovoz základního stavebního materiálu

F – Stavba objektu včetně nákupu materiálu

G – Vybavení objektu

H – Výstavba parkoviště

I – Inzerce hotelu

J – Přijetí a zaškolení zaměstnanců

K – Úprava okolí

Časový sled těchto činností je uveden v tabulce.

Činnost	Předchozí činnost	Doba trvání v měsících
A	–	5
B	A	1
C	A	1,5
D	B,C	3
E	B,C	1
F	D,E	25
G	F	4
H	F	3
I	F	1
J	I	1
K	H	1,5

Pro daný projekt sestrojte síťový diagram a zjistěte dobu trvání celého projektu.

Cvičení 2.6. Určete, jak dlouho bude trvat realizace projektu "Zavedení nového výrobku na trh". Dílčí činnosti a jejich doby trvání v týdnech jsou uvedeny v následující tabulce.

Činnost	**Popis**	**Doba trvání**	**Předchůdce**
A	Průzkum trhu	5	–
B	Zvážení rozsahu marketingu a způsobu prodeje	2	A
C	Investice do vybavení a nábor pracovníků	6	A
D	Volba distribuční sítě	3	B
E	Výroba reklamy	8	B
F	Výroba testovacího vzorku	9	C
G	Uzavření dohod s distribučními místy	4	D
H	Reklamní kampaň	3	E
I	Provedení testů	5	F
J	Vyhodnocení testů	1	I
K	Zahájení sériové výroby	3	G, H, J

Cvičení 2.7. Projekt "Zavedení nového výrobku na trh" je tvořen jedenácti dílčími úkoly. Známe odhady dob trvání jednotlivých úkolů, které jsou uvedeny v následující tabulce.

Činnost	**Popis**	a_{ij}	m_{ij}	b_{ij}	**Předchůdce**
A	Průzkum trhu	5	5	8	–
B	Zvážení rozsahu marketingu a způsobu prodeje	1	2	3	A
C	Investice do vybavení a nábor pracovníků	4	6	10	A
D	Volba distribuční sítě	2	3	6	B
E	Výroba reklamy	5	7	12	B
F	Výroba testovacího vzorku	7	8	10	C
G	Uzavření dohod s distribučními místy	3	4	6	D
H	Reklamní kampaň	2	3	5	E
I	Provedení testů	3	5	9	F
J	Vyhodnocení testů	1	1	1	I
K	Zahájení sériové výroby	1	3	4	G, H, J

Zjistěte, jaká je očekávaná doba trvání projektu a její rozptyl.

Cvičení 2.8. Uvažujme cvičení 2.2 s tím, že neznáme přesně doby trvání jednotlivých subetap, ale pouze jejich odhady, viz následující tabulka.

	optimistický odhad	pesimistický odhad	nejpravděpodobnější odhad
I	6	8	7
II	6	7	7
III	1	1	1
IV	4	6	5
V	1	1	1
VI	4	5	4
VII	7	8	8
VIII	2	5	3

a) Jaká je střední hodnota doby trvání projektu a jaká je její směrodatná odchylka?

b) Spočítejte pravděpodobnost, že výzkumný úkol bude ukončen do 20 dnů (včetně).

c) Jaká je pravděpodobnost, že se nestihne projekt ukončit za 20 dnů?

d) Spočítejte pravděpodobnost, že výzkumný úkol bude ukončen do 19 dnů (včetně).

e) Spočítejte pravděpodobnost, že se nestihne projekt ukončit za 19 dnů?

f) Jaká je doba trvání projektu, kterou je možno dodržet s rizikem 30%?

Cvičení 2.9. Před zahájením fotbalového turnaje je potřeba provést následující činnosti:

A – Sestavení přípravného výboru

B – Zajištění termínu turnaje a hřiště

C – Zajištění adres sportovních klubů

D – Rozeslání pozvánek

E – Příjem odpovědí

F – Zajištění propagace turnaje

G – Zajištění rozhodčích

H – Zajištění sponzorů turnaje

I – Zajištění věcných cen

J – Zajištění ubytování a stravování hráčů

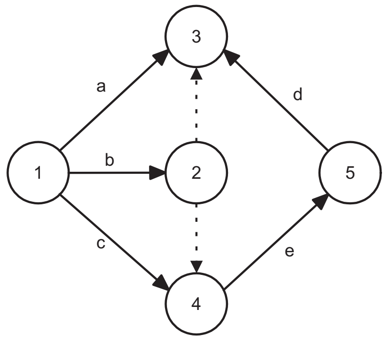
Časový sled uvedených činností spolu s optimistickým, pesimistickým a nejpravděpodobnějším odhadem dob jejich trvání (ve dnech) je uveden v následují tabulce.

Činnost	Předchůdce	a_{ij}	b_{ij}	m_{ij}
A	–	2	4	3
B	A	2	2	2
C	A	2	5	3
D	B, C	2	2	2
E	D	14	14	14
F	E	2	2	2
G	B	2	4	3
H	E	5	10	7
I	H	2	4	3
J	E	1	4	2

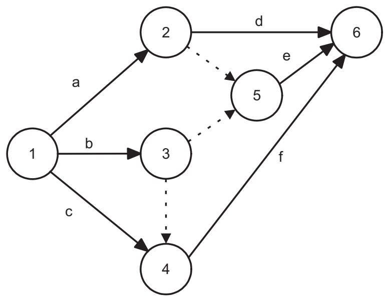
1. Pro daný projekt sestrojte síťový diagram.
2. Stanovte očekávanou nejdříve možnou dobu zahájení turnaje a její rozptyl.
3. Za předpokladu, že termín konání turnaje byl zvolen 35 dní po zahájení příprav, s jakou pravděpodobností se tento termín stihne?
4. Stanovte nejdříve možný začátek zajišťování věcných cen, který bude realizovatelný s 95% pravděpodobností.

Výsledky

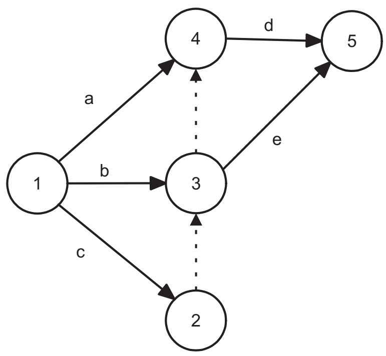
Výsledky 2.1
Poznamenejme, že číslování uzlů nemusí být jednoznačné. Ze zadání vyplývá, že číslo koncového uzlu má být větší, než číslo počátečního. I přes splnění tohoto požadavkulze očíslovat uzly v grafu různými způsoby.



a)

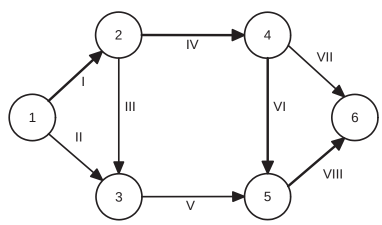


b)



c)

Výsledky 2.2
Síťový diagram je možné nakreslit i s fiktivními činnostmi, výsledný čas projektu se tím nezmění.

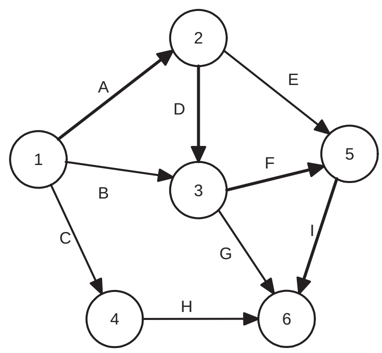


a)

b) Doba potřebná k dokončení výzkumu je 24 týdnů. Kritické jsou subetapy I, IV, VI, VIII.

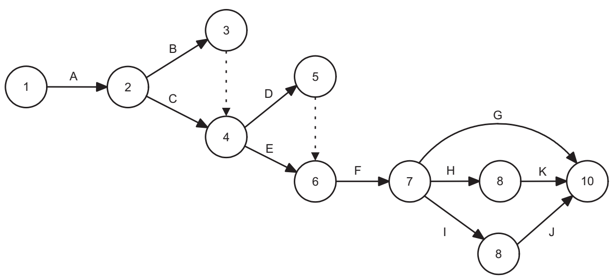
c)
- $VR_{II} = 2$ týdny,
- $CR_{II} = 11$ týdnů.

Výsledky 2.3
Síťový diagram je možné nakreslit i s fiktivními činnostmi, výsledný čas projektu se tím nezmění.

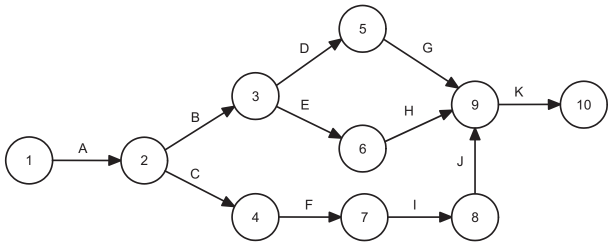


Výsledky 2.4
Síťový diagram se shoduje s diagramem v předchozím cvičení. Kritická cesta vede mezi uzly $1 \to 2 \to 3 \to 5 \to 6$, doba trvání projektu je 17 časových jednotek. Rezervy jsou $CR_{13} = 6$, $VR_{13} = 6$, $CR_{14} = 2$, $VR_{14} = 0$, $CR_{25} = 2$, $VR_{25} = 2$, $CR_{36} = 7$, $VR_{36} = 7$, $CR_{46} = 2$, $CR_{46} = 2$.

Výsledky 2.5
Doba trvání projektu je 39 měsíců, kritická cesta je znázorněna v síťovém diagramu.



Výsledky 2.6
Doba trvání projektu je 29 týdnů, kritická cesta je znázorněna v síťovém diagramu.



Výsledky 2.7
Síťový diagram je shodný s diagramem v předchozím cvičení, doba trvání projektu je 29,17 týdnů, směrodatná odchylka je 1,66.

Výsledky 2.8 a) Střední hodnota doby trvání projektu je 19,33 týdnů, směrodatná odchylka je 0,71.

b) $82,7\%$.

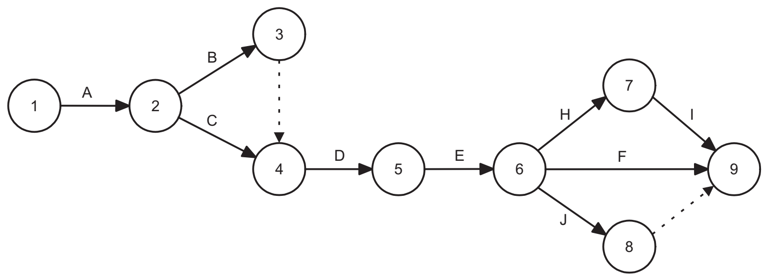
c) $17,3\%$.

d) $32,1\%$.

e) $67,9\%$.

f) $19,7$ týdnů.

Výsledky 2.9 1. Fiktivní činnosti v síťovém diagramu jsou nutné, opět však platí, že pokud diagram bude s více fiktivními činnostmi, doba trvání projektu se nemění.



2. Očekávaná nejdříve možná doba trvání turnaje je $32,\overline{3}$, rozptyl je $1,1\overline{6}$.

3. $99,32\%$.

4. 31 dní.

2.4 Časově-nákladová analýza

Metoda CPM a PERT přihlíží pouze k časovým vztahům v projektech, přitom optimální časový rozvrh činností nemusí být vždy hospodárný. Základním kritériem efektivnosti projektu jsou zpravidla náklady spojené s jeho realizací a ty úzce souvisejí s dobou trvání.

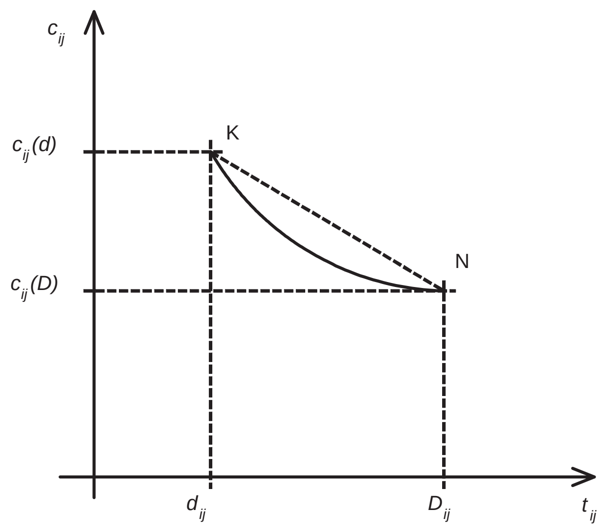
Náklady

Náklady nepřímé – souvisí s realizací projekt jako celku (režijní náklady, ztráty vzniklé pozdním dokončením projektu). Jsou rostoucí funkcí doby trvání projektu (my budeme předpokládat lineární závislost).

Náklady přímé – souvisejí s jednotlivými činnostmi (materiál, mzdy). Součtem přímých nákladů na jednotlivé činnosti získáme přímé náklady na celý projekt. Přímé náklady na realizaci činnosti (i, j) v čase (t_{ij}) označíme (c_{ij}) . Budeme předpokládat opět lineární závislost na době trvání (v tomto případě funkce nerostoucí – se zkrácením doby trvání rostou náklady). Tvar nákladové funkce odvodíme podle těchto pojmů:

- (D_{ij}) normální doba trvání činnosti (i, j), které odpovídají minimální náklady $(c_{ij})(D)$
- (d_{ij}) krajní doba trvání činnosti (i, j) při maximálně intenzivním režimu s vysokými náklady $(c_{ij})(d)$.

Přímka KN aproximuje graf závislosti přímých nákladů na době trvání příslušné činnosti. Rovnice



Obrázek 2.11: Graf přímých nákladů

této přímky je:

$$c_{ij} = b_{ij} - a_{ij}t_{ij},$$

kde

$$a_{ij} = \frac{c_{ij}(d) - c_{ij}(D)}{D_{ij} - d_{ij}}$$

a

$$b_{ij} = a_{ij}d_{ij} + c_{ij}(d).$$

Pro celý projekt lze úhrnné náklady vyjádřit takto:

$$C_P = \sum_{(i,j)\in P} (b_{ij} - a_{ij}t_{ij})$$

Koeficient a_{ij} představuje nákladový spád mezi dvojicí bodů odpovídajících normálnímu a maximálně intenzivnímu režimu (v opačném směru jde o nákladový růst).

2.4.1 Minimalizace přímých nákladů při dané době trvání projektu

Pro přímé náklady spojené s realizací celého projektu v čase T platí:

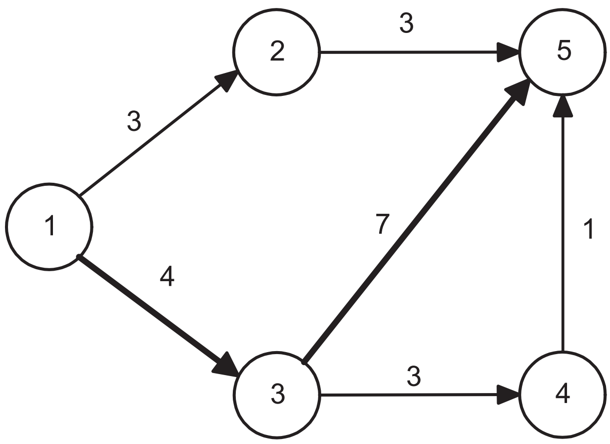
$$\sum_{(i,j)\in P} c_{ij}(D) \leq C_P \leq \sum_{(i,j)\in P} c_{ij}(d).$$

Při zachování doby trvání projektu T lze tyto náklady snížit prodloužením doby trvání nekritických činností až do dosažení jejich normální doby trvání a až do vyčerpání jejich časových rezerv (zpravidla volných).

Řešený příklad 2.13. *Zjistěte, zda je možné snížit přímé náklady na projekt, který je popsán v následující tabulce. Předpokládejte, že realizace všech činností jsou plánovány podle dob trvání* t_{ij}.

(i,j)	t_{ij}	d_{ij}	D_{ij}	$c_{ij}(d)$	$c_{ij}(D)$
$(1,2)$	3	3	4	23	20
$(1,3)$	4	3	5	17	15
$(2,5)$	3	2	5	16	10
$(3,4)$	3	2	4	26	22
$(3,5)$	7	5	7	38	30
$(4,5)$	1	1	1	10	10

Řešení. Nejprve si sestrojíme síťový diagram a určíme kritickou cestu.



Dále je nutné dopočítat koeficient nákladového spádu a volné rezervy pro všechny nekritické činnosti a náklady vztažené ke skutečné době trvání projektu pro všechny činnosti.

Poznámka. Náklady vztažené ke skutečné době trvání se vypočítají na základě některé krajní doby trvání a nákladů, které se k ní vztahují a koeficientu nákladového spádu. Například pro činnost $(1,3)$ se k intenzivnímu režimu (doba trvání 3 časové jednotky) vztahují náklady 17 nákladových jednotek. Pokud je skutečná doba trvání 4 časové jednotky (o jednu jednotku více než intenzivní režim), skutečné náklady se změní (sníží – prodlužujeme dobu trvání – snižujeme tím přímé náklady) o jeden krát koeficient nákladového spádu pro tuto činnost $(1*1)$. Náklady při skutečné době trvání činnosti $(1,3)$ jsou 16 nákladových jednotek.

(i,j)	t_{ij}	d_{ij}	D_{ij}	$c_{ij}(d)$	$c_{ij}(D)$	a_{ij}	VR_{ij}	$c_{ij}(t)$
$(1,2)$	3	3	4	23	20	3	0	23
$(1,3)$	4	3	5	17	15	1	–	16
$(2,5)$	3	2	5	16	10	2	5	14
$(3,4)$	3	2	4	26	22	2	0	24
$(3,5)$	7	5	7	38	30	4	–	30
$(4,5)$	1	1	1	10	10	–	3	10

S realizací daného projektu jsou spojeny přímé náklady ve výši 117 nákladových jednotek (NJ). Tyto náklady lze snížit u nekritické činnosti $(2,5)$ o dvě časové jednotky (minimum z volné rezervy a rozdílu mezi normální a skutečnou dobou trvání $\min(VR_{25}; (D_{25} - t_{25}))$. Náklady klesnou o 4 NJ ($a_{25} * (D_{25} - t_{25}) = 2 * 2$), tedy $117 - 4 = 113$.

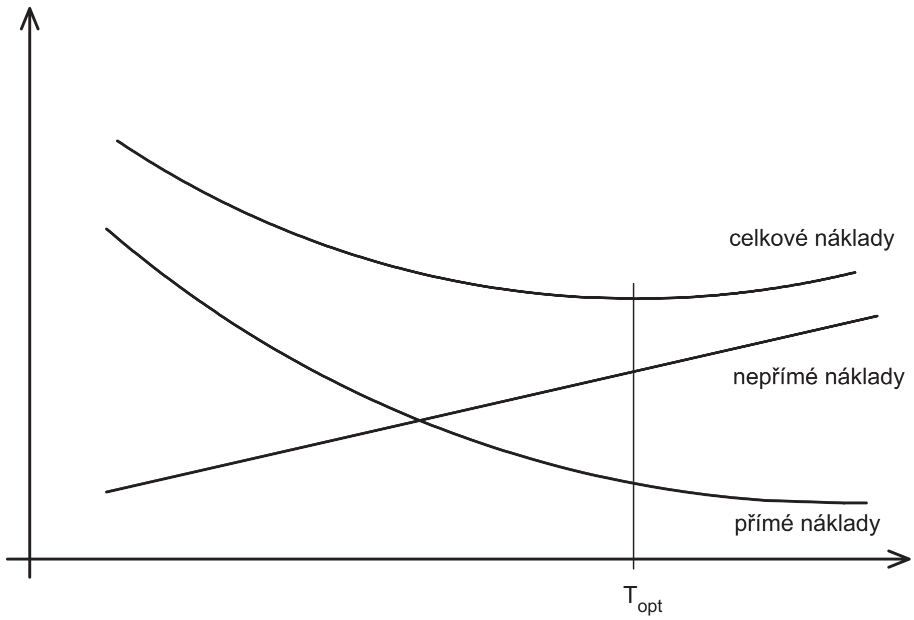
Poznámka. Prodlužujeme dobu trvání nekritické činnosti (i,j) maximálně o dobu

$$\min(VR_{ij}; (D_{ij} - t_{ij}))$$

a přednostně prodlužujeme činnosti s velkým koeficientem nákladového spádu a_{ij}.

2.4.2 Stanovení optimální doby trvání projektu

Z hlediska efektivnosti je optimální doba trvání charakterizovaná minimálními celkovými náklady, které jsou součtem přímých a nepřímých nákladů. Jak již bylo uvedeno, přímé náklady se při zkracování doby trvání činnosti zvyšují a nepřímé náklady se snižují. Při optimální době trvání projektu jsou celkové náklady nejnižší. Tato doba se nalezne tak, že se zkracují doby



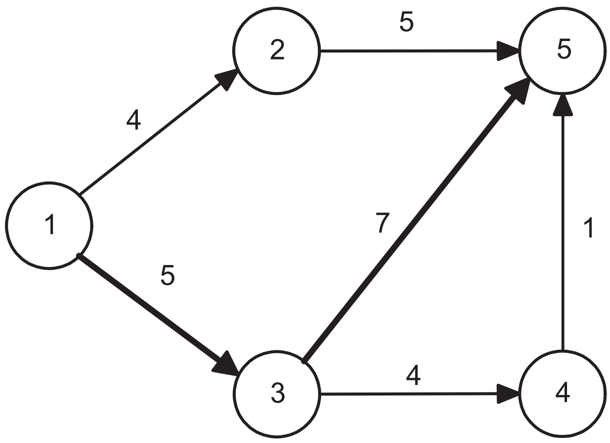
Obrázek 2.12: Graf celkových nákladů

trvání činností ležících na kritické cestě (nejprve u činnosti s nejnižším koeficientem nákladového růstu). Kritické činnosti se zkracují vždy do dosažení krajní doby trvání. Při takovémto zkracování může dojít ke vzniku další kritické cesty, kterou je nutné potom také sledovat.

Řešený příklad 2.14. *Nalezněte optimální dobu trvání projektu, který je popsán v následující tabulce. Nepřímé náklady jsou* 5 *NJ na každou časovou jednotku.*

(i,j)	d_{ij}	D_{ij}	$c_{ij}(d)$	$c_{ij}(D)$	a_{ij}
$(1,2)$	3	4	23	20	3
$(1,3)$	3	5	17	15	1
$(2,5)$	2	5	16	10	2
$(3,4)$	2	4	26	22	2
$(3,5)$	5	7	38	30	4
$(4,5)$	1	1	10	10	–

Řešení. Vycházíme z normálních (nejdelších možných) dob trvání jednotlivých činností. Spočítáme kritickou cestu (viz obrázek).



Do tabulky si budeme zapisovat, jaká je skutečná doba trvání projektu, u které činnosti zkracujeme dobu trvání a jak se při tom mění náklady. Na kritické cestě leží činnosti $(1,3)$ a $(3,5)$. Nižší koeficient nákladového růstu má činnost $(1,3)$, proto začneme s jejím zkracováním. Nejprve ji zkrátíme o jednu časovou jednotku (z 5 na 4 ČJ). Tím se zkrátí doba trvání celého projektu z 12 na 11 ČJ. Nepřímé náklady se sníží o 5 NJ (ze 60 na 55 NJ), přímé náklady vzrostou o 1 NJ (koeficient nákladového růstu a_{13} krát doba, o kterou jsme činnost $(1,3)$ zkrátili). Celkové náklady jsou 163 NJ (součet přímých a nepřímých nákladů pro danou dobu trvání).

Poznámka. Při každém zkrácení doby trvání některé kritické činnosti a tím i celého projektu je potřeba zkontrolovat, jestli neexistuje ještě jiná cesta, která by byla stejně dlouhá jako původní kritická. Pokud by toto nastalo, v dalším kroku by se musely zkracovat obě tyto cesty, aby došlo ke zkrácení doby trvání projektu.

Činnost $(1,3)$ lze zkrátit ještě o 1 ČJ, tím se zkrátí doba trvání celého projektu z 11 na 10 ČJ. Nepřímé náklady klesnou na 50 NJ a přímé náklady vzrostou na 109 NJ, celkové náklady jsou pak 159 NJ. Činnost $(1,3)$ nelze již dále zkracovat (nejkratší možná doba jsou 3 ČJ – intenzivní režim), proto se podíváme na další činnost ležící na kritické cestě. Kritická cesta je pořád jen jedna (leží na ní činnosti $(1,3)$ a $(3,5)$), a jediná činnost, kterou můžeme zkracovat je činnost $(3,5)$. Tuto činnost zkrátíme ze 7 na 6 ČJ, tím se zkrátí doba trvání projektu na 9 ČJ, nepřímé náklady jsou 45 a přímé náklady 113 NJ, celkové pak 158 NJ. Nyní jsou dvě cesty v síťovém diagramu, které mají stejnou dobu trvání (druhá kritická cesta prochází uzly $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 5$. Činnost $(3,5)$ ještě můžeme zkrátit ze 6 na 5 ČJ, projekt by měl projekt trvat pouze 8 ČJ. V tuto chvíli je nutné zkrátit i některou činnost na druhé kritické cestě. Nejnižší koeficient nákladového růstu má činnost $(2,5)$, budeme zkracovat z 5 na 4 ČJ. Nyní (po zkrácení obou kritických cest) projekt trvá 8 ČJ. Nepřímé náklady jsou při takové době trvání 40 NJ, přímé náklady vzrostou o 6 NJ (zkrácením činnosti $(3,5)$ vzrostou o 4 NJ a zkrácením činnosti $(2,5)$ vzrostou o 2 NJ). Pokud projekt trvá 8 ČJ, celkové náklady jsou 159 NJ, což je více, než při době trvání projektu 9 ČJ. Kdybychom zkracovali dobu trvání dále, celkové náklady by vzrůstaly. Optimální doba trvání projektu je 9 ČJ.

T	(i,j)	t_{ij}	$\triangle c_{ij}$	NN	PN	CN
12	–	–	–	60	107	167
11	$(1,3)$	4	1	55	108	163
10	$(1,3)$	3	1	50	109	159
9	$(3,5)$	6	4	45	113	158
8	$(3,5)$ $(2,5)$	5 4	4 2	40	119	159

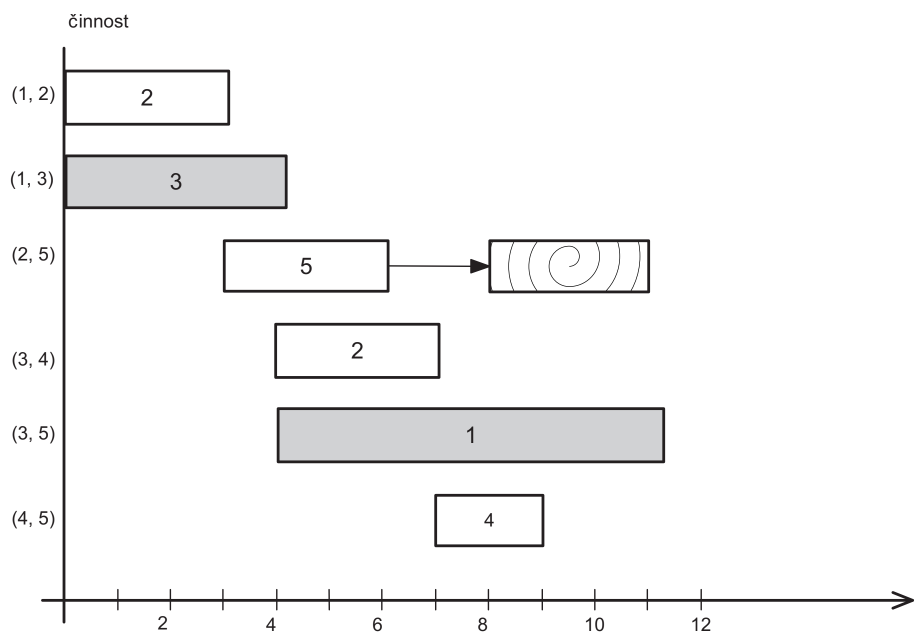
2.5 Časově zdrojová analýza

S realizací projektu je vždy spojeno čerpání zdrojů (práce, materiál, finance, atd.). V řízeném projektu je snaha čerpání zdrojů rovnoměrně rozložit na celou dobu trvání projektu. V některých případech při vzniku kapacitních špiček vznikne nedostatek zdroje (jeho potřeba převyšuje jeho disponibilní množství). Součtová čára (diagram potřeby zdrojů) - graficky vyjadřuje úhrnné nároky na zdroje v každém okamžiku trvání projektu za předpokladu, že každá činnost začne ve svém nejdříve možném začátku. Součtová čára mění svůj průběh v okamžiku, kdy začíná nebo končí nějaká činnost.

Řešený příklad 2.15. *Zjistěte, zda projekt popsaný v následující tabulce lze zvládnout se šesti pracovníky (zdroji). Počet zdrojů potřebných pro jednotlivé činnosti jsou uvedeny rovněž v tabulce.*

(i,j)	t_{ij}	VR_{ij}	CR_{ij}	*Zdroje*
$(1,2)$	3	0	5	2
$(1,3)$	4	–	–	3
$(2,5)$	3	5	5	5
$(3,4)$	3	0	3	2
$(3,5)$	7	–	–	1
$(4,5)$	1	3	3	4

Řešení. Nejprve znázorníme pomocí lineárního Ganntova diagramu jednotlivé činnosti, jak probíhají v čase a jak na sebe navazují (viz obrázek 2.13). Potřeba zdrojů na jednotlivé činnosti je zapsaná v obdélníku znázorňující příslušnou činnost v čase. Další krok v řešení je zjištění

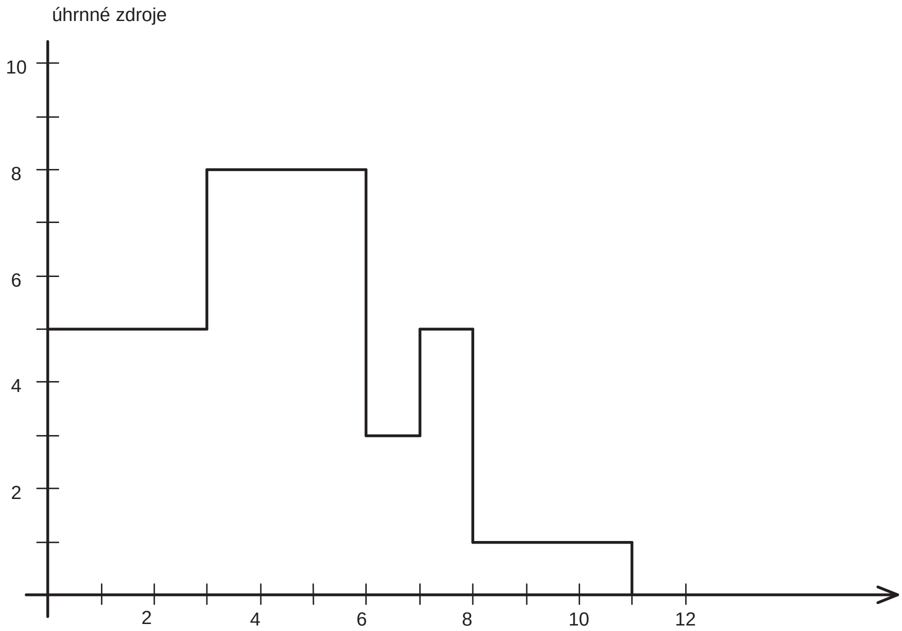


Obrázek 2.13: Ganntův diagram

souhrnné potřeby zdrojů v čase.

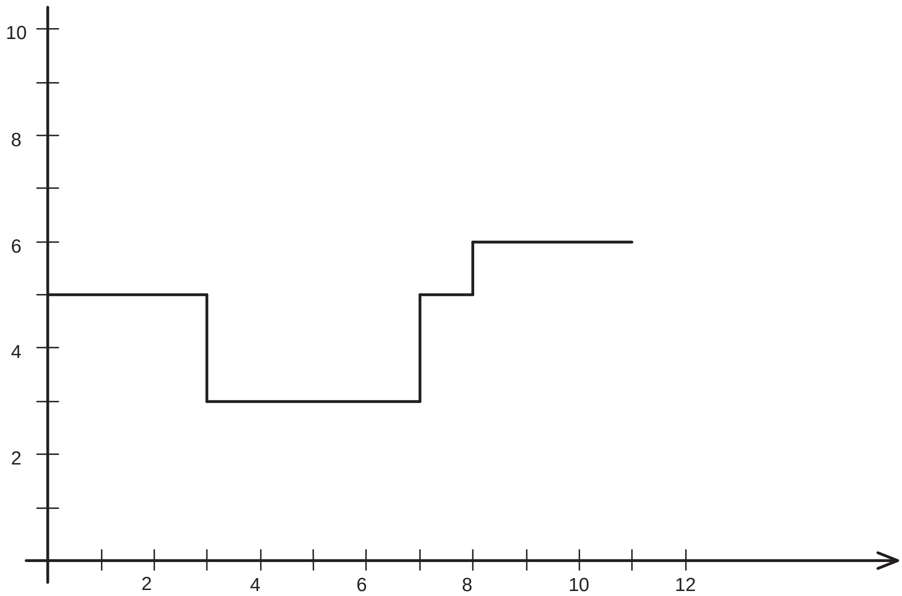
Časový interval	$(0;3)$	$(3;4)$	$(4;6)$	$(6;7)$	$(7;8)$	$(8;11)$
Potřeba zdroje	5	8	8	3	5	1

Přehledně lze znázornit součtovou čarou, viz obrázek 2.14



Obrázek 2.14: Součtová čára

V časovém intervalu $(3;6)$ je potřeba pracovníků 8. Vzhledem k tomu, že k dispozici je pouze 6 pracovníků, je nutné nedostatek zdrojů řešit. Jedna možnost, jak v časovém intervalu $(3;6)$ zvýšený nárok na zdroje odstranit, je, že využijeme volnou časovou rezervu činnosti $(2,5)$ a zahájíme tuto činnost až v čase 8 (místo původního začátku v čase 3), který je jejím nejpozději přípustným začátkem. Potřebu zdrojů v čase opět znázorníme pomocí součtové čáry, viz obrázek 2.15



Obrázek 2.15: Součtová čára – po úpravě

Při posouvání začátků činností se nejprve čerpají volné a nakonec celkové rezervy. Při využití celkových rezerv je potřeba hlídat i činnosti, které na odsouvanou činnost navazují a odsunout je též. Jiná možnost, jak vyřešit nedostatek zdrojů, je prodloužit dobu trvání nekritických činností, čímž se také sníží potřeba zdroje na tuto činnost v průběhu času.

Pomocí součtové čáry lze zjistit časový interval, ve kterém je nárok na zdroj větší než jeho disponibilní množství. Pokud se nepodaří toto snížit s využitím časových rezerv nekritických činností, úpravy časového průběhu se projeví prodloužením doby trvání celého projektu.

Cvičení

Cvičení 2.10. Projekt se skládá ze šesti dílčích činností, které na sebe navazují (viz následující tabulka):

Činnost	A	B	C	D	E	F
Předchůdce	-	-	A	A	B	C

O činnostech máte k dispozici další údaje (viz další tabulka), na základě kterých

1. minimalizujte přímé náklady na projekt při dané době trvání;

2. zjistěte optimální dobu trvání, při které jsou minimální celkové náklady (nepřímé náklady počítejte 3 nákladové jednotky na jednotku trvání);

3. zjistěte, zda lze dodržet naplánovaná doba trvání (každá činnost trvá t_{ij}), pokud máte k dispozici pět pracovníků.

Činnost (i,j)	t_{ij}	d_{ij}	D_{ij}	$c_{ij}(d)$	$c_{ij}(D)$	pracovníci
A (1,2)	10	8	12	24	20	2
B (1,3)	8	8	10	10	6	3
C (2,4)	1	1	3	12	6	1
D (2,5)	5	3	6	18	9	2
E (3,5)	4	3	5	14	12	2
F (4,5)	2	2	2	10	10	2

Cvičení 2.11. K výzkumnému úkolu ze cviceni 2.2 jsme získali další informace:

subetapa	d_{ij}	D_{ij}	$c_{ij}(D)$	$c_{ij}(d)$	potřeba techniků
I	6	8	9	12	4
II	6	7	7	10	3
III	1	1	3	3	1
IV	4	6	15	18	5
V	1	1	5	5	2
VI	4	5	8	11	2
VII	7	8	13	15	6
VIII	2	5	4	6	1

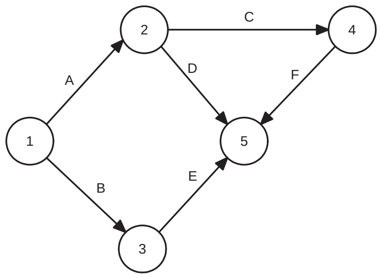
1. Proveďte analýzu závislosti celkových nákladů na době trvání celého výzkumu za předpokladu, že výzkumné práce si vyžádaly modernizaci laboratorního zařízení v hodnotě 300 tisíc Kč a že na výzkum je vázána jedna administrativní pracovnice s denní odměnou 200 Kč. Jaká je optimální doba řešení výzkumného úkolu z hlediska minimalizace celkových nákladů a které subetapy by musely být kvůli tomu zkráceny.

2. Lze při původně stanovené době trvání 24 týdnů ještě snížit přímé náklady? Jakým způsobem?

3. Jak se změní optimální časový rozvrh prací na jednotlivých subetapách (proti původnímu plánu), jestliže se na jejich řešení podílejí technici v omezeném počtu 7?

Výsledky

Výsledky 2.10
Síťový diagram:



1. Minimální přímé náklady při dané době trvání jsou 78 nákladových jednotek.
2. Optimální doba trvání projektu je 14 časových jednotek.
3. Lze, ale v rámci volné rezervy odsuneme činnost $(4, 5)$ o dvě časové jednotky.

Výsledky 2.11
1. Optimální doba trvání projektu je 22 týdnů. Zkrátit je nutné VIII. subetapu na 3 týdny. Minimální celkové náklady jsou pak 387333 Kč.
2. Nelze, protože jak vyplývá ze zadání, při výpočtu kritické cesty, která je 24 týdnů, jsme vycházeli z toho, že všechny činnosti jsou prováděny s maximální dobou trvání. Z toho důvodu je již nelze prodlužovat a snižovat tak přímé náklady.
3. Doba trvání projektu se prodlouží na 27 týdnů.

Příloha A

Softwarová podpora

V této kapitole popíšeme software, který je možné využít pro řešení rozhodovacích problémů, kterými jsme se v těchto skriptech zabývali.

- **Solver** Modul Řešitel (v anglické verzi Solver) je určen pro řešení lineárních i nelineárních úloh matematického programování. Pro ilustraci řešení úlohy lineárního programování pomocí tohoto modulu použijeme následující příklad:

  Obchodník s bylinnými čaji nakoupil od pěstitelů a sběratelů bylin 3 kg usušené máty (5% odpadu) a 1,5 kg usušené třezalky (8% odpadu). Z těchto bylin chce připravit sáčky s hmotností 10 g jednak s čistou mátou, jednak se směsí máty a třezalky. Uvažuje dva druhy směsí, a to směs I, ve které bude poměr máty a třezalky 3:2, a směs II, ve které budou obě tyto byliny zastoupeny stejným dílem. Předpokládaný zisk z prodeje jednoho sáčku uvažovaných druhů čaje je po řadě 2 Kč, 3 Kč, 2 Kč. Kolik sáčků s mátou, se směsí I a se směsí II má obchodník z nakoupených bylin připravit, aby si jejich prodejem zajistil co největší zisk? Neznámé veličiny v dané úloze představují počty sáčků naplněných jednotlivými druhy čajů, a to:

  x_1 ... počet sáčků s mátou,
  x_2 ... počet sáčků se směsí I,
  x_3 ... počet sáčků se směsí II.

  Po odečtení 5% z nakoupeného množství máty a 8% z nakoupeného množství třezalky bude k dispozici 2850 g máty a 1380 g třezalky. Omezení, která jsou dána těmito množstvími, jsou vyjádřena nerovnicemi:

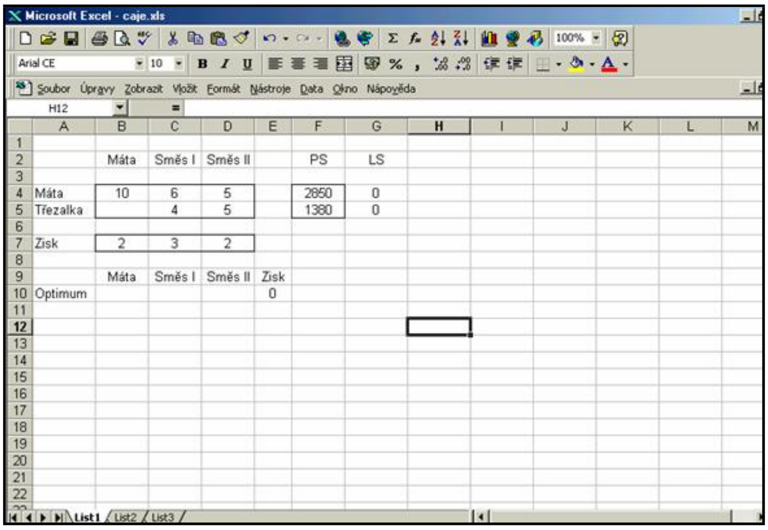
$$\begin{aligned} 10x_1 + 6x_2 + 5x_3 &\leq 2850 \\ 4x_2 + 5x_3 &\leq 1380 \end{aligned}$$

  Účelová funkce představuje závislost zisku na počtu sáčků s jednotlivými druhy čajů a je tedy tvaru:

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \quad \rightarrow \quad \max$$

  Aby úloha dávala smysl, je nutné, aby všechny proměnné nabývaly pouze nezáporných hodnot. Nastavení této podmínky bude zmíněno dále v textu.

  Prvním krokem při práci s modulem Solver je příprava vstupních dat příslušného matematického modelu na list tabulkového procesoru. Uspořádání těchto dat může být v podstatě libovolné, ale musí být dodržena jistá pravidla, která optimalizační modul vyžaduje. Obrázek A.1 ilustruje, jak mohou být ve spreadsheetu rozvržena vstupní data výše uvedeného příkladu (v orámovaných oblastech jsou zapsány povinné údaje; ostatní zápisy v tabulce usnadňují orientaci ve vstupních a výstupních datech řešené úlohy).



Obrázek A.1: Zadávání vstupních údajů

Aby bylo možné zapsat ve spreadsheetu jednotlivé omezující podmínky, je třeba nejdříve vyjádřit jejich levou stranu, a to pomocí skalárního součinu vektoru strukturních koeficientů s vektorem neznámých. Je potřeba vymezit prostor - adresy buněk, kde budou "umístěny" neznámé, a tuto adresu dodržovat při psaní všech podmínek a účelové funkce.

Za předpokladu, že vektor neznámých bude uložen v buňkách B10 až D10, levá strana prvního omezení řešené úlohy je dána funkcí = SOUČIN.SKALÁRNÍ (B4:D4;B10:D10) (v anglické verzi jde o funkci SUMPRODUCT) a je zapsána do buňky G4. Funkci součin skalární naleznete mezi matematickými funkcemi, kde po vyvolání této funkce vyplníte dialogové okno, jako pole 1 označíte buňky s koeficienty levé strany omezující podmínky, jako pole 2 označíte buňky s neznámými. Zkopírováním této funkce do buňky G5 při fixaci adres buněk, ve kterých jsou uloženy jednotlivé neznámé, získáme levou stranu druhé omezující podmínky.

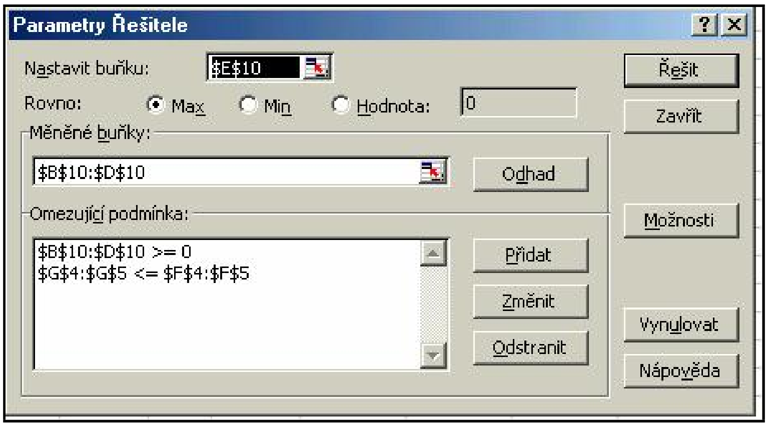
Účelovou funkci lineárního optimalizačního modelu lze též vyjádřit jako skalární součin vektoru koeficientů v účelové funkci s vektorem neznámých. Tento součin má pro řešenou úlohu tvar = SOUČIN.SKALÁRNÍ(B7:D7;B10:D10) a je uložen v buňce E10.

Po ukončení přípravy vstupních dat lze aktivovat vlastní optimalizační modul vyvoláním nabídky Řešitel v rámci menu *Nástroje* (*Tools*). V dialogovém okně "*Parametry řešitele*" (*Solver Parameters*) je potom nutné zadat následující informace:

1. adresu buňky, ve které je vzorec pro výpočet hodnoty účelové funkce (*Nastavit buňku - Set Target Cell*)
2. charakter kritéria optimality, tj. Rovno: Max, Min, Hodnota (equal to: max, min, value of); zvolí se maximalizační nebo minimalizační charakter účelové funkce nebo - pokud jde o řešení úlohy, jejímž cílem je nalezení požadované hodnoty účelové funkce - po volbě "*Hodnota*" se zadá požadované číslo
3. oblast proměnných (neznámých) modelu, tj. *Měněné buňky* (*by Changing Cells*)
4. *Omezující podmínky* (*Subject to the Constraints*); po volbě *Přidat* (*add*) se v dialogovém okně "*Přidat omezující podmínky*" zadávají tři položky, a to:
   – *Odkaz na buňku* (*Cell Reference*), tj. adresa buňky obsahující vzorec pro výpočet levých stran jednotlivých omezujících podmínek

- *Typ omezení* (*Relation*), což je jedna z možností $\leq, \geq, =$, celé (integer) nebo binární (binary)
- *Omezující podmínka* (*Constraint Value*), která může být reprezentována buď adresou buňky obsahující pravou stranu příslušného omezení, nebo může být vložena z klávesnice jako konstanta

Omezující podmínky lze definovat buď každou zvlášť, nebo v bloku, jestliže jde o podmínky se stejným typem omezení. Blokový zápis podmínek je výhodný např. při zápisu podmínek nezápornosti jednotlivých neznámých, kdy jako "Odkaz na buňku" zadáme blok proměnných a po volbě $\geq$ napíšeme jakožto "Omezující podmínku" v dalším dialogovém okénku nulu. Okno "Parametry řešitele" je pro řešenou úlohu zobrazeno na obrázku A.2:

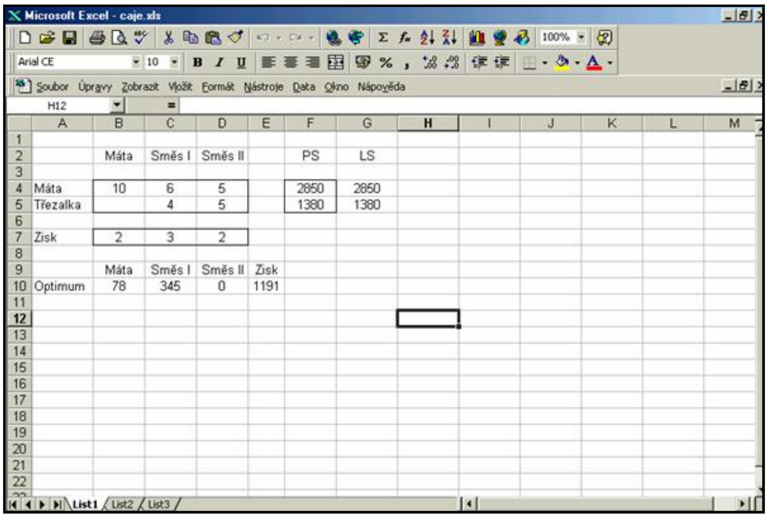


Obrázek A.2: Vyplnění dialogového okna "Parametry Řešitele"

V dialogovém okně "Parametry řešitele" je možné nastavit ještě další parametry, a to v nabídce *Možnosti* (*Options*). V dialogovém okně "Možnosti řešitele" je možné volit především tyto parametry:

- maximální čas (Max Time), který představuje počet sekund, po jehož uplynutí je výpočet přerušen (standardně 100 sekund)
- iterace (Max Iterations), tj. počet iterací, po jehož dosažení je výpočet přerušen a uživateli je nabídnuto řešení z poslední iterace (standardně nastavený počet iterací je 100)
- přesnost (Precision), se kterou musí souhlasit levá a pravá strana omezující podmínky tak, aby byla tato podmínka považována za splněnou (standardní nastavení je 0.000001)
- tolerance (Tolerance), která představuje v procentech vyjádřenou odchylku pro celočíselné řešení (standardně 5%)
- lineární model (Linear Model), který je užitečné zapnout při řešení úloh lineárního programování (standardně tento přepínač není zapnut)
- nezáporná čísla - pokud víme, že všechny proměnné mohou nabývat pouze nezáporných hodnot, zapneme tuto možnost a nemusíme zadávat podmínky nezápornosti jednotlivě.

Po volbě parametrů se z okna „Možnosti řešitele“ vrátíme do okna „Parametry řešitele“ volbou OK a spustíme řešení zadané úlohy volbou *Řešit* (*Solve*). Po ukončení výpočtu je zobrazeno dialogové okno „Výsledky řešení“ (Solver Results) s informacemi o tom, zda bylo nalezeno optimální řešení ("Řešitel nalezl řešení, které splňuje všechny omezující podmínky" – Solver found a solution. All constraints and optimality conditions are satisfied.) nebo zda úloha je neřešitelná („Řešitel nenalezl vhodné řešení"). V případě řešitelnosti úlohy se v listu se vstupními daty zobrazí optimální hodnoty jednotlivých proměnných, odpovídající hodnoty levých stran omezení a odpovídající hodnota účelové funkce. Pro řešenou úlohu se tabulka na obrázku A.1 transformuje na tabulku na obrázku A.3, ze které vyplývá, že maximální zisk ve výši 1191 Kč zajišťuje výroba a prodej 78 sáčků s mátou a 345 sáčků se směsí I, ve které je 60 % máty a 40 % třezalky. Bude spotřebováno veškeré množství usušené máty i třezalky.



Obrázek A.3: Výsledky získané Řešitelem

Pokud daná úloha má optimální řešení, v dialogovém okně "Výsledky řešení" je možné se rozhodnout pro volbu "Uchovat řešení" (Keep Solver Solution) nebo "Obnovit původní hodnoty" (Restore Original Values) a získat podrobnější informace o vypočteném optimálním řešení pomocí Zpráv (Reports), z nichž každá je umístěna do automaticky vygenerovaného samostatného listu. V nabídce jsou tři druhy zpráv:

- Výsledková zpráva (Answer Report) obsahuje jednak informace o původních a konečných hodnotách strukturních proměnných a účelové funkce, jednak informace o vztahu mezi hodnotami pravých a levých stran jednotlivých omezujících podmínek včetně podmínek nezápornosti všech proměnných
- Citlivostní zpráva (Sensitivity Report) obsahuje intervaly stability pro pravé strany omezujících podmínek a pro koeficienty v účelové funkci.
- Limitní zpráva (Limit Report) uvádí, jak se mění hodnota optimalizačního kritéria při změně hodnot proměnných v daných mezích.

Výsledková zpráva řešené úlohy je zobrazena v tabulce na obrázku A.4. Citlivostní zpráva a údaje z ní získané zde nejsou uváděny a vysvětlovány, pokud by čtenář potřeboval více informací o této problematice, doporučujeme [5] nebo [3].

- **LINKOSA**

Modul LINKOSA je součástí balíku doplňků, které pracují nad Excelem. Tyto doplňky vytvořili pracovníci Katedry operační a systémové analýzy PEF ČZU v Praze. Práce s

Microsoft Excel 8.0 Výsledková zpráva					
List: [caje.xls]List1					
Zpráva vytvořena: 13.11.2002 9:31:15					
Nastavovaná buňka (Max)					
Buňka	**Název**	**Původní hodnota**	**Konečná hodnota**		
$E$10	Optimum Zisk	0	1191		
Měněné buňky					
Buňka	**Název**	**Původní hodnota**	**Konečná hodnota**		
$B$10	Optimum Máta	0	78		
$C$10	Optimum Směs I	0	345		
$D$10	Optimum Směs II	0	0		
Omezující podmínky					
Buňka	**Název**	**Hodnota buňky**	**Vzorec**	**Stav**	**Odchylka**
$G$4	Máta	2850	$G$4<=$F$4	Platí	0
$G$5	Třezalka	1380	$G$5<=$F$5	Platí	0
$B$10	Optimum Máta	78	$B$10>=0	Neplatí	78
$C$10	Optimum Směs I	345	$C$10>=0	Neplatí	345
$D$10	Optimum Směs II	0	$D$10>=0	Platí	0

Obrázek A.4: Výsledková zpráva v Excelu

těmito doplňky je uživatelsky velmi příjemná. Stačí zadat pouze vstupní data a vyvolat doplněk (v našem případě LINKOSA). V dialogovém okně vyplníme požadované vstupní údaje (myší označíme buňky, ve kterých jsou tyto údaje naeditovány). Po spuštění výpočtu můžeme kromě výsledků získat i poslední část simplexové tabulky a intervaly stability pravých stran a cen. Pro řešení distribučních úloh slouží modul DUMKOSA.

- **DS WIN**

Tento program obsahuje moduly, které řeší typy úloh z oblasti optimalizace. My můžeme využít modul Lineární programování a Síťová analýza. Po vyvolání příslušného modulu pouze vyplňujeme údaje, které tento modul požaduje (uživatel je veden pomocí dialogových oken). Opět v případě úloh lineárního programování získáme i konečnou simplexovou tabulku i intervaly stability. S programem se pracuje velmi pohodlně.

Příloha B

Tabulka hodnot distribuční funkce normálního normovaného rozdělení $\Phi(x)$

x	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

$\Phi(x) = \mathrm{P}(X \leq x), \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

Literatura

[1] Fiala, P., Jablonský, J., Maňas, M. (1997): *Vícekriteriální rozhodování.* VŠE, Praha.

[2] Gros, I. (2003): *Kvantitativní metody v manažerském rozhodování.* Grada Publishing, Praha.

[3] Jablonský, J. (2002): *Operační výzkum.* Professional Publishing, Praha.

[4] Šubrt, T., Brožová, H., Domeová, L., Kučera, P. (2005): *Ekonomicko matematické metody II Aplikace a cvičení.* PEF ČZU v Praze.

[5] Vaněčková, E. (1996): *Ekonomicko-matematické metody.* ZF JU, skripta, České Budějovice.

[6] Vaněčková, E. (1998): *Rozhodovací modely pro obor obchodně podnikatelský.* ZF JU, skripta, České Budějovice.

[7] Získal, J., Havlíček, J. (1998): *Ekonomicko matematické metody I.* PEF ČZU v Praze.

Název:	**OPERAČNÍ ANALÝZA**
Autor:	**Ing. Jana Friebelová, Ph.D.**
Vydavatel:	**Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích Ekonomická fakulta**
Nakladatel:	**Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích Ekonomická fakulta**
Tisk:	**Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích Ekonomická fakulta, ediční středisko**
Vydání:	**1. vydání, 2009**
Počet stran:	**136**
AA:	**8,5**
Náklad:	**300 výtisků**

Tato publikace neprošla jazykovou úpravou v redakci nakladatelství.
Za věcnou a jazykovou správnost díla odpovídají autoři.

ISBN 978-80-7394-193-2