**JIHOČESKÁ UNIVERZITA**
**V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH**
**Ekonomická fakulta**


# MATEMATIKA II – MATHEMATICS II

## (Matematická analýza – Differential and Integral Calculus)

**Cvičení – Seminar**
**bilingvní text – bilingual text**


**doc. RNDr. Václav NÝDL, CSc.**
**PhDr. Marek ŠULISTA**
**Vivian WHITE-BARAVALLE, M. A.**



**České Budějovice**

**2007**

J I H O Č E S K Á   U N I V E R Z I T A
V   Č E S K Ý C H   B U D Ě J O V I C Í C H
E k o n o m i c k á   f a k u l t a

# MATEMATIKA II – MATHEMATICS II

(Matematická analýza – Differential and Integral Calculus)

Cvičení - Seminar

bilingvní text – bilingual text

doc. RNDr. Václav NÝDL, CSc.
PhDr. Marek ŠULISTA
Vivian WHITE-BARAVALLE, M. A.

2007

Oponent: doc. RNDr. Jan COUFAL, CSc.
katedra matematiky
VŠE Praha

© Václav Nýdl, 2007

ISBN 978-80-7394-040-9

# OBSAH - CONTENTS

# TÉMA 8.A Derivace

| | |
|---|---|
| $x$ ... | nezávisle proměnná |
| $y$ ... | funkce proměnné $x$, tj. $y = y(x)$ (závisle proměnná) |
| $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ ... | první derivace funkce $y{=}f(x)$ podle $x$ |
| $y'(a) = f'(a) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$ ... | hodnota derivace funkce $y = f(x)$ v bodě $a$ def. oboru funkce $f$ |
| stationární bod funkce $f$ ... | bod $a$ def. oboru funkce $f$ takový, že $f'(a) = 0$ |

*Poznámky*

- Derivace $f'(a)$ je hodnota $\operatorname{tg}\alpha$, kde $\alpha$ je úhel mezi tečnou grafu funkce $y{=}f(x)$ v bodě $[a, f(a)]$ a osou "$x$" (tzv. **sklon tečny**).
- Můžeme užívat i jiných symbolů než $y$ a $x$. Příklady: $f'(t)$, $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.
- Když $f'(a)$ existuje, pak $f$ je spojitá v bodě $a$, a $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$;
  když $f'(x)$ existuje pro každé $x \in (a, b)$, pak $f$ je spojitá na intervalu $(a, b)$.
- $I$ buď otevř. interval a $f(x){=}g(x)$ pro každé $x{\in}I$. Pak $f'(x){=}g'(x)$ pro každé $x{\in}I$.
- Je-li $y = f(t)$, kde $t$ je čas, pak $y' = f'(t)$ je funkce vyjadřující **okamžitou rychlost** procesu. Tedy $f'(a)$ je **okamžitá rychlost změny** $y$ při $t = a$.
- **Marginální analýza v ekonomice.** Jsou-li $C(x)$ celkové náklady na produkci $x$ jednotek a $R(x)$ je celkový příjem získaný z prodeje $x$ jednotek, pak hodnota $C'(a)$ (marginální náklady) odhaduje náklady na produkci $a{+}1$-ní jednotky a $R'(a)$ (marginální příjem) odhaduje příjem získaný z prodeje $a{+}1$-ní jednotky.

## *Techniky derivování*

$(k)' = 0$ pro každé $k \in \mathbf{R}$, **(Derivace $k$-násobku)** $[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x)$

**(Derivace součtu/rozdílu)** $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

**(Derivace součinů)** $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$;

$[f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)]' = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$

**(Derivace podílu)** $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$, pokud $g(x) \neq 0$

**(Derivace slož. funkcí)** $[f(g(x))]' = f'(g(x)){\cdot}g'(x)$ či $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}{=}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}{\cdot}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, kde $y{=}f(u), u{=}g(x)$;

$[f(g(h(x)))]' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$

## *Základní vzorce*

$(x)' = 1$, **(Derivace mocniny)** $(x^r)' = r \cdot x^{r-1}$ $(r \neq 0)$, $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$,

$(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $(\operatorname{cotg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$,

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $(\operatorname{arccotg} x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$.

# TOPIC 8.A Derivatives

| | |
|---|---|
| $x \ldots$ | independent variable |
| $y \ldots$ | function of variable $x$, i.e. $y = y(x)$ (dependent variable) |
| $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \ldots$ | the first derivative of function $y{=}f(x)$ with respect to $x$ |
| $y'(a) = f'(a) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a) \ldots$ | the value of the derivative of the function $y = f(x)$ at point $a$ of the domain of function $f$ |
| stationary point of $f$ ... | point $a$ of the domain of $f$ such that $f'(a) = 0$ |

*Notes*

- The derivative $f'(a)$ is the value of $\tan\alpha$ where $\alpha$ is the angle between the tangent to the graph of $y{=}f(x)$ at point $[a, f(a)]$ and the "$x$"-axis (so called **slope of the tangent**).
- Some other symbols than $y$ and $x$ can be used. Examples: $f'(t)$, $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.
- If $f'(a)$ exists then $f$ is continuous at point $a$, and $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$;
  if $f'(x)$ exists for every $x \in (a, b)$ then $f$ is continuous on the interval $(a, b)$.
- On an open interval $I$, if $f(x){=}g(x)$ for every $x{\in}I$ then $f'(x){=}g'(x)$ for every $x{\in}I$ .
- If $y = f(t)$, where $t$ is time, then $y' = f'(t)$ is a function expressing **the instantaneous speed** of the process. Thus $f'(a)$ is **the instantaneous rate of change** of $y$ at $t = a$.
- **Marginal Analysis in Economics.** If $C(x)$ is the total cost of producing $x$ units and $R(x)$ is the total revenue derived from the sale of $x$ units, then $C'(a)$ (the marginal cost) approximates the cost of producing the $a{+}1$ st unit, and $R'(a)$ (the marginal revenue) aproximates the revenue derived from the sale of the $a{+}1$ st unit.

## *Techniques of Differentiation*

$(k)' = 0$ for any $k \in \mathbf{R}$, **(The Constant Multiple Rule)** $[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x)$

**(The Sum/Difference Rule)** $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

**(The Product Rules)** $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$;

$[f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)]' = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$

**(The Quotient Rule)** $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$ if $g(x) \neq 0$

**(The Chain Rules)** $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ or $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}{=}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ where $y{=}f(u), u{=}g(x)$;

$[f(g(h(x)))]' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$

## *Basic Formulas*

$(x)' = 1$, **(The Power Rule)** $(x^r)' = r \cdot x^{r-1}$ $(r \neq 0)$, $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$,

$(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $(\mathrm{cotan}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$,

$(\arcsin x)'{=}\dfrac{1}{\sqrt{1{-}x^2}}$, $(\arccos x)'{=}\dfrac{-1}{\sqrt{1{-}x^2}}$, $(\arctan x)'{=}\dfrac{1}{1{+}x^2}$, $(\mathrm{arccotan}\, x)'{=}\dfrac{-1}{1{+}x^2}$.

## *ŘEŠENÉ PŘÍKLADY*

**Příklad 1.** Derivujte funkce.

(a) $y = x^3 + 4\sqrt{x} - \dfrac{11}{x^2}$ (b) $y = 6 + \mathrm{e}^x \cdot \sin x$ (c) $y = \dfrac{\cos x}{2x}$ (d) $y = \ln\left(x^2 + 13\right)$.

*Řešení.* (a) Užijeme vzorce pro derivace součtu/rozdílu, násobku a mocniny.
$(x^3+4\sqrt{x}-\frac{11}{x^2})' = (x^3)'+4\cdot\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'-11\cdot(x^{-2})' = 3x^2+4\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}-11\cdot(-2)\cdot x^{-3} = 3x^2+\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{22}{x^3}$

*Poznámka.* Všimněte si, že pro určení $\left(\frac{11}{x^2}\right)'$ jsme nepotřebovali vzorec pro derivaci podílu.

(b) Užijeme vzorec pro derivaci součinu a základní vzorce.
$(6 + \mathrm{e}^x \cdot \sin x)' = 6' + (\mathrm{e}^x)' \cdot \sin x + \mathrm{e}^x \cdot (\sin x)' = 0 + \mathrm{e}^x \sin x + \mathrm{e}^x \cos x = \mathrm{e}^x(\sin x + \cos x)$.

(c) Podle vzorce pro derivaci podílu je

$$\left(\frac{\cos x}{2x}\right)' = \frac{(\cos x)' \cdot 2x - [\cos x \cdot (2x)']}{(2x)^2} = \frac{(-\sin x) \cdot (2x) - [\cos x \cdot 2]}{(2x)^2} = -\frac{x \sin x + \cos x}{2x^2}.$$

(d) $f(u) = \ln u$, $u = g(x) = x^2 + 13$. Dosazení $g(x)$ za $u$ ve vzorci pro $f(u)$ dává $y = f(g(x)) = \ln(x^2 + 13)$. Nyní užijeme vzorce pro derivaci podílu:

$$y' = \left[\ln(x^2 + 13)\right]' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u} \cdot 2x = \frac{1}{x^2+13} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+13}.$$

**Příklad 2.** Pro $g(x) = |x^2 - 8x| + 2x \cdot \mathrm{ch}_{(-2,2)}(x)$ vypočtěte hodnotu $g'(3) + g'(-1)$.

*Řešení.* Pro každý z bodů $x = -1,\ 3$ vybereme otevřený interval k derivování $g(x)$.
Bod $3 \in (2, 8)$ a na $(2, 8)$: $g(x) = -(x^2 - 8x) + 2x \cdot 0 = 8x - x^2 \to g'(x) = 8 - 2x$;
bod $-1 \in (-2, 0)$ a na $(-2, 0)$: $g(x) = (x^2 - 8x) + 2x \cdot 1 = x^2 - 6x \to g'(x) = 2x - 6$.
Nyní můžeme vypočíst: $g'(3) + g'(-1) = [8 - 2 \cdot 3] + [2 \cdot (-1) - 6] = 2 + (-8) = -6$.

**Příklad 3.** Najděte velikost úhlu mezi tečnou přímkou grafu funkce $y = x^2 \cdot \mathrm{e}^{-0.12x}$ v bodě $a = 2.3$ a osou $x$.

*Řešení.* Nejdříve určíme derivaci s užitím pravidla pro derivování součinu a slož. funkce.
$y' = \left(x^2 \cdot \mathrm{e}^{-0.12x}\right)' = \left(x^2\right)' \cdot \mathrm{e}^{-0.12x} + x^2 \cdot \left(\mathrm{e}^{-0.12x}\right)' = 2x\mathrm{e}^{-0.12x} - 0.12x^2\mathrm{e}^{-0.12x} = x\mathrm{e}^{-0.12x}(2 - 0.12x)$.
Sklon tečny v bodě $a$=2.3: $y'(2.3) = 2.3 \cdot \mathrm{e}^{(-0.12)\cdot(2.3)}\,[2 - (0.12) \cdot (2.3)] \doteq 3.008845$.
Máme $\tan \alpha \doteq 3.008845$ a užití funkce 'arctg' dává $\alpha \doteq 71.62°$.

**Příklad 4.** Najděte všechny stacionární body funkce $y = \mathrm{e}^{x^3+12x^2+3}$.

*Řešení.* $y' = \left(\mathrm{e}^{x^3+12x^2+3}\right)' = \mathrm{e}^{x^3+12x^2+3} \cdot \left(x^3 + 12x^2 + 3\right)' = \mathrm{e}^{x^3+12x^2+3} \cdot \left(3x^2 + 24x\right) = 0$.
Užili jsme pravidlo pro derivaci složené funkce a pak položili derivaci rovnu nule. Výraz $\mathrm{e}^{x^3+12x^2+3}$ není nikdy roven nule, tedy $3x^2 + 24x = 0 \to x_1$=0, $x_2$= $-8$ (dva stac. body).

**Příklad 5.** Podle veřejných zdravotních záznamů bylo $t$ týdnů po vypuknutí epidemie chřipky přibližně $Q(t) = \dfrac{80}{4 + 76\mathrm{e}^{-1.2t}}$ tisíc nakažených.
Jakou rychlostí se chřipka šířila na konci druhého týdne? [HoBr, pg. 302]

*Řešení.* Získáme vzorec pro rychlost

$$\frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{80' \cdot (4 + 76\mathrm{e}^{-1.2t}) - 80 \cdot (4 + 76\mathrm{e}^{-1.2t})'}{(4 + 76\mathrm{e}^{-1.2t})^2} = \frac{0 - 80 \cdot 76 \cdot \mathrm{e}^{-1.2t} \cdot (-1.2)}{(4 + 76\mathrm{e}^{-1.2t})^2} = \frac{7296\mathrm{e}^{-1.2t}}{(4 + 76\mathrm{e}^{-1.2t})^2}.$$

Nakonec $Q'(2) = \dfrac{7296\mathrm{e}^{(-1.2)\cdot 2}}{\left(4 + 76\mathrm{e}^{(-1.2)\cdot 2}\right)^2} \doteq 5.58$ tisíc lidí týdně.

## *SAMPLE EXERCISES*

**Example 1.** Differentiate the functions.

(a) $y = x^3 + 4\sqrt{x} - \dfrac{11}{x^2}$ (b) $y = 6 + e^x \cdot \sin x$ (c) $y = \dfrac{\cos x}{2x}$ (d) $y = \ln\left(x^2 + 13\right)$.

*Solution.* (a) We use the sum/difference, the constant multiple, and the power rules.
$(x^3 + 4\sqrt{x} - \frac{11}{x^2})' = (x^3)' + 4\cdot\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' - 11\cdot(x^{-2})' = 3x^2 + 4\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}} - 11\cdot(-2)\cdot x^{-3} = 3x^2 + \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{22}{x^3}$

*Note.* Notice that we didn't need the quotient rule to determine $\left(\frac{11}{x^2}\right)'$.

(b) We use the product rule and the basic formulas.
$(6 + e^x \cdot \sin x)' = 6' + (e^x)' \cdot \sin x + e^x \cdot (\sin x)' = 0 + e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x)$.

(c) According to the quotient rule
$$\left(\frac{\cos x}{2x}\right)' = \frac{(\cos x)' \cdot 2x - [\cos x \cdot (2x)']}{(2x)^2} = \frac{(-\sin x)\cdot(2x) - [\cos x \cdot 2]}{(2x)^2} = -\frac{x \sin x + \cos x}{2x^2}.$$

(d) $f(u) = \ln u$, $u = g(x) = x^2 + 13$. Substituting $g(x)$ for $u$ in the formula for $f(u)$ gives $y = f(g(x)) = \ln(x^2 + 13)$. Now, we use the chain rule:
$$y' = \left[\ln(x^2 + 13)\right]' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u}\cdot 2x = \frac{1}{x^2 + 13}\cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + 13}.$$

**Example 2.** For $g(x) = |x^2 - 8x| + 2x\cdot\mathrm{ch}_{(-2,2)}(x)$ calculate the value of $g'(3) + g'(-1)$.
*Solution.* For each of the points $x = -1,\ 3$ we choose an open interval to differentiate $g(x)$.
Point $3 \in (2, 8)$ and on $(2, 8)$: $g(x) = -(x^2 - 8x) + 2x \cdot 0 = 8x - x^2 \ \to g'(x) = 8 - 2x$;
point $-1 \in (-2, 0)$ and on $(-2, 0)$: $g(x) = (x^2 - 8x) + 2x \cdot 1 = x^2 - 6x \ \to g'(x) = 2x - 6$.
Now we can calculate: $g'(3) + g'(-1) = [8 - 2\cdot 3] + [2\cdot(-1) - 6] = 2 + (-8) = -6$.

**Example 3.** Find the measure of the angle between the tangent line to the graph of $y = x^2 \cdot e^{-0.12x}$ at point $a = 2.3$ and the $x$-axis.
*Solution.* First, we compute the derivative using the product rule and the chain rule.
$y' = \left(x^2 \cdot e^{-0.12x}\right)' = \left(x^2\right)' \cdot e^{-0.12x} + x^2 \cdot \left(e^{-0.12x}\right)' = 2xe^{-0.12x} - 0.12x^2e^{-0.12x} = xe^{-0.12x}\,(2 - 0.12x)$.
The slope of the tangent at $a$=2.3: $y'(2.3) = 2.3 \cdot e^{(-0.12)\cdot(2.3)}\,[2 - (0.12)\cdot(2.3)] \doteq 3.008845$.
We have $\tan\alpha \doteq 3.008845$ and the use of the function 'arctan' gives $\alpha \doteq 71.62°$.

**Example 4.** Find all stationary points of the function $y = e^{x^3 + 12x^2 + 3}$.
*Solution.* $y' = \left(e^{x^3+12x^2+3}\right)' = e^{x^3+12x^2+3} \cdot \left(x^3 + 12x^2 + 3\right)' = e^{x^3+12x^2+3} \cdot \left(3x^2 + 24x\right) = 0$.
We used the chain rule, then put the derivative equal to zero. The expression $e^{x^3+12x^2+3}$ never equals zero, thus $3x^2 + 24x = 0 \ \to \ x_1 = 0,\ x_2 = -8$ (two stationary points).

**Example 5.** Public health records indicate that $t$ weeks after the outbreak of a certain form of influenza, approximately $Q(t) = \dfrac{80}{4 + 76e^{-1.2t}}$ thousand people had caught the disease. At what rate was the disease spreading at the end of the 2nd week? [HoBr, pg. 302]
*Solution.* We get the rate of change formula
$$\frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{80' \cdot (4 + 76e^{-1.2t}) - 80 \cdot (4 + 76e^{-1.2t})'}{(4 + 76e^{-1.2t})^2} = \frac{0 - 80 \cdot 76 \cdot e^{-1.2t} \cdot (-1.2)}{(4 + 76e^{-1.2t})^2} = \frac{7296e^{-1.2t}}{(4 + 76e^{-1.2t})^2}.$$

Finally, $Q'(2) = \dfrac{7296e^{(-1.2)\cdot 2}}{\left(4 + 76e^{(-1.2)\cdot 2}\right)^2} \doteq 5.58$ thousand people per week.

## *ÚLOHY K ŘEŠENÍ*

**Úloha 8.A.1.** Najděte všechny body nespojitosti dané funkce.

(a) $y = \mathrm{ch}_{\langle -1,1)}(x) + \mathrm{ch}_{(1,3)}(x)$, (b) $y = \mathrm{ch}_{\langle -1,1)}(x) + 2 \cdot \mathrm{sign}(x)$,

(c) $y = \mathrm{ch}_{\{1\}}(x) + \mathrm{ch}_{\{1\}}(x^2 - 1)$, (d) $y = x \cdot \mathrm{sign}(x) + 2$.

**Úloha 8.A.2.** Derivujte s použitím vzorců pro derivaci součtu/rozdílu, násobku, mocniny a základních elementárních funkcí.

(a) $y = 1 + 2x - x^3$, (b) $y = 2\sqrt{x} + \mathrm{tg}\, x$, (c) $y = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{11}{x^2}$,

(d) $y = 2\sqrt[3]{x} + 3\arcsin x$, (e) $y = 12\mathrm{e}^x + \frac{5}{\sqrt{x}}$, (f) $y = \dfrac{4}{x} - 3\ln x$.

**Úloha 8.A.3.** Derivujte užitím vzorců pro derivaci součinu a podílu.

(a) $y = \sin x \cdot \cos x$, (b) $y = \mathrm{e}^x \cdot \sqrt{x}$, (c) $y = \dfrac{x+3}{x-7}$,

(d) $y = x^2 \cdot \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{tg}\, x$, (e) $y = \dfrac{x \cdot \sin x}{x+5}$, (f) $y = \dfrac{x^2 - 2}{x^2 + 2}$.

**Úloha 8.A.4.** Derivujte užitím vzorců pro derivaci složené funkce.

(a) $y = \sin(2x + 1)$, (b) $y = \ln(\cos x)$, (c) $y = \sqrt{2x - 3}$,

(d) $y = \mathrm{e}^{x^2 - 2x}$, (e) $y = \sin(\cos(7x))$, (f) $y = \arctan(3x)$.

**Úloha 8.A.5.** Vypočtěte hodnotu $y'(2)$ pro danou funkci.

(a) $y = |x^2 - 5x + 4|$, (b) $y = \ln|2x-3| + x{\cdot}\mathrm{ch}_{(1,4)}(x)$, (c) $y = x^2 \cdot \mathrm{sign}(-x)$.

**Úloha 8.A.6.** Zjistěte velikost úhlu mezi tečnou grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $a$ a osou $x$.

(a) $y = 3x - 2\sqrt{x}$, $a = 4$, (b) $y = 2 + x \cdot \mathrm{e}^{2x}$, $a = 0$, (c) $y = \dfrac{x+1}{x-2}$, $a = 1$.

**Úloha 8.A.7.** Najděte všechny stacionární body daných funkcí.

(a) $f(t) = t + \dfrac{1}{t}$, (b) $g(w) = 2w^3 - 9w^2 + 12w - 6$. (c) $h(u) = \dfrac{u+1}{u-2}$.

**Úloha 8.A.8.** Po prudkém růstu hodnot obytných domů na severovýchodě USA v polovině 80-tých let následoval od roku 1990 jejich pokles. Funkce $V(t) = 140\,000\mathrm{e}^{-0.002t}$ odhaduje průměrnou hodnotu $V$ (v \$) rodinného domu v určitém městě, přičemž $t$ se rovná času měřenému v měsících *od* 1. ledna 1990. Jakou rychlostí se sledovaná hodnota měnila k 1. červenci 1991? [Bud. str. 727]

**Úloha 8.A.9.** Podle klasické ekonomické teorie poptávka $d(x)$ po dané komoditě na volném trhu klesá, pokud cena $x$ roste. Předpokládejme, že počet $d(x)$ flash disků, které lidé koupí za týden v daném městě za cenu $x$\$. je $d(x) = \dfrac{50\,000}{x^2 + 10x + 25}$ $(4\$ \leq x \leq 15\$)$. Najděte $d(5)$ a $d'(5)$ a interpretujte. [BaZi, str. 169]

**Úloha 8.A.10.** Náklady na produkci $x$ jednotek nějakého výrobku jsou dány předpisem $C(x) = 1\,000 + 200x - 200\ln x$ $(x \geq 1)$. Najděte $C(10)$ a $C'(10)$ a interpretujte. [BaZi, str. 287]

*PROBLEMS TO SOLVE*

**Exercise 8.A.1.** Find all discontinuity points of the given function.

(a) $y = \mathrm{ch}_{(-1,1)}(x) + \mathrm{ch}_{(1,3)}(x)$, (b) $y = \mathrm{ch}_{(-1,1)}(x) + 2 \cdot \mathrm{sign}(x)$,

(c) $y = \mathrm{ch}_{\{1\}}(x) + \mathrm{ch}_{\{1\}}(x^2 - 1)$, (d) $y = x \cdot \mathrm{sign}(x) + 2$.

**Exercise 8.A.2.** Differentiate using the sum/difference rule, the constant multiple rule, the power rule, and the formulas for derivatives of elementary functions.

(a) $y = 1 + 2x - x^3$, (b) $y = 2\sqrt{x} + \tan x$, (c) $y = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{11}{x^2}$,

(d) $y = 2\sqrt[3]{x} + 3\arcsin x$, (e) $y = 12\mathrm{e}^x + \frac{5}{\sqrt{x}}$, (f) $y = \dfrac{4}{x} - 3\ln x$.

**Exercise 8.A.3.** Differentiate using the product rule and the quotient rule.

(a) $y = \sin x \cdot \cos x$, (b) $y = \mathrm{e}^x \cdot \sqrt{x}$, (c) $y = \dfrac{x+3}{x-7}$,

(d) $y = x^2 \cdot \mathrm{e}^x \cdot \tan x$, (e) $y = \dfrac{x \cdot \sin x}{x+5}$, (f) $y = \dfrac{x^2-2}{x^2+2}$.

**Exercise 8.A.4.** Differentiate using the chain rule.

(a) $y = \sin(2x+1)$, (b) $y = \ln(\cos x)$, (c) $y = \sqrt{2x-3}$,

(d) $y = \mathrm{e}^{x^2-2x}$, (e) $y = \sin(\cos(7x))$, (f) $y = \arctan(3x)$.

**Exercise 8.A.5.** Calculate the value of $y'(2)$ for the given function.

(a) $y = |x^2 - 5x + 4|$, (b) $y = \ln|2x-3| + x \cdot \mathrm{ch}_{(1,4)}(x)$, (c) $y = x^2 \cdot \mathrm{sign}(-x)$.

**Exercise 8.A.6.** Find the measure of the angle between the tangent line to the graph of function $y = f(x)$ at point $a$ and the $x$-axis.

(a) $y = 3x - 2\sqrt{x}$, $a = 4$, (b) $y = 2 + x \cdot \mathrm{e}^{2x}$, $a = 0$, (c) $y = \dfrac{x+1}{x-2}$, $a = 1$.

**Exercise 8.A.7.** Find all stationary points of the given function.

(a) $f(t) = t + \dfrac{1}{t}$, (b) $g(w) = 2w^3 - 9w^2 + 12w - 6$, (c) $h(u) = \dfrac{u+1}{u-2}$.

**Exercise 8.A.8.** Following a rapid increase in the values of residential homes during the mid-1980s, real estate values in the Northeast began to drop in 1990. The function $V(t) = 140,000\mathrm{e}^{-0.002t}$ is a function which estimates the average value $V$ (in \$) of a single-family residence in one particular township, where $t$ equals time measured in months *since* January 1, 1990. At what rate was the value changing on July 1, 1991? [Bud, pg. 727]

**Exercise 8.A.9.** According to classical economic theory, the demand $d(x)$ for a commodity in a free market decreases as the price $x$ increases. Suppose that the number $d(x)$ of flash discs people are willing to buy per week in a given city at a price \$$x$ is given by
$d(x) = \dfrac{50,000}{x^2 + 10x + 25}$ (\$$4 \le x \le$ \$$15$). Find $d(5)$ and $d'(5)$ and interpret. [BaZi, pg. 169]

**Exercise 8.A.10.** The cost of producing $x$ units of a product is given by $C(x) = 1.000 + 200x - 200\ln x$ $(x \ge 1)$. Find $C(10)$ and $C'(10)$ and interpret. [BaZi, pg. 287]

## Minitest MT8.A

**1.** Počet bodů nespojitosti funkce $y = \mathrm{ch}_{\{1\}}(x-1) + \mathrm{ch}_{(0,1)}(x) + \mathrm{sign}(x)$ je

**(A)** 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4.

**2.** Najděte **všechny** stacionární body funkce $y(t) = \sqrt{t^3 - 3t}$.

**(A)** 0 a 1 **(B)** pouze 1 **(C)** pouze $-1$ **(D)** $-1$ a 1
**(E)** žádná z odpovědí není správná.

**3.** Pro $g(x) = 3e^x + \ln x \cdot \cos x + \sqrt{7}$ je velikost úhlu mezi tečnou grafu funkce $g$ v bodě $a = 1.1$ a osou $x$ (zaokrouhlená na celé stupně)

**(A)** 81° **(B)** 82° **(C)** 83° **(D)** 84° **(E)** není žádná z uvedených.

**4.** V MAPLE byl zadán příkaz `diff(sin(x)*exp(x)*x^5,x);` .
Výsledek je

**(A)** $x^3e^x(x\cos x + x\sin x + 5\sin x)$ **(B)** $x^4e^x(x\cos x + x\sin x + 5\sin x)$
**(C)** $e^x(x\cos x + x\sin x + 5\sin x)$ **(D)** $x^4(x\cos x + x\sin x + 5\sin x)$.

**5.** Funkce $P(x) = 20x + 400\sqrt{x}$ modeluje jak zisk $P(x)$ závisí na počtu prodaných kusů za týden (tj. na $x$). Na úrovni prodeje 100 kusů za týden je marginální zisk

**(A)** 30 **(B)** 40 **(C)** 50 **(D)** 60 **(E)** není žádný z uvedených.

**6.** Je-li $y = \dfrac{x^2}{\mathrm{sign}(-x)}$, pak součet $y(1) + y'(1) + y'(-2)$ je roven

**(A)** $-2$ **(B)** $-1$ **(C)** 1 **(D)** 2 **(E)** není žádný z uvedených.

**7.** Sklon tečny grafu funkce $y = px^3 + \ln(2x - 7)$ v bodě $a = 4$ je 26. Pak hodnota parametru $p$ je

**(A)** $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $-\frac{1}{4}$ **(D)** $-\frac{1}{2}$ **(E)** není žádná z uvedených.

**8.** Vzácný umělecký předmět nabýval v posledních letech na ceně. Funkce $V(t) = 1.5e^{0.06t}$ odhaduje hodnotu $V$ tohoto předmětu (v milionech dolarů) jako funkci času $t$, který je měřen v letech od roku 1996. Jakou rychlostí bude růst hodnota tohoto předmětu v roce 2010? (Výsledek udejte v milionech dolarů ročně zaokrouhlený na 2 desetinná místa.) [Bud, str. 717]

**(A)** 0.15 **(B)** 0.17 **(C)** 0.19 **(D)** 0.21 **(E)** žádná z uvedených hodnot.

**9.** Na intervalu $(10, 11)$ je derivace funkce $y = 2x \cdot \mathrm{sign}(3 - 2x) - |x^2 - 6x|$ rovna

**(A)** $y' = -2x + 8$ **(B)** $y' = -2x + 4$ **(C)** $y' = 2x + 8$ **(D)** $y' = 2x + 4$

**10.** Je-li $\dfrac{df}{du} = \dfrac{u \cdot \cos u \cdot (5 - u) - \sin u \cdot (5 - 2u)}{u^2 \cdot (5 - u)^2}$, pak funkce $f(u)$ může být

**(A)** $f(u) = \dfrac{5\sin u}{u - u^2}$ **(B)** $f(u) = \dfrac{\cos u}{5u - u^2}$ **(C)** $f(u) = \dfrac{\sin u}{5u - u^2}$ **(D)** $f(u) = \dfrac{\sin u}{u - 5u^2}$.

## Minitest MT8.A

**1.** The number of discontinuity points of function $y = \mathrm{ch}_{\{1\}}(x-1) + \mathrm{ch}_{(0,1)}(x) + \mathrm{sign}(x)$ is **(A)** 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4.

**2.** Find **all** stationary points of function $y(t) = \sqrt{t^3 - 3t}$.

**(A)** 0 and 1 **(B)** only 1 **(C)** only $-1$ **(D)** $-1$ and 1
**(E)** none of the above is correct.

**3.** For $g(x) = 3e^x + \ln x \cdot \cos x + \sqrt{7}$ the measure of the angle between the tangent to the graph of function $g$ at $a = 1.1$ and the $x$-axis (rounded to the nearest degree) is

**(A)** $81^\circ$ **(B)** $82^\circ$ **(C)** $83^\circ$ **(D)** $84^\circ$ **(E)** none of the above.

**4.** In MAPLE, the command `diff(sin(x)*exp(x)*x^5,x);` was entered. The result is

**(A)** $x^3e^x(x\cos x + x\sin x + 5\sin x)$ **(B)** $x^4e^x(x\cos x + x\sin x + 5\sin x)$
**(C)** $e^x(x\cos x + x\sin x + 5\sin x)$ **(D)** $x^4(x\cos x + x\sin x + 5\sin x)$.

**5.** The function $P(x) = 20x + 400\sqrt{x}$ is modeling how the profit $P(x)$ depends on the number of items sold in one week (i.e. on $x$).
On the level of 100 items sold in one week the marginal profit is equal to

**(A)** 30 **(B)** 40 **(C)** 50 **(D)** 60 **(E)** none of the above.

**6.** If $y = \dfrac{x^2}{\mathrm{sign}(-x)}$, then the sum $y(1) + y'(1) + y'(-2)$ is equal to

**(A)** $-2$ **(B)** $-1$ **(C)** 1 **(D)** 2 **(E)** none of the above.

**7.** The slope of the tangent line to the graph of function $y = px^3 + \ln(2x - 7)$ at point $a = 4$ is 26. Then the value of parameter $p$ is

**(A)** $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $-\frac{1}{4}$ **(D)** $-\frac{1}{2}$ **(E)** none of the above.

**8.** A rare piece of artwork has been appreciating in value over recent years. The function $V(t) = 1.5e^{0.06t}$ estimates the value $V$ of the artwork (measured in millions of dollars) as a function of time $t$, measured in years since 1996. At what rate is the value of the artwork expected to be increasing in the year 2010? (Give your result in millions of dollars per year rounded to 2 decimal places.) [Bud, pg. 717]

**(A)** 0.15 **(B)** 0.17 **(C)** 0.19 **(D)** 0.21 **(E)** none of the above.

**9.** On the interval $(10, 11)$, the derivative of $y = 2x \cdot \mathrm{sign}(3 - 2x) - |x^2 - 6x|$ is

**(A)** $y' = -2x + 8$ **(B)** $y' = -2x + 4$ **(C)** $y' = 2x + 8$ **(D)** $y' = 2x + 4$

**10.** If $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} = \dfrac{u \cdot \cos u \cdot (5 - u) - \sin u \cdot (5 - 2u)}{u^2 \cdot (5 - u)^2}$ then the function $f(u)$ can be

**(A)** $f(u) = \dfrac{5\sin u}{u - u^2}$ **(B)** $f(u) = \dfrac{\cos u}{5u - u^2}$ **(C)** $f(u) = \dfrac{\sin u}{5u - u^2}$ **(D)** $f(u) = \dfrac{\sin u}{u - 5u^2}$.

# TOPIC 8.B. Aplikace derivací

| | |
|---|---|
| $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2}$ | druhá derivace funkce $y{=}f(x)$ podle $x$ |
| $y''(a) = f''(a) = \frac{d^2f}{dx^2}(a)$ | hodnota druhé derivace funkce $y{=}f(x)$ v bodě $a$ definičního oboru funkce $f$ |
| $y^{(k)} = \frac{d^ky}{dx^k} = f^{(k)}(x) = \frac{d^kf}{dx^k}$ | $k$-tá derivace funkce $y{=}f(x)$ podle $x$ |
| $y^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \ldots$ | hodnota $k$-té derivace funkce $y{=}f(x)$ v bodě $a$ definičního oboru funkce $f$ |

*Poznámky*

- Derivace vyšších řádů se získají opakovaným derivováním.
- Je možno užívat jiných symbolů než $y$ a $x$. Příklady: $f'''(t)$, $\frac{d^3u}{dt^3}$.
- Je-li $y = f(t)$, kde $t$ je čas, pak $y'' = f''(t)$ udává **okamžité zrychlení** popisovaného procesu.

## *Aplikace derivací funkce $y = f(x)$*

**Tečná přímka** grafu funkce $f$ v bodě $a$ je $y - f(a) = f'(a)\cdot(x-a)$; v dotykovém bodě $[a, f(a)]$ s grafem je pak kolmice k tečně **normálou** grafu funkce $f$ .

**Diferenciál** funkce $f$ v bodě $a$ je $\mathrm{d}f_a = f'(a)\cdot \mathrm{d}x$. Používá se k aproximaci hodnoty funkce $f$ v bodě $x = a + h$ blízkém k $a$; za d$x$ dosadíme hodnotu přírůstku $h$. Užíváme vzorec $f(x) \doteq f(a) + f'(a)\cdot h$.

**L'Hospitalovo pravidlo** (limity neurčitých výrazů)
Nechť $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \left\|\frac{0}{0}\right\|$ nebo $= \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$. Je-li $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, pak $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = L$.
*(Upozornění: čitatel a jmenovatel se derivují každý zvlášť!)*

**Monotonie a konvexnost** v bodě $a$ nebo na otevřeném intervalu $I$:
$f'(a) > 0 \Rightarrow f$ je rostoucí v $a$, $\quad f'(a) < 0 \Rightarrow f$ je klesající v $a$,
$f''(a) > 0 \Rightarrow f$ je konvexní v $a$, $\quad f''(a) < 0 \Rightarrow f$ je konkávní v $a$,
$(\forall x{\in}I)\, f'(x) > 0 \Rightarrow f$ je rostoucí na $I$, $\quad (\forall x{\in}I)\, f'(x) < 0 \Rightarrow f$ je klesající na $I$,
$(\forall x{\in}I)\, f''(x) > 0 \Rightarrow f$ konvexní na $I$, $\quad (\forall x{\in}I)\, f''(x) < 0 \Rightarrow f$ konkávní na $I$.

**Taylorův mnohočlen $k$-tého stupně** v $a$ pro funkci $y{=}f(x)$ :
$$T(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

## *Lokální extrémy a inflexní body funkce $y{=}f(x)$*

Stacionární bod funkce $f$ je takový bod $a$ jejího def. oboru, že $f'(a) = 0$.
Je-li $a$ stacionární bod funkce $f \wedge f''(a) < 0$, pak $f$ má **lokální maximum** v $a$.
Je-li $a$ stacionární bod funkce $f \wedge f''(a) > 0$, pak $f$ má **lokální minimum** v $a$.
Je-li $f''(a) = 0 \wedge f'''(a) \neq 0$, pak $f$ má **inflexní bod** v $a$.

## *Absolutní extrémy funkce $f$ spojité na uzavřeném intervalu $\langle p, q\rangle$*

Weierstrassova věta zaručuje existenci absolutních extrémů.
K jejich nalezení vyhodnotíme funkci $f$ pouze ve:
*stacionárních bodech + bodech, kde derivace neexistuje + bodech $p, q$.*

# TOPIC 8.B. Aplications of Derivatives

| | |
|---|---|
| $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2}$ | the 2nd derivative of function $y=f(x)$ with respect to $x$ |
| $y''(a) = f''(a) = \frac{d^2f}{dx^2}(a)$ | the value of the second derivative of $y=f(x)$ at point $a$ of the domain of $f$ |
| $y^{(k)} = \frac{d^ky}{dx^k} = f^{(k)}(x) = \frac{d^kf}{dx^k}$ | the $k$th derivative of $y=f(x)$ with respect to $x$ |
| $y^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \ldots$ | the value of the $k$th derivative of function $y=f(x)$ at point $a$ of the domain of $f$ |

*Notes*

- Higher-order derivatives are obtained by repeated differentiation.
- Other symbols than $y$ and $x$ can be used. Examples: $f'''(t)$, $\frac{d^3u}{dt^3}$.
- If $y = f(t)$, where $t$ is time, then $y'' = f''(t)$ gives **the instantaneous acceleration** of the process described.

## *Applications of derivatives of function $y = f(x)$*

**The tangent line** to the graph of $f$ at $a$ is $y - f(a) = f'(a) \cdot (x-a)$; at the tangency point $[a, f(a)]$, the perpendicular to the tangent line is the **normal line** to the graph.

**The differential** of function $f$ at point $a$ is $df_a = f'(a) \cdot dx$. It is used to approximate the value of function $f$ at point $x = a + h$ close to $a$; we replace $dx$ with the increment value of $h$. We use the formula $f(x) \doteq f(a) + f'(a) \cdot h$.

**The L'Hospital's Rule** (limits of indeterminate forms)

Let $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left\| \frac{0}{0} \right\|$ or $= \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|$. If $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ then $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

*(Caution: the numerator and the denominator are differentiated separately!)*

**Monotonicity and Concavity** at a point $a$ or on an open interval $I$:

$f'(a) > 0 \Rightarrow f$ is increasing at $a$, $\quad f'(a) < 0 \Rightarrow f$ is decreasing at $a$,

$f''(a) > 0 \Rightarrow f$ is concave up at $a$, $\quad f''(a) < 0 \Rightarrow f$ is concave down at $a$,

$(\forall x \in I)\, f'(x) > 0 \Rightarrow f$ is increasing on $I$, $\quad (\forall x \in I)\, f'(x) < 0 \Rightarrow f$ is decreasing on $I$,

$(\forall x \in I)\, f''(x) > 0 \Rightarrow f$ concave up on $I$, $\quad (\forall x \in I)\, f''(x) < 0 \Rightarrow f$ concave down on $I$.

**The $k$th-degree Taylor polynomial** at $a$ for function $y=f(x)$ :

$$T(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

## *Local (relative) extrema and points of inflection of the function $y=f(x)$*

The stationary point of function $f$ is such a point $a$ of its domain that $f'(a) = 0$.

If $a$ is a stationary point of $f \wedge f''(a) < 0$, then $f$ has its **local maximum** at $a$.

If $a$ is a stationary point of $f \wedge f''(a) > 0$, then $f$ has its **local minimum** at $a$.

If $f''(a) = 0 \wedge f'''(a) \neq 0$, then $f$ has its **point of inflection** at $a$.

## *Absolute extrema of function $f$ continuous on a closed interval $\langle p, q \rangle$*

The Weierstrass' theorem guarantees the existence of the absolute extrema.

To find them we evaluate the function $f$ only at:

*the stationary points + the points where the derivative is undefined + points $p, q$.*

## *ŘEŠENÉ PŘÍKLADY*

**Příklad 1.** Najděte derivaci 3. řádu funkce $y = x^3 - x \cdot \sin x + 3 \cdot e^{2x-7}$.

*Řešení.* Užijeme pravidla pro derivaci mocniny, součinu a složené funkce:
$y' = 3x^2 - \sin x - x\cos x + 6e^{2x-7} \;\longrightarrow\; y'' = (y')' = 6x - \cos x - \cos x + x\sin x + 12e^{2x-7} = 6x - 2\cos x + x\sin x + 12e^{2x-7} \;\longrightarrow\; y''' = (y'')' = 6 + 3\sin x + x\cos x + 24e^{2x-7}$.

**Příklad 2.** Dána funkce $y = f(t) = \frac{t^2+4}{t-1}$ a bod $b = 2$ jejího definičního oboru.

(a) Je funkce $f$ v bodě $b$ rostoucí nebo klesající, konvexní nebo konkávní?
(b) Udejte rovnici tečny a normály v bodě $b$.
(c) Užijte diferenciál funkce $f$ v bodě $b$ k odhadu hodnot $f(2.011)$ a $f(1.97)$.
(d) Najděte Taylorův polynom 2. stupně v bodě $b$ pro $f$.
(e) Užitím L'Hospitalova pravidla vypočtěte $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t)$ a $\lim\limits_{t\to 2} f(t)$.

*Řešení.* Užijeme pravidlo o derivaci podílu k výpočtu první a druhé derivace.
$\frac{df}{dt} = \frac{2t\cdot(t-1)-(t^2+4)\cdot 1}{(t-1)^2} = \frac{t^2-2t-4}{(t-1)^2}$, $\qquad \frac{d^2f}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{t^2-2t-4}{(t-1)^2}\right) = \frac{10}{(t-1)^3}$.

Budeme potřebovat $f(2) = \frac{2^2+4}{2-1} = 8$, $\quad f'(2) = \frac{2^2-2\cdot 2-4}{(2-1)^2} = -4$, $\quad$ a $f''(2) = \frac{10}{(2-1)^3} = 10$.

(a) $f$ je klesající a konvexní v $b$, protože $f'(b) = -4 < 0$ a $f''(b) = 10 > 0$

(b) Tečna v $P = [b, f(b)] = [2, 8]$: $\quad y - 8 = (-4)\cdot(t-2)$, tj. $y = -4t + 16$.
Normála v $P$ (sklon je $-\frac{1}{-4} = \frac{1}{4}$): $\quad y - 8 = \frac{1}{4}\cdot(t-2)$, tj. $y = \frac{1}{4}t + \frac{15}{2}$.

(c) Diferenciál funkce $f$ v bodě $b$ je $df_b = (-4)\cdot dt$ a aproximace pak jsou:
$f(2.011) \doteq f(2) + (-4)\cdot 0.011 = 7.956$, $\qquad f(1.97) \doteq f(2) + (-4)\cdot(-0.03) = 8.12$.

(d) $T(t) = f(b) + \frac{f'(b)}{1!}(t-b) + \frac{f''(b)}{2!}(t-b)^2 = 8 - 4(t-2) + 5(t-2)^2$.

(e) $\lim\limits_{t\to-\infty} \frac{t^2+4}{t-1} = \left\|\frac{(-\infty)^2+1}{-\infty-1}\right\| = \left\|\frac{+\infty}{-\infty}\right\| = \lim\limits_{t\to-\infty} \frac{(t^2+1)'}{(t-1)'} = \lim\limits_{t\to-\infty} \frac{2t}{1} = \left\|\frac{-\infty}{1}\right\| = -\infty$; $g'(2)$ existuje

$\to g$ je spojitá v $b$=2 $\to \lim\limits_{t\to 2} f(t) = f(2) = \frac{2^2+4}{2-1} = 8$ (L'Hospitalovo pravidlo nemůže být užito).

**Příklad 3.** Rozhodněte, kde je funkce $g(s) = s \cdot e^{-s}$ (a) rostoucí. (b) konvexní.

*Řešení.* (a) První derivace $\frac{dg}{ds}(s \cdot e^{-s}) = 1 \cdot e^{-s} - s \cdot e^{-s} = e^{-s} \cdot (1-s)$.
Testování první derivací: $e^{-s}\cdot(1-s) > 0 \Leftrightarrow 1 - s > 0$, neboť vždy $e^{-s} > 0$.
Závěr: funkce $g$ je rostoucí na $(-\infty, 1)$.

(b) Druhá derivace $\frac{d^2g}{ds^2} = \frac{dg}{ds}((1-s)\cdot e^{-s}) = (-1)\cdot e^{-s} - (1-s)\cdot e^{-s} = e^{-s}\cdot(s-2)$.
Testování druhou derivací: $\quad e^{-s}\cdot(s-2) > 0 \Leftrightarrow s - 2 > 0$, tj. $g$ je konvexní na $(2, +\infty)$.

**Příklad 4.** Pro funkci $h : y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 10$ najděte

(a) její lokální extrémy. (b) její inflexní body, (c) její absolutní extrémy na $\langle 0, 3\rangle$.

*Řešení.* (a) Druhá derivace se musí rovnat nule: $y' = 6x^2 - 6x - 12 = 0 \;\longrightarrow\; a_1 = -1, a_2 = 2$.
Nyní testujeme druhou derivací ($y'' = 12x - 6$) v $a_1$ a $a_2$:
$y''(-1) = -18 \;\longrightarrow\;$ lok. maximum v $a_1 = -1$; $\quad y''(2) = 18 \;\longrightarrow\;$ lok. minimum v $a_2 = 2$.

(b) Položíme $y'' = 12x - 6 = 0$ a máme $a_3 = \frac{1}{2}$. Nyní $y''' = 12$, tj. $y'''(\frac{1}{2}) = 12 \neq 0$, což potvrzuje, že $a_3$ je inflexní bod.

(c) Na $\langle p, q\rangle = \langle 0, 3\rangle$ splňuje funkce podmínky Weierstrassovy věty. Je diferencovatelná na $(0, 3)$, takže vyhodnotíme pouze stacionární bod $a_2$ ($a_1$ je mimo interval $\langle 0, 3\rangle$) a $p$=0, $q$=3.

| $x$ | $a_1$ | $p$ | $q$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-10$ | $10$ | $1$ |

Absolutní maximum (= 10) je v bodě $p$ a absolutní minimum(= −10) je v bodě $a_1$.

## *SAMPLE EXERCISES*

**Example 1.** Find the 3rd derivative of the function $y = x^3 - x \cdot \sin x + 3 \cdot e^{2x-7}$.

*Solution.* We use the power rule, the product rule, the chain rule, etc.:

$y' = 3x^2 - \sin x - x\cos x + 6e^{2x-7} \longrightarrow y'' = (y')' = 6x - \cos x - \cos x + x\sin x + 12e^{2x-7} =$
$6x - 2\cos x + x\sin x + 12e^{2x-7} \longrightarrow y''' = (y'')' = 6 + 3\sin x + x\cos x + 24e^{2x-7}$.

**Example 2.** Given function $y = f(t) = \frac{t^2+4}{t-1}$ and point $b = 2$ in its domain.

(a) Is the function $f$ at point $b$ increasing or decreasing, concave up or down?
(b) Give the tangent and the normal line equations at point $b$.
(c) Use the differential of $f$ at point $b$ to estimate the values of $f(2.011)$ and $f(1.97)$.
(d) Find the 2nd-degree Taylor polynomial at $b$ for $f$.
(e) Using the L'Hospital rule calculate $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t)$ and $\lim\limits_{t\to 2} f(t)$.

*Solution.* We use the quotient rule to calculate the first and the second derivative.

$\frac{df}{dt} = \frac{2t\cdot(t-1)-(t^2+4)\cdot 1}{(t-1)^2} = \frac{t^2-2t-4}{(t-1)^2}$, $\qquad \frac{d^2f}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{t^2-2t-4}{(t-1)^2}\right) = \frac{10}{(t-1)^3}$.

We will need $f(2) = \frac{2^2+4}{2-1} = 8$, $\quad f'(2) = \frac{2^2-2\cdot 2-4}{(2-1)^2} = -4$, $\quad$ and $f''(2) = \frac{10}{(2-1)^3} = 10$.

(a) $f$ is decreasing and concave up at $b$ because $f'(b) = -4 < 0$ and $f''(b) = 10 > 0$

(b) The tangent line at $P = [b, f(b)] = [2, 8]$: $\quad y - 8 = (-4)\cdot(t-2)$, i. e. $y = -4t + 16$.
The normal line at $P$ (the slope is $-\frac{1}{-4} = \frac{1}{4}$): $\quad y - 8 = \frac{1}{4}\cdot(t-2)$, i. e. $y = \frac{1}{4}t + \frac{15}{2}$.

(c) The differential of function $f$ at point $b$ is $df_b = (-4)\cdot dt$ and the approximations are:
$f(2.011) \doteq f(2) + (-4)\cdot 0.011 = 7.956$, $\qquad f(1.97) \doteq f(2) + (-4)\cdot(-0.03) = 8.12$.

(d) $T(t) = f(b) + \frac{f'(b)}{1!}(t-b) + \frac{f''(b)}{2!}(t-b)^2 = 8 - 4(t-2) + 5(t-2)^2$.

(e) $\lim\limits_{t\to-\infty} \frac{t^2+4}{t-1} = \left\|\frac{(-\infty)^2+1}{-\infty-1}\right\| = \left\|\frac{+\infty}{-\infty}\right\| = \lim\limits_{t\to-\infty} \frac{(t^2+1)'}{(t-1)'} = \lim\limits_{t\to-\infty} \frac{2t}{1} = \left\|\frac{-\infty}{1}\right\| = -\infty$; $g'(2)$ exists
$\to g$ is continuous at $b$=2 $\to \lim\limits_{t\to 2} f(t) = f(2) = \frac{2^2+4}{2-1} = 8$ (the L'Hospital rule can not be used).

**Example 3.** Decide where the function $g(s) = s\cdot e^{-s}$ is (a) increasing, (b) concave up.

*Solution.* (a) The first derivative $\frac{dg}{ds}(s\cdot e^{-s}) = 1\cdot e^{-s} - s\cdot e^{-s} = e^{-s}\cdot(1-s)$.
The first derivative test: $e^{-s}\cdot(1-s) > 0 \Leftrightarrow 1 - s > 0$, because always $e^{-s} > 0$.
Conclusion: the function $g$ is increasing on $(-\infty, 1)$.

(b) The 2nd derivative $\frac{d^2g}{ds^2} = \frac{dg}{ds}((1-s)\cdot e^{-s}) = (-1)\cdot e^{-s} - (1-s)\cdot e^{-s} = e^{-s}\cdot(s-2)$.
The 2nd derivative test: $e^{-s}\cdot(s-2) > 0 \Leftrightarrow s - 2 > 0$, i.e. $g$ is concave up on $(2, +\infty)$.

**Example 4.** For function $h: y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 10$ find

(a) its local extrema, $\quad$ (b) its points of inflection, $\quad$ (c) its absolute extrema on $\langle 0, 3\rangle$.

*Solution.* (a) The derivative must be equal to zero: $y' = 6x^2 - 6x - 12 = 0 \longrightarrow a_1 = -1, a_2 = 2$.
Now, we use the second derivative test ($y'' = 12x - 6$) on $a_1$ and $a_2$:
$y''(-1) = -18 \longrightarrow$ loc. maximum at $a_1 = -1$; $\quad y''(2) = 18 \longrightarrow$ loc. minimum at $a_2 = 2$.

(b) We put $y'' = 12x - 6 = 0$ and we have $a_3 = \frac{1}{2}$. Now, $y''' = 12$, i.e. $y'''(\frac{1}{2}) = 12 \neq 0$, which confirms that $a_3$ is a point of inflection.

(c) On $\langle p, q\rangle = \langle 0, 3\rangle$, the function satisfies the conditions of the Weierstrass's theorem. It is differentiable on $(0, 3)$, so we only evaluate the stationary point $a_2$ ($a_1$ is out of $\langle 0, 3\rangle$) and $p$=0, $q$=3.

| $x$ | $a_1$ | $p$ | $q$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-10$ | 10 | 1 |

Absolute maximum (= 10) is at point $p$ and absolute minimum(= $-10$) is at point $a_1$.

## *ÚLOHY K ŘEŠENÍ*

**Úloha 8.B.1.** Pro funkci $y = f(x)$ zjistěte, zda je v bodě $a$ rostoucí nebo klesající, konvexní nebo konkávní; pak udejte rovnice tečny a normály.

(a) $y = 5x - 2\sqrt{x}$, $a = 4$, (b) $y = 6 + x \cdot \mathrm{e}^{-2x}$, $a = 0$, (c) $y = \dfrac{x-1}{x+2}$, $a = -1$.

**Úloha 8.B.2.** Vypočtěte limity. Pokud možno užijte L'Hospitalovo pravidlo.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}$, (c) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}$,

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$, (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{2x}$, (f) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{3\ln x}{1-x}$.

**Úloha 8.B.3.** Užitím diferenciálu funkce $y = f(x)$ v daném bodě $a$ aproximujte hodnotu $f(b)$.

(a) $y = 3x^2 - 2\sqrt{x}$, $a = 4, b = 4.001$ (b) $y = 2x + x \cdot \mathrm{e}^{2x}$, $a = 0, b = -0.13$

**Úloha 8.B.4.** Udejte Taylorův mnohočlen stupně $n$ v bodě $a$ pro funkci $f$.

(a) $f(x) = x^4 - 3x^3 - 2x + 5, a = 1, n = 3$, (b) $f(x) = x + 4\sqrt{x}, a = 4, n = 3$,

(c) $f(x) = x \cdot \sin x, a = 0, n = 4$, (d) $h(u) = \ln x, a = 1, n = 4$.

**Úloha 8.B.5.** Najděte inflexní body.

(a) $y = 8 - 4x^2$ (b) $y = x^3 + 6x^2 - 6x + 12$, (c) $y = x^4 - 6x^2 + 6$,

(d) $y = \mathrm{e}^{2x-x^2}$, (e) $y = \sqrt{x^2+1}$, (f) $y = x^2 - \frac{1}{x}$.

**Úloha 8.B.6.** Vyhodnoťte danou funkci na stacionární body a určete jejich povahu.

(a) $f(t) = t + \dfrac{1}{t}$, (b) $g(w) = 2w^3 - 9w^2 + 12w$, (c) $h(u) = \mathrm{e}^{u^2+2u}$, (d) $k(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$.

**Úloha 8.B.7.** Pro funkci $y = f(x)$ najděte na uzavřeném intervalu $I$ její absolutní maximum a absolutní minimum.

(a) $y = x^3 - 6x^2$, $I = \langle 1, 5\rangle$, (b) $y = x^3 - 6x^2$, $I = \langle -1, 1\rangle$, (c) $y = x^3 - 6x^2$, $I = \langle -1, 5\rangle$,

(d) $y = \mathrm{e}^{2x+x^2}$, $I = \langle 0, 2\rangle$, (e) $y = \mathrm{e}^{2x+x^2}$, $I = \langle -2, 2\rangle$, (f) $y = \mathrm{e}^{2x+x^2}$, $I = \langle -1, 2\rangle$.

**Úloha 8.B.8.** V určité továrně je denní produkce $Q(L) = 60,000L^{1/3}$ jednotek, kde $L$ označuje objem nasazené pracovní síly měřený v člověko-hodinách. V současné době je denně nasazeno 1000 člověko-hodin. Užijte diferenciál v $L = 1000$ k odhadu jaký efekt na produkci by mělo omezení nasazené pracovní síly na 940 člověko-hodin. [HoBr, pg. 129]

**Úloha 8.B.9.** Nábytkářská firma odhaduje, že týdenní náklady (v dolarech) na výrobu $x$ kusů ručně dokončované repliky stolu v koloniálním stylu jsou dány jako $C(x) = x^3 - 3x^2 - 80x + 500$, $30 \le x \le 35$. Každý takový stůl je prodáván na 2800 \$ (tj. $R(x) = 2800x$). Jaký je nejvyšší možný týdenní zisk $P(x)$? [Swo, pg. 161]

**Úloha 8.B.10.** Kosmetická firma plánuje uvedení nové linie rtěnky na trh. Oddělení marketingu testovalo ve velkém tuto novou linii v pečlivě vybraném městě a zjistilo, že poptávka odpovídala přibližně funkci $p(x) = 10\mathrm{e}^{-1.1x}$, $0 \le x \le 2$, kde $x$ tisíc kusů rtěnky bylo týdně prodáno za cenu $p$ dolarů za kus. Při jaké ceně se dosáhne maximálního týdenního příjmu $R(x) = x \cdot p(x)$? Jaká je hodnota tohoto týdenního maxima? [BaZi, pg. 287]

## *PROBLEMS TO SOLVE*

**Exercise 8.B.1.** For function $y = f(x)$, at a point $a$ find out if the function is increasing or decreasing, concave up or down; then give the tangent and the normal line equations.

(a) $y = 5x - 2\sqrt{x}$, $a = 4$. (b) $y = 6 + x \cdot e^{-2x}$, $a = 0$. (c) $y = \dfrac{x-1}{x+2}$, $a = -1$.

**Exercise 8.B.2.** Calculate the limits. If possible use the L'Hospital's Rule.

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}$, (b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}$, (c) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}$,

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$, (e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{2x}$, (f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3\ln x}{1-x}$.

**Exercise 8.B.3.** Using the differential of function $y = f(x)$ at a specified point $a$ approximate the value of $f(b)$.

(a) $y = 3x^2 - 2\sqrt{x}$, $a = 4, b = 4.001$ (b) $y = 2x + x \cdot e^{2x}$, $a = 0, b = -0.13$

**Exercise 8.B.4.** Give the $n$th-degree Taylor polynomial at $a$ for function $f$ .

(a) $f(x) = x^4 - 3x^3 - 2x + 5, a = 1, n = 3$, (b) $f(x) = x + 4\sqrt{x}, a = 4, n = 3$,

(c) $f(x) = x \cdot \sin x, a = 0, n = 4$, (d) $h(u) = \ln x, a = 1, n = 4$.

**Exercise 8.B.5.** Find the points of inflection.

(a) $y = 8 - 4x^2$ (b) $y = x^3 + 6x^2 - 6x + 12$, (c) $y = x^4 - 6x^2 + 6$,

(d) $y = e^{2x-x^2}$, (e) $y = \sqrt{x^2+1}$, (f) $y = x^2 - \frac{1}{x}$.

**Exercise 8.B.6.** Examine the function for any stationary points and determine their nature.

(a) $f(t) = t + \dfrac{1}{t}$, (b) $g(w) = 2w^3 - 9w^2 + 12w$, (c) $h(u) = e^{u^2+2u}$, (d) $k(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$.

**Exercise 8.B.7.** For function $y = f(x)$, at a specified closed interval $I$ find the absolute maximum and the absolute minimum.

(a) $y = x^3 - 6x^2$, $I = \langle 1, 5\rangle$, (b) $y = x^3 - 6x^2$, $I = \langle -1, 1\rangle$, (c) $y = x^3 - 6x^2$, $I = \langle -1, 5\rangle$,

(d) $y = e^{2x+x^2}$, $I = \langle 0, 2\rangle$, (e) $y = e^{2x+x^2}$, $I = \langle -2, 2\rangle$, (f) $y = e^{2x+x^2}$, $I = \langle -1, 2\rangle$.

**Exercise 8.B.8.** At a certain factory, the daily output is $Q(L) = 60.000L^{1/3}$ units, where $L$ denotes the size of labor force measured in worker-hours. Currently 1,000 worker-hours of labour are used each day. Use the differential at $L = 1,000$ to estimate the effect on output that will be produced if the labor force is cut to 940 worker-hours. [HoBr, pg. 129]

**Exercise 8.B.9.** A furniture company estimates that the weakly cost (in dollars) of manufacturing $x$ hand finished reproductions of a colonial desk is given by $C(x) = x^3 - 3x^2 - 80x + 500$, $30 \le x \le 35$. Each desk produced is sold for \$2800 (i.e. $R(x) = 2,800x$). What is the largest possible profit per week $P(x)$? [Swo, pg. 161]

**Exercise 8.B.10.** A cosmetic company is planning the introduction and promotion of a new lipstick line. The marketing research department, after test marketing the new line in a large carefully selected city, found that the demand in that city is given approximatelly by $p(x) = 10e^{-1.1x}$, $0 \le x \le 2$, where $x$ thousand lipsticks were sold per week at a price of $p$ dollars each. At what price will the weekly revenue $R(x) = x \cdot p(x)$ be maximum? What is the maximum weekly revenue in the test city? [BaZi, pg. 287]

# Minitest MT8.B

**1.** Najděte rovnici normály grafu funkce $y = \frac{x-1}{x+1}$ v bodě $a = 1$.

**(A)** $2x + y - 2 = 0$ **(B)** $x + y - 1 = 0$ **(C)** $x - y - 1 = 0$
**(D)** $2x - y - 1 = 0$ **(E)** žádná z uvedených.

**2.** Je-li $g(x) = 3x^2 - 4x + 1$, pak tečna grafu funkce $g$ v bodě $a = 2$ protíná osu $y$ v bodě

**(A)** $[0, -11]$ **(B)** $[0, -2]$ **(C)** $[0, 1]$ **(D)** $[0, 11]$ **(E)** jiný výsledek.

**3.** Provedení příkazu `diff(x*exp(2 - x^2),x$2);` v MAPLE dává

**(A)** $-6xe^{2-x^2} + 4x^3e^{2-x^2}$ **(B)** $6xe^{2-x^2} - 4x^3e^{2-x^2}$ **(C)** $-6xe^{2-x^2} - 4x^3e^{2-x^2}$
**(D)** $6xe^{2-x^2} + 4x^3e^{2-x^2}$ **(E)** jiný výsledek než nabídnuto.

**4.** Dána funkce $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$. Nechť $m$ je počet jejích lokálních minim a $M$ počet jejích lokálních maxim. Pak

**(A)** $m = 0 \wedge M = 0$ **(B)** $m = 1 \wedge M = 0$ **(C)** $m = 0 \wedge M = 1$
**(D)** $m = 1 \wedge M = 1$ **(E)** žadný z nabídnutých výsledků není správný.

**5.** Použití diferenciálu funkce $y = 4\sqrt{x^2 + 7}$ v bodě $a = 3$ k aproximaci $y(2.72)$ dává

**(A)** 15.15 **(B)** 15.16 **(C)** 15.17 **(D)** 15.18 **(E)** jiný výsledek.

**6.** Najděte všechny hodnoty parametru $p$ takové, že funkce $y = (x + p) \cdot \ln |x|$ má právě jeden inflexní bod.

**(A)** $(-\infty, +\infty)$ **(B)** $(-\infty, 0)$ **(C)** $(0, +\infty)$ **(D)** $p \neq 0$ **(E)** jiný výsledek.

**7.** $f_1 : y = (x + 1)^2$, $f_2 : y = 2e^x$, $f_3 : y = \ln(x + 2)$, $f_4 : y = -\dfrac{1}{x + 1}$.
Vyberte dvojici funkcí, jež jsou (obě) konvexní na $(-1, 1)$.

**(A)** $f_1, f_2$ **(B)** $f_2, f_3$ **(C)** $f_2, f_4$ **(D)** $f_3, f_4$ **(E)** jiný výsledek.

**8.** Udejte výsledek provedení příkazu v MAPLE

```
limit(sin(3*x)/x, x = 0) + limit((x - 3)/(x + 1), x = 1);
```

**(A)** 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** $+\infty$.

**9.** Najděte maximální otevřený interval, na němž je funkce $y = e^{\frac{1}{x^2+1}}$ klesající.

**(A)** $(-\infty, 1)$ **(B)** $(-\infty, 0)$ **(C)** $(0, +\infty)$ **(D)** $(1, +\infty)$ **(E)** jiný výsledek.

**10.** Odhaduje se, že $t$ let od nynějška bude velikost populace určitého města $N(x) = 200 - t^3 + 9t^2 + 48t$ tisíc. Pro období následujících deseti let $(0 \leq t \leq 10)$ najděte maximum a minimum velikosti populace (v tisících). [HoBr, pg. 160]

**(A)** 200 a 648 **(B)** 540 a 580 **(C)** 580 a 732 **(D)** 200 a 732.

**11.** Dána poptávková funkce $p(x) = \sqrt{2\,500 - x^2}$, kde $x$ je počet poptávaných jednotek a $p(x)$ je jednotková cena. Taylorův polynom $T(x)$ 2. stupně v $a = 0$ může být použit k aproximaci funkce $p(x)$. Rozdíl $T(40) - p(40)$ je roven [BaZi, pg. 611]

**(A)** 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** jiný výsledek.

## Minitest MT8.B

**1.** Find the equation of the normal line to the graph of $y = \frac{x-1}{x+1}$ at point $a = 1$.

**(A)** $2x + y - 2 = 0$ **(B)** $x + y - 1 = 0$ **(C)** $x - y - 1 = 0$
**(D)** $2x - y - 1 = 0$ **(E)** none of the above.

**2.** If $g(x) = 3x^2 - 4x + 1$, then the tangent to the graph of function $g$ at point $a = 2$ intersects the $y$-axis at point

**(A)** $[0, -11]$ **(B)** $[0, -2]$ **(C)** $[0, 1]$ **(D)** $[0, 11]$ **(E)** none of the above.

**3.** In MAPLE, the execution of the command `diff(x*exp(2 - x^2),x$2);` gives

**(A)** $-6xe^{2-x^2} + 4x^3e^{2-x^2}$ **(B)** $6xe^{2-x^2} - 4x^3e^{2-x^2}$ **(C)** $-6xe^{2-x^2} - 4x^3e^{2-x^2}$
**(D)** $6xe^{2-x^2} + 4x^3e^{2-x^2}$ **(E)** none of the above.

**4.** Given function $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$. Let $m$ be the number of all its local minima and let $M$ be the number of all its local maxima. Then

**(A)** $m = 0 \wedge M = 0$ **(B)** $m = 1 \wedge M = 0$ **(C)** $m = 0 \wedge M = 1$
**(D)** $m = 1 \wedge M = 1$ **(E)** none of the above is correct.

**5.** The use of the differential of $y = 4\sqrt{x^2 + 7}$ at $a = 3$ to approximate $y(2.72)$ gives

**(A)** 15.15 **(B)** 15.16 **(C)** 15.17 **(D)** 15.18 **(E)** none of the above.

**6.** Find all the values of parameter $p$ such that the function $y = (x + p) \cdot \ln|x|$ has just one point of inflection.

**(A)** $(-\infty, +\infty)$ **(B)** $(-\infty, 0)$ **(C)** $(0, +\infty)$ **(D)** $p \neq 0$ **(E)** none of the above.

**7.** $f_1 : y = (x + 1)^2$, $f_2 : y = 2e^x$, $f_3 : y = \ln(x + 2)$, $f_4 : y = -\dfrac{1}{x + 1}$.

Choose a couple of functions which are (both) concave up on $(-1, 1)$.

**(A)** $f_1, f_2$ **(B)** $f_2, f_3$ **(C)** $f_2, f_4$ **(D)** $f_3, f_4$ **(E)** none of the above.

**8.** Give the result of executing the MAPLE command

```
limit(sin(3*x)/x, x = 0) + limit((x - 3)/(x + 1), x = 1);
```

**(A)** 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** $+\infty$.

**9.** Find the maximum open interval on which the function $y = e^{\frac{1}{x^2+1}}$ is decreasing.

**(A)** $(-\infty, 1)$ **(B)** $(-\infty, 0)$ **(C)** $(0, +\infty)$ **(D)** $(1, +\infty)$ **(E)** none of the above.

**10.** It is estimated that $t$ years from now, the population of a certain town will be $N(x) = 200 - t^3 + 9t^2 + 48t$ thousand. In next ten year period $(0 \leq t \leq 10)$, find the maximum and the minimum population size (in thousands). [HoBr, pg. 160]

**(A)** 200 and 648 **(B)** 540 and 580 **(C)** 580 and 732 **(D)** 200 and 732.

**11.** Given the demand function $p(x) = \sqrt{2,500 - x^2}$ where $x$ is the number of units demanded and $p(x)$ the price per unit. The second-degree Taylor polynomial $T(x)$ at $a = 0$ can be used to approximate the function $p(x)$. The difference of $T(40) - p(40)$ is equal to [BaZi, pg. 611]

**(A)** 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** none of the above.

# TOPIC 9.A Neurčité integrály

## *Základní pojmy a vlastnosti*

- Funkce $F(x)$, pro níž $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a, b)$, se nazývá **primitivní funkcí** k $f(x)$ na otevřeném intervalu $(a, b)$. Každá funkce, která je spojitá na otevřeném intervalu $I$, má na $I$ primitivní funkci.
- Množina všech primitivních funkcí k funkci $f(x)$ na otevřeném intervalu $(a, b)$ se nazývá **neurčitý integrál** funkce $f(x)$ na tomto intervalu. Každé dvě primitivní funkce k funkci $f(x)$ na daném intervalu se liší o nějakou konstantu.
- Pro neurčitý integrál užíváme označení $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$, kde diferenciál $\mathrm{d}x$ specifikuje, že proměnná je $x$; $C$ se nazývá **integrační konstanta**.

## *Metody integrace*

(Nalezení vhodných otevřených intervalů je ponecháno na čtenáři; integrační konstanta je vynechána.)

$$\int f(x) \pm g(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x \qquad \int k \cdot f(x)\mathrm{d}x = k \cdot \int f(x)\mathrm{d}x$$

Je-li $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)$, pak $\int f(at+b)\mathrm{d}t = \dfrac{F(at+b)}{a}$ pro lib. $a \neq 0$ a lib. $b \in \mathrm{R}$ (tzv. **lineární substituce**).

$\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, a dále $\int x^{-1}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x|$ na $(-\infty, 0), (0, +\infty)$.

$\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \ln|f(x)|$, např. $\int \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\mathrm{d}x = \ln|\ln x|$

**Malá tabulka neurčitých integrálů** (libovolný výraz tvaru $f^0(x)$ zaměňte za 1)

**[mt1]** $\displaystyle\int (ax+b)^n \mathrm{d}x = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a\cdot(n+1)}$ pro $n \neq -1, a \neq 0$

**[mt2]** $\displaystyle\int \frac{1}{ax+b}\mathrm{d}x = \frac{\ln|ax+b|}{a} \qquad \int \frac{x}{ax+b}\mathrm{d}x = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\cdot\ln|ax+b|$ pro $a \neq 0$

**[mt3]** $\displaystyle\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{D}}\cdot\ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{D}}{2ax+b+\sqrt{D}}\right| = \frac{-2}{2ax+b} = \frac{2}{\sqrt{-D}}\cdot\mathrm{arctg}\frac{2ax+b}{\sqrt{-D}}$

$a \neq 0$, $D = b^2 - 4ac$ — pro $D > 0$; pro $D = 0$; pro $D < 0$

**[mt4]** $\displaystyle\int \frac{x}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x = \frac{\ln|ax^2+bx+c|}{2a} - \frac{b}{2a}\cdot\int\frac{1}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x$ pro $a \neq 0$

**[mt5]** $\displaystyle\int x^n\mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}x = \frac{x^n\mathrm{e}^{kx}}{k} - \frac{n}{k}\int x^{n-1}\mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}x$ , a speciálně $\displaystyle\int \mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{kx}}{k}$ pro $k \neq 0$

**[mt6]** $\displaystyle\int \ln^n x\,\mathrm{d}x = x\cdot\ln^n x - n\cdot\int\ln^{n-1}x\,\mathrm{d}x$ , a $\displaystyle\int\frac{\ln^n x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\ln^{n+1}x}{n+1}$ pro $n \neq -1$

**[mt7]** $\displaystyle\int x^k\ln^n x\mathrm{d}x = \frac{x^{k+1}\cdot\ln^n x}{k+1} - \frac{n}{k+1}\cdot\int x^k\ln^{n-1}x\,\mathrm{d}x$ pro $k \neq 1$.

# TOPIC 9.A Indefinite Integrals

## *Basic concepts and properties*

- A function $F(x)$ for which $F'(x) = f(x)$ for every $x \in (a, b)$ is said to be **an antiderivative** of $f(x)$ on an open interval $(a, b)$. Every function which is continuous on an open interval $I$ has an antiderivative on $I$.
- The set of all antiderivatives of function $f(x)$ on an open interval $(a, b)$ is called **the indefinite integral** of $f(x)$ on the interval. Any two antiderivatives of function $f(x)$ on a given interval differ only by some constant.
- For an indefinite integral, we use the notation $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$ where the differential $\mathrm{d}x$ specifies that the variable is $x$; $C$ is called **the integration constant**.

## *Methods of integration*

(Finding the appropriate open intervals are left upto the reader; the integration constant is omitted.)

$$\int f(x) \pm g(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x \qquad \int k \cdot f(x)\mathrm{d}x = k \cdot \int f(x)\mathrm{d}x$$

If $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)$ then $\int f(at+b)\mathrm{d}t = \dfrac{F(at+b)}{a}$, for any $a \neq 0$ and any $b \in \mathrm{R}$ (so called **linear substitution**).

$\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, and further $\int x^{-1}\mathrm{d}x = \int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x|$ on $(-\infty, 0), (0, +\infty)$.

$$\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \ln|f(x)|, \quad \text{e.g. } \int \frac{1}{x \ln x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\mathrm{d}x = \ln|\ln x|$$

**Small Table of Indefinite Integrals** (replace any expression of the form $f^0(x)$ with 1)

**[mt1]** $\displaystyle\int (ax+b)^n \mathrm{d}x = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a \cdot (n+1)}$, for $n \neq -1, a \neq 0$

**[mt2]** $\displaystyle\int \frac{1}{ax+b}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln|ax+b|}{a} \qquad \int \frac{x}{ax+b}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \cdot \ln|ax+b|$, for $a \neq 0$

**[mt3]** $\displaystyle\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{D}} \cdot \ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{D}}{2ax+b+\sqrt{D}}\right| \quad = \frac{-2}{2ax+b} \quad = \frac{2}{\sqrt{-D}} \cdot \arctan\frac{2ax+b}{\sqrt{-D}}$

$a \neq 0,\ D = b^2 - 4ac$ — for $D > 0$ — for $D = 0$ — for $D < 0$

**[mt4]** $\displaystyle\int \frac{x}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln|ax^2+bx+c|}{2a} - \frac{b}{2a} \cdot \int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$ for $a \neq 0$

**[mt5]** $\displaystyle\int x^n \mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}x = \frac{x^n \mathrm{e}^{kx}}{k} - \frac{n}{k}\int x^{n-1}\mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}x$ , and especially $\displaystyle\int \mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{kx}}{k}$ for $k \neq 0$

**[mt6]** $\displaystyle\int \ln^n x\,\mathrm{d}x = x \cdot \ln^n x - n \cdot \int \ln^{n-1} x\,\mathrm{d}x$ , and $\displaystyle\int \frac{\ln^n x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\ln^{n+1} x}{n+1}$ for $n \neq -1$

**[mt7]** $\displaystyle\int x^k \ln^n x\mathrm{d}x = \frac{x^{k+1} \cdot \ln^n x}{k+1} - \frac{n}{k+1} \cdot \int x^k \ln^{n-1} x\,\mathrm{d}x$ for $k \neq 1$.

## *ŘEŠENÉ PŘÍKLADY*

**Příklad 1.** Ukažte, že funkce $F(x) = 2x\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + \mathrm{e}^2$ je primitivní k funkci $f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}(2 + \sqrt{x})$ a zjistěte na jakých intervalech.

*Řešení.* $F'(x) = \left[2x\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + \mathrm{e}^2\right]' = 2 \cdot \left[x'\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + x\left(\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\right)\right]' + \left(\mathrm{e}^2\right)' = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}(2 + \sqrt{x}) = f(x)$.
Derivace funguje na $(0, +\infty)$.

**Příklad 2.** Najděte jednoduché integrály:

(a) $\int(6x^2 + 2x + 4)\,\mathrm{d}x$ (b) $\int(\sin q + \cos q)\,\mathrm{d}q$ (c) $\displaystyle\int\left(\sqrt[3]{t^2} - \frac{10}{t^2}\right)\mathrm{d}t$

*Řešení.*

(a) $\int(6x^2+2x+4)\,\mathrm{d}x = 6\int x^2\,\mathrm{d}x + 2\int x\,\mathrm{d}x + \int 4\,\mathrm{d}x = 6 \cdot \frac{x^3}{3} + 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 4x = 2x^3 + x^2 + 4x + C$ na $(-\infty, +\infty)$.

(b) $\int(\sin q + \cos q)\,\mathrm{d}q = -\cos q + \sin q + C$ na $(-\infty, +\infty)$ (uhodnutím).

(c) Užijeme dvakrát vzorec $\int t^n\,\mathrm{d}t = \frac{t^{n+1}}{n+1}$.

$$\int\left(\sqrt[3]{t^2}\,\mathrm{d}t - \frac{10}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \int t^{\frac{2}{3}} - 10\int t^{-2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} - 10 \cdot \frac{t^{-2+1}}{-2+1} = \frac{3}{5}\sqrt[3]{t^5} + \frac{10}{t} + C$$

na $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

**Příklad 3.** Funkce $y = \dfrac{x^2 - 3}{x^2 - 5x + 6}$ má funkci primitivní na 3 otevřených intervalech. Najděte je.

*Řešení.* Funkce je spojitá na svém definičním oboru a proto má na něm funkci primitivní. Abychom našli definiční obor, musíme zjistit, kdy je jmenovatel zlomku různý od nuly, tj. řešíme $x^2 - 5x + 6 = 0$, což dává $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.
Primitivní funkce existuje na intervalech $(-\infty, 2)$, $(2, 3)$, a $(3, +\infty)$.

**Příklad 4.** Užijte lineární substituci, vzorec pro $\int \frac{f'(s)}{f(s)}\,\mathrm{d}s$, anebo tabulku integrálů, a také proveďte zkoušky správnosti.

(a) $\int \mathrm{e}^{3p+7}\,\mathrm{d}p$ (b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^s}{\mathrm{e}^s + 1}\,\mathrm{d}s$ (c) $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2 - 4x + 3}\mathrm{d}x$ (d) $\displaystyle\int x^2\mathrm{e}^{7x}\,\mathrm{d}x$

*Řešení.* (a) Víme, že $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$ a užití substituce $x = 3p + 7$ dává
$\int \mathrm{e}^{3p+7}\,\mathrm{d}p = \frac{\mathrm{e}^{3p+7}}{3} + C$ na $(-\infty, +\infty)$. Zkouška: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\frac{\mathrm{e}^{3p+7}}{3} + C = \frac{\mathrm{e}^{3p+7}}{3} \cdot 3 = \mathrm{e}^{3p+7}$.

(b) Je-li $f(s) = \mathrm{e}^s + 1$, pak $\frac{\mathrm{d}f(s)}{\mathrm{d}s} = \mathrm{e}^s$, a užijeme $\int \frac{f'(s)}{f(s)}\,\mathrm{d}s = \ln|f(s)|$ a $|e^s + 1| = e^s + 1$.
$\int \frac{\mathrm{e}^s}{\mathrm{e}^s+1}\,\mathrm{d}s = \ln(\mathrm{e}^s+1) + C$ on $(-\infty, +\infty)$. Zkouška: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\ln(\mathrm{e}^s+1) + C\right) = \frac{1}{\mathrm{e}^s+1} \cdot \mathrm{e}^s = \frac{\mathrm{e}^s}{\mathrm{e}^s+1}$.

(c) Postupně užijeme [mt3] a [mt4], kde $a = 1, b = -4, c = 3$, $D = 4 > 0, \sqrt{D} = 2$.

$$\int \frac{x+5}{x^2 - 4x + 3}\mathrm{d}x = \int \frac{x}{x^2 - 4x + 3}\mathrm{d}x + 5\int \frac{1}{x^2 - 4x + 3}\mathrm{d}x = \frac{\ln|x^2 - 4x + 3|}{2} +$$

$$+2\int \frac{1}{x^2 - 4x + 3}\mathrm{d}x + 5\int \frac{1}{x^2 - 4x + 3}\mathrm{d}x = \frac{\ln|x^2 - 4x + 3|}{2} + 7\int \frac{1}{x^2 - 4x + 3}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\ln|x^2 - 4x + 3|}{2} + \frac{7}{2}\ln\left|\frac{2x - 4 - 2}{2x - 4 + 2}\right| = \frac{\ln|x^2 - 4x + 3|}{2} + \frac{7}{2}\ln\left|\frac{x - 3}{x - 1}\right| + C$$

na $(-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty)$. Zkoušku u (c) a (d) proveďte sami.

(d) Opakujeme užití [mt5]; nejdříve je $n = 2, k = 7$; také položíme $x^0 = 1$.

$\int x^2\mathrm{e}^{7x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2\mathrm{e}^{7x}}{7} - \frac{2}{7}\int x^1\mathrm{e}^{7x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2\mathrm{e}^{7x}}{7} - \frac{2}{7}\left[\frac{x\mathrm{e}^{7x}}{7} - \frac{1}{7}\int x^0\mathrm{e}^{7x}\,\mathrm{d}x\right] = \mathrm{e}^{7x}\left(\frac{x^2}{7} - \frac{2x}{49} + \frac{2}{343}\right) + C.$

## *SAMPLE EXERCISES*

**Example 1.** Show that the function $F(x) = 2x\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + \mathrm{e}^2$ is an antiderivative of the function $f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}(2 + \sqrt{x})$ and find out on what intervals.

*Solution.* $F'(x) = \left[2x\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + \mathrm{e}^2\right]' = 2 \cdot \left[x'\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + x\left(\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\right)\right]' + \left(\mathrm{e}^2\right)' = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}(2 + \sqrt{x}) = f(x)$.
The differentiation works on $(0, +\infty)$.

**Example 2.** Find simple integrals:

(a) $\int(6x^2 + 2x + 4)\,\mathrm{d}x$ (b) $\int(\sin q + \cos q)\,\mathrm{d}q$ (c) $\displaystyle\int\left(\sqrt[3]{t^2} - \frac{10}{t^2}\right)\mathrm{d}t$

*Solution.*

(a) $\int(6x^2 + 2x + 4)\,\mathrm{d}x = 6\int x^2\,\mathrm{d}x + 2\int x\,\mathrm{d}x + \int 4\,\mathrm{d}x = 6 \cdot \frac{x^3}{3} + 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 4x = 2x^3 + x^2 + 4x + C$ on $(-\infty, +\infty)$.

(b) $\int(\sin q + \cos q)\,\mathrm{d}q = -\cos q + \sin q + C$ on $(-\infty, +\infty)$ (by guessing).

(c) We use the formula $\int t^n\,\mathrm{d}t = \frac{t^{n+1}}{n+1}$ twice.

$$\int\left(\sqrt[3]{t^2}\,\mathrm{d}t - \frac{10}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \int t^{\frac{2}{3}} - 10\int t^{-2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} - 10 \cdot \frac{t^{-2+1}}{-2+1} = \frac{3}{5}\sqrt[3]{t^5} + \frac{10}{t} + C$$

on $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

**Example 3.** Function $y = \dfrac{x^2 - 3}{x^2 - 5x + 6}$ has an antiderivative on 3 open intervals. Find them.

*Solution.* The function is continuous on its domain and therefore it has an antiderivative on the whole domain. To get the domain we must find out when the denominator of the fraction is different from zero, i.e. we solve $x^2 - 5x + 6 = 0$ which gives $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.
An antiderivative exists on the intervals $(-\infty, 2)$, $(2, 3)$, and $(3, +\infty)$.

**Example 4.** Use a linear substitution, the formula for $\int \frac{f'(s)}{f(s)}\,\mathrm{d}s$, or the table of integrals, and also check your results.

(a) $\int \mathrm{e}^{3p+7}\,\mathrm{d}p$ (b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^s}{\mathrm{e}^s + 1}\,\mathrm{d}s$ (c) $\displaystyle\int \frac{x + 5}{x^2 - 4x + 3}\mathrm{d}x$ (d) $\displaystyle\int x^2\mathrm{e}^{7x}\,\mathrm{d}x$

*Solution.* (a) We know that $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$ and the use of substitution $x = 3p + 7$ gives
$\int \mathrm{e}^{3p+7}\,\mathrm{d}p = \frac{\mathrm{e}^{3p+7}}{3} + C$ on $(-\infty, +\infty)$. Check: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\frac{\mathrm{e}^{3p+7}}{3} + C = \frac{\mathrm{e}^{3p+7}}{3} \cdot 3 = \mathrm{e}^{3p+7}$.

(b) If $f(s) = \mathrm{e}^s + 1$ then $\frac{\mathrm{d}f(s)}{\mathrm{d}s} = \mathrm{e}^s$, and we use $\int \frac{f'(s)}{f(s)}\,\mathrm{d}s = \ln|f(s)|$ and $|\mathrm{e}^s + 1| = \mathrm{e}^s + 1$.

$\int \frac{\mathrm{e}^s}{\mathrm{e}^s+1}\,\mathrm{d}s = \ln(\mathrm{e}^s+1) + C$ on $(-\infty, +\infty)$. Check: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\ln(\mathrm{e}^s+1) + C) = \frac{1}{\mathrm{e}^s+1} \cdot \mathrm{e}^s = \frac{\mathrm{e}^s}{\mathrm{e}^s+1}$.

(c) We gradually use [mt3] and [mt4] where $a = 1, b = -4, c = 3$, $D = 4 > 0, \sqrt{D} = 2$.

$$\int \frac{x+5}{x^2 - 4x + 3}\mathrm{d}x = \int \frac{x}{x^2 - 4x + 3}\mathrm{d}x + 5\int \frac{1}{x^2 - 4x + 3}\mathrm{d}x = \frac{\ln|x^2 - 4x + 3|}{2} +$$

$$+2\int \frac{1}{x^2 - 4x + 3}\mathrm{d}x + 5\int \frac{1}{x^2 - 4x + 3}\mathrm{d}x = \frac{\ln|x^2 - 4x + 3|}{2} + 7\int \frac{1}{x^2 - 4x + 3}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\ln|x^2 - 4x + 3|}{2} + \frac{7}{2}\ln\left|\frac{2x - 4 - 2}{2x - 4 + 2}\right| = \frac{\ln|x^2 - 4x + 3|}{2} + \frac{7}{2}\ln\left|\frac{x - 3}{x - 1}\right| + C$$

on $(-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty)$. Check the results of (c) and (d) by yourself.

(d) We repeat using of [mt5]; first, there is $n = 2, k = 7$; also we put $x^0 = 1$.

$\int x^2\mathrm{e}^{7x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2\mathrm{e}^{7x}}{7} - \frac{2}{7}\int x^1\mathrm{e}^{7x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2\mathrm{e}^{7x}}{7} - \frac{2}{7}\left[\frac{x\mathrm{e}^{7x}}{7} - \frac{1}{7}\int x^0\mathrm{e}^{7x}\,\mathrm{d}x\right] = \mathrm{e}^{7x}\left(\frac{x^2}{7} - \frac{2x}{49} + \frac{2}{343}\right) + C$.

## *ÚLOHY K ŘEŠENÍ*

**Úloha 9.A.1.** Pro každou funkci $f_1$ až $f_5$ nalevo vyberte její primitivní funkci mezi funkcemi $F_1$ až $F_5$ napravo.

| | |
|---|---|
| $f_1(x) = 1 + \ln x$ | $F_1(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ |
| $f_2(x) = \dfrac{2}{x}$ | $F_2(x) = \ln(2x) + 2$ |
| $f_3(x) = x\mathrm{e}^x(2 + x)$ | $F_3(x) = x^2\mathrm{e}^x$ |
| $f_4(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2}$ | $F_4(x) = \ln(x^2)$ |
| $f_5(x) = \dfrac{1}{x}$ | $F_5(x) = x \ln x.$ |

**Úloha 9.A.2.** Najděte jednoduché integrály (také udejte vhodné intervaly).

(a) $\displaystyle\int (3 - p)\,\mathrm{d}p$ (b) $\displaystyle\int \cos t\,\mathrm{d}t$ (c) $\displaystyle\int 11\,\mathrm{d}z$

(d) $\displaystyle\int (s^2 + \sqrt{s})\,\mathrm{d}s$ (e) $\displaystyle\int \left(\frac{10}{q} + \frac{20}{q^2}\right)\mathrm{d}q$ (f) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{m}}\,\mathrm{d}m$

**Úloha 9.A.3.** Pro každou z funkcí $g_1$ až $g_6$ najděte všechny maximální otevřené intervaly, na nichž má tato funkce funkci primitivní. Tyto funkce nehledejte.

$g_1(x) = 1 + \ln x$ $g_2(x) = \dfrac{2}{x^2 - 1}$ $g_3(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x^2}}$

$g_4(x) = \sqrt{1 - x}$ $g_5(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2 + 5x + 6}$ $g_6(x) = \ln(1 + x)\,\mathrm{d}x$

**Úloha 9.A.4.** Užijte lineární substituci nebo vzorec pro $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$.

(a) $\displaystyle\int \sin(3x - 2)\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int (2t - 7)^5\,\mathrm{d}t$ (c) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int \frac{2a - 113}{a^2 - 113a + 2}\,\mathrm{d}a$ (e) $\displaystyle\int \sqrt{1 - 4p}\,\mathrm{d}p$ (f) $\displaystyle\int \frac{1}{(q + 1)\cdot\ln(q + 1)}\,\mathrm{d}q$

**Úloha 9.A.5.** Užijte tabulku integrálů na

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{2x + 3}\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int \frac{t + 1}{t^2 + 1}\,\mathrm{d}t$ (c) $\displaystyle\int \ln^3 r\,\mathrm{d}r$

(d) $\displaystyle\int p\mathrm{e}^{-0.5p}\,\mathrm{d}p$ (e) $\displaystyle\int \frac{10}{s^2 + 2s + 1}\,\mathrm{d}s$ (f) $\displaystyle\int \frac{2x - 1}{x^2 + 5x + 6}\,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int z^2\mathrm{e}^{5z}\,\mathrm{d}z$ (h) $\displaystyle\int \sqrt[3]{2s - 11}\,\mathrm{d}s$ (i) $\displaystyle\int \frac{\ln^3 x}{x}\,\mathrm{d}x$

## *PROBLEMS TO SOLVE*

**Exercise 9.A.1.** For each function $f_1$ to $f_5$ on the left choose its antiderivative among the functions $F_1$ to $F_5$ on the right.

| | |
|---|---|
| $f_1(x) = 1 + \ln x$ | $F_1(x) = e^{x^2}$ |
| $f_2(x) = \dfrac{2}{x}$ | $F_2(x) = \ln(2x) + 2$ |
| $f_3(x) = xe^x(2 + x)$ | $F_3(x) = x^2 e^x$ |
| $f_4(x) = 2xe^{x^2}$ | $F_4(x) = \ln(x^2)$ |
| $f_5(x) = \dfrac{1}{x}$ | $F_5(x) = x \ln x.$ |

**Exercise 9.A.2.** Find simple integrals (also give the appropriate intervals).

(a) $\displaystyle\int (3 - p)\,\mathrm{d}p$ (b) $\displaystyle\int \cos t\,\mathrm{d}t$ (c) $\displaystyle\int 11\,\mathrm{d}z$

(d) $\displaystyle\int (s^2 + \sqrt{s})\,\mathrm{d}s$ (e) $\displaystyle\int \left(\frac{10}{q} + \frac{20}{q^2}\right)\mathrm{d}q$ (f) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{m}}\,\mathrm{d}m$

**Exercise 9.A.3.** For every function $g_1$ to $g_6$ find all the maximal intervals on which the function has an antiderivative. Don't try to find the antiderivatives.

$g_1(x) = 1 + \ln x$ $\qquad g_2(x) = \dfrac{2}{x^2 - 1}$ $\qquad g_3(x) = \dfrac{1}{e^{x^2}}$

$g_4(x) = \sqrt{1 - x}$ $\qquad g_5(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2 + 5x + 6}$ $\qquad g_6(x) = \ln(1 + x)\,\mathrm{d}x$

**Exercise 9.A.4.** Use a linear substitution or the formula for $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$.

(a) $\displaystyle\int \sin(3x - 2)\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int (2t - 7)^5\,\mathrm{d}t$ (c) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int \frac{2a - 113}{a^2 - 113a + 2}\,\mathrm{d}a$ (e) $\displaystyle\int \sqrt{1 - 4p}\,\mathrm{d}p$ (f) $\displaystyle\int \frac{1}{(q + 1) \cdot \ln(q + 1)}\,\mathrm{d}q$

**Exercise 9.A.5.** Use the table of integrals

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{2x + 3}\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int \frac{t + 1}{t^2 + 1}\,\mathrm{d}t$ (c) $\displaystyle\int \ln^3 r\,\mathrm{d}r$

(d) $\displaystyle\int pe^{-0.5p}\,\mathrm{d}p$ (e) $\displaystyle\int \frac{10}{s^2 + 2s + 1}\,\mathrm{d}s$ (f) $\displaystyle\int \frac{2x - 1}{x^2 + 5x + 6}\,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int z^2 e^{5z}\,\mathrm{d}z$ (h) $\displaystyle\int \sqrt[3]{2s - 11}\,\mathrm{d}s$ (i) $\displaystyle\int \frac{\ln^3 x}{x}\,\mathrm{d}x$

## Minitest MT9.A

**1.** V kolika případech je $F(x)$ primitivní funkcí k $f(x)$ na nějakém otevřeném intervalu?

| | |
|---|---|
| $f(x) = -e^x$, $F(x) = e^{-x}$ | $f(x) = -\cos x + 1$, $F(x) = x - 1 + \sin x$ |
| $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$, $F(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$ | $f(x) = 5x^4 + 2$, $F(x) = x^5 + 2x + 2$ |

**(A)** 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4.

**2.** V MAPLE je proveden příkaz `int(2/(t^2 + 2),t);` . Užijte tabulku integrálů k nalezení správného výsledku.

**(A)** $\ln\left|\frac{t}{t+2}\right| + C$ **(B)** $2\ln\left|\frac{t}{t+2}\right| + C$ **(C)** $\ln\left|\frac{t+1}{t+2}\right| + C$ **(D)** $2\ln\left|\frac{t+1}{t+2}\right| + C$

**(E)** žádný z nabídnutých výsledků není správný.

**3.** Najděte všechny maximální otevřené intervaly, na nichž má funkce $y = \dfrac{x-1}{x+3}$ funkci primitivní.

**(A)** $(-\infty, 3)$, $(3, +\infty)$ **(B)** $(-\infty, -3)$, $(-3, +\infty)$

**(C)** $(-\infty, -3)$, $(-3, 1)$, $(1, +\infty)$ **(D)** $(-\infty, -1)$, $(-1, 3)$, $(3, +\infty)$

**(E)** jiná odpověď.

**4.** Užijte tabulku integrálů k nalezení $h(s) = \displaystyle\int s^3 \ln^2 s \, ds$.

Nyní ve funkci $h(s)$ položte integrační konstantu $C$ rovnu 0. Pak hodnota $h(1)$ je

**(A)** $\dfrac{1}{32}$ **(B)** $\dfrac{1}{16}$ **(C)** $\dfrac{1}{8}$ **(D)** $\dfrac{1}{4}$ **(E)** není žádná z uvedených.

**5.** Funkce $y = \dfrac{\ln^8 x}{8} + 8$ je primitivní funkcí k

**(A)** $y = \dfrac{7\ln^7 x}{8}$ **(B)** $y = \dfrac{\ln^8 x}{x}$ **(C)** $y = \dfrac{9\ln^7 x}{7x}$ **(D)** $y = \dfrac{\ln^7 x}{x}$

**(E)** žádné z uvedených.

**6.** Najděte $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt[3]{u^2}} \, du$. Výsledek je

**(A)** $\dfrac{\sqrt[3]{u}}{3} + C$ **(B)** $\dfrac{2}{\sqrt[3]{u}} + C$ **(C)** $\dfrac{3}{\sqrt[3]{u}} + C$ **(D)** $3\sqrt[3]{u} + C$ **(E)** $6\sqrt[3]{u} + C$

**7.** Robert užil vzorec $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)|$ k určení $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x} \cdot (2\sqrt{x} + 1)} dx$.

To znamená, že funkce $f(x)$ byla

**(A)** $f(x) = \sqrt{x}$ **(B)** $f(x) = 2\sqrt{x}$ **(C)** $f(x) = \sqrt{x} + 1$ **(D)** $f(x) = 2\sqrt{x} + 1$.

## Minitest MT9.A

**1.** In how many cases is $F(x)$ an antiderivative of $f(x)$ on some open interval?

| | |
|---|---|
| $f(x) = -e^x, \quad F(x) = e^{-x}$ | $f(x) = -\cos x + 1, \quad F(x) = x - 1 + \sin x$ |
| $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}, \quad F(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$ | $f(x) = 5x^4 + 2, \quad F(x) = x^5 + 2x + 2$ |

**(A)** 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4.

**2.** In MAPLE, the command `int(2/(t^2 + 2),t);` is executed. Use the table of integrals to find the correct result.

**(A)** $\ln\left|\frac{t}{t+2}\right| + C$ **(B)** $2\ln\left|\frac{t}{t+2}\right| + C$ **(C)** $\ln\left|\frac{t+1}{t+2}\right| + C$ **(D)** $2\ln\left|\frac{t+1}{t+2}\right| + C$

**(E)** none of the above is the correct result.

**3.** Find all the maximum open intervals on which the function $y = \dfrac{x-1}{x+3}$ has an antiderivative.

**(A)** $(-\infty, 3),\ (3, +\infty)$ **(B)** $(-\infty, -3),\ (-3, +\infty)$

**(C)** $(-\infty, -3),\ (-3, 1),\ (1, +\infty)$ **(D)** $(-\infty, -1),\ (-1, 3),\ (3, +\infty)$

**(E)** none of the the above is correct.

**4.** Use the table of integrals to find $h(s) = \int s^3 \ln^2 s\, ds$.
Now, put in $h(s)$ the integration constant $C$ equal to 0. Then the value of $h(1)$ is

**(A)** $\frac{1}{32}$ **(B)** $\frac{1}{16}$ **(C)** $\frac{1}{8}$ **(D)** $\frac{1}{4}$ **(E)** none of the above

**5.** The function $y = \dfrac{\ln^8 x}{8} + 8$ is an antiderivative of

**(A)** $y = \dfrac{7\ln^7 x}{8}$ **(B)** $y = \dfrac{\ln^8 x}{x}$ **(C)** $y = \dfrac{9\ln^7 x}{7x}$ **(D)** $y = \dfrac{\ln^7 x}{x}$

**(E)** none of the above.

**6.** Find $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt[3]{u^2}}\, du$. The result is

**(A)** $\dfrac{\sqrt[3]{u}}{3} + C$ **(B)** $\dfrac{2}{\sqrt[3]{u}} + C$ **(C)** $\dfrac{3}{\sqrt[3]{u}} + C$ **(D)** $3\sqrt[3]{u} + C$ **(E)** $6\sqrt[3]{u} + C$

**7.** Robert used the formula $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)|$ to determine $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}\cdot(2\sqrt{x}+1)}\, dx$.

It means that the function of $f(x)$ was

**(A)** $f(x) = \sqrt{x}$ **(B)** $f(x) = 2\sqrt{x}$ **(C)** $f(x) = \sqrt{x} + 1$ **(D)** $f(x) = 2\sqrt{x} + 1$.

# TÉMA 9.B Určité integrály

## *Základní pojmy a vlastnosti*

- Je-li $F(x)$ primitivní funkce k $f(x)$ na otevřeném intervalu $I$, pak pro libovolné $a, b \in I$ je **(Newtonův) určitý integrál** z $f(x)$ od $a$ do $b$ číslo

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

$f(x)$ ... integrand, $a, b$... integrační meze. $a$... dolní mez, $b$... horní mez.

## *Poznámky*

- Hodnota $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ nezávisí na volbě primitivní funkce k $f(x)$.
- Je-li $f(x)$ spojitá na otevřeném intervalu $I$ a $a, b \in I$, pak $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ existuje.
- Je-li ve výše uvedené definici $b = +\infty$, pak $[F(x)]_a^{+\infty} = \lim\limits_{u \to +\infty} \{F(u) - F(a)\}$.

Analogicky jsou definovány i ostatní případy tzv. **nevlastních integrálů.**

## *Aplikace určitého integrálu*

($f(x), g(x)$ jsou funkce spojité na otevřeném intervalu $I$, $a, b \in I$, a $J = \langle a, b \rangle$)

- **Obsah** $A$ oblasti mezi grafem funkce $f(x)$ a osou $x$ na $J$:

  je-li $f(x) \geq 0$ na $J$, pak $A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, je-li $f(x) \leq 0$ na $J$, pak $A = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,

  jsou-li hodnoty $f(x)$ na $J$ jak kladné tak záporné, pak $A$ se počítá po částech, tj. $J$ se rozdělí na takové části, že na každé z nich buďto $f(x) \geq 0$ nebo $f(x) \leq 0$.

- Je-li $f(x) \leq g(x)$ na $J$, pak $\int_a^b \{f(x) - g(x)\}\,\mathrm{d}x$ počítá **obsah** $A$ oblasti mezi grafy funkcí $f(x)$ a $g(x)$ na $J$.

- Nechť nezáporná funkce $f(t)$ je modelem vyjadřujícím rychlost změny úrovně nějaké veličiny (v intervalu $I$). **Akumulované množství** této veličiny mezi $t = a$ a $t = b$ je vyjádřeno jako $\int_a^b f(t)\,dt$.

- **Střední hodnota** $\overline{y}$ funkce $y = f(x)$ na intervalu $J$:

$$\overline{y} = \tfrac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

- **Objem** $V$ **rotačního tělesa** tvořeného rotací oblasti pod křivkou $y = f(x) \geq 0$ kolem osy $x$ na $J$:

$$V = \pi \cdot \int_a^b \{f(x)\}^2\,dx.$$

- **Integrální kritérium konvergence:** Nechť funkce $f(x)$ je nezáporná na $\langle 1, +\infty) \subset I$;

najdeme $L = \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ a pak pro řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ platí následující:

(1) $L \in \mathbf{R} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ je konvergentní, (2) $L = +\infty \Rightarrow \sum\limits_{n1}^{\infty} f(n)$ je divergentní.

# TOPIC 9.B Definite integrals

## *Basic concepts and properties*

- If $F(x)$ is an antiderivative of $f(x)$ on an open interval $I$ then for any $a, b \in I$ **the (Newton's) definite integral** of $f(x)$ from $a$ to $b$ is the number

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

$f(x)$ ...integrand, $a, b$... limits of integration, $a$... lower limit, $b$... upper limit.

*Notes*

- The value of $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ does not depend on the antiderivative of $f(x)$ chosen.
- If $f(x)$ is continuous on an open interval $I$ and $a, b \in I$ then $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ exists.
- In the definition above, if $b = +\infty$ then $[F(x)]_a^{+\infty} = \lim\limits_{u \to +\infty} \{F(u) - F(a)\}$.

Analogously, the other cases of so called **improper integrals** are defined.

## *Aplications of The Definite Integral*

($f(x), g(x)$ are continuous functions on an open interval $I$, $a, b \in I$, and $J = \langle a, b \rangle$)

- **The area** $A$ of the region between the graph of $f(x)$ and the $x$-axis on $J$:

  if $f(x) \geq 0$ on $J$, then $A = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$, if $f(x) \leq 0$ on $J$, then $A = -\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$,

  if the values of $f(x)$ on $J$ are both possitive and negative, then $A$ is calulated by parts, i.e. $J$ is divided into parts so that on each of them either $f(x) \geq 0$ or $f(x) \leq 0$.

- If $f(x) \leq g(x)$ on $J$, then $\int\limits_a^b \{f(x) - g(x)\}\,\mathrm{d}x$ calculates **the area** $A$ of the region between the graphs of $f(x)$ and $g(x)$ on $J$.

- Let a non-negative function $f(t)$ be a model expressing the rate of change of some quantity (in some time interval $I$). The **acumulated amount** of the quantity between $t = a$ and $t = b$ is expressed by $\int_a^b f(t)\,dt$.

- **The average value** $\overline{y}$ of a function $y = f(x)$ over the interval $J$:

$$\overline{y} = \tfrac{1}{b-a} \cdot \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

- **The volume** $V$ **of the solid of revolution** formed by revolving the region under the curve $y = f(x) \geq 0$ about the $x$-axis on $J$:

$$V = \pi \cdot \int\limits_a^b \{f(x)\}^2\,dx.$$

- **Integral test of convergence:** Let function $f(x)$ be non-negative on $\langle 1, +\infty) \subset I$; we find $L = \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ and then for the series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ the following holds:

  (1) $L \in \mathbf{R} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ is convergent, (2) $L = +\infty \Rightarrow \sum\limits_{n1}^{\infty} f(n)$ is divergent.

## *ŘEŠENÉ PŘÍKLADY*

**Příklad 1.** Určete hodnotu $\displaystyle\int_2^4 \frac{6}{u^2+5u+6}\,\mathrm{d}u$.

*Řešení.* $\displaystyle\int_2^4 \frac{6}{u^2+5u+6}\,\mathrm{d}u = 6\cdot\left[\ln\left|\frac{2u+4}{2u+6}\right|\right]_2^4 = 6\left(\ln\frac{6}{7}-\ln\frac{4}{5}\right) = 6\ln\frac{15}{14} \doteq 0.414.$

Užili jsme tabulkový integrál [mt3] z Tématu 9.A. Výsledek platí na 3 otevřených intervalech, tj. $(-\infty,-3)$, $(-3,-2)$, $(-2,+\infty)$. Interval, kde integrujeme, $\langle 2,4\rangle$ je částí jednoho z nich.

**Příklad 2.** Vypočtěte obsah oblasti shora omezené parabolou $y=f(x)=4x-x^2$ a zdola parabolou $y=g(x)=x^2-2x$.

*Řešení.* Načrtněte si obrázek a uvidíte, že potřebujeme souřadnice průsečíků dvou křivek, tj. $f(x)=g(x)\ \to\ 4x-x^2=x^2-2x\ \to\ 2x^2-6x=0\ \to\ a=0,\ b=3$.

$$\int_0^3 \{f(x)-g(x)\}\,\mathrm{d}x = \int_0^3 \left\{(4x-x^2)-(x^2-2x)\right\}\mathrm{d}x = \int_0^3 \left(6x-2x^2\right)\mathrm{d}x = \left[3x^2-\frac{2}{3}x^3\right]_0^3 = 9.$$

**Příklad 3.** Najděte objem (v litrech) tělesa získaného rotací kolem osy $x$ oblasti pod křivkou $y=\frac{1}{x}$ mezi $x=1$ a $x=3$, jestliže $x$ je v dm.

*Řešení.*

$$V=\pi\int_1^3\left(\frac{1}{x}\right)^2\mathrm{d}x = \pi\int_1^3 x^{-2}\mathrm{d}x = \pi\left[-x^{-1}\right]_1^3 = \pi\left[-\frac{1}{x}\right]_1^3 \doteq 2.09\ \mathrm{dm}^3 \doteq 2.09\ \text{litru}.$$

**Příklad 4.** Voda je čerpána do zásobníku rychlostí $(0.36\sqrt{t}+0.4)$ galonu/min ($t$ je čas v minutách po 9. hod. ráno). Kolik galonů bude do zásobníku načerpáno v 1 hod. odpoledne?

*Řešení.* Počítáme akumulované množství vody.

$$\int_0^{240}\left(0.36\sqrt{t}+0.4\right)\mathrm{d}t = \left[0.24\cdot\sqrt{t^3}+0.4t\right]_0^{240} \doteq 988.3\ \text{galonu}.$$

**Příklad 5.** Na pražské burze cenných papírů byla tržní cena $p(x)$ určité akcie v Kč modelována vztahem $p(x)=1020+t\cdot\mathrm{e}^{0.002t}$, kde $t$ je čas měřený ve dnech od počátku roku. Udejte průměrnou cenu této akcie za prvních 6 měsíců roku, tj. $t\in\langle 0,180\rangle$.

*Řešení.* Nejdříve si najdeme primitivní funkci k $t\cdot\mathrm{e}^{0.002t}$ užitím [mt5] z tabulky integrálů.

$$\int t\cdot\mathrm{e}^{0.002t}\mathrm{d}t = \frac{t\cdot\mathrm{e}^{0.002t}}{0.002}-\frac{1}{0.002}\int\mathrm{e}^{0.002t}\mathrm{d}t = \frac{t\cdot\mathrm{e}^{0.002t}}{0.002}-\frac{1}{0.00004}\mathrm{e}^{0.002t} = \frac{\mathrm{e}^{0.002t}}{0.00004}(0.002t-1).$$

Nyní vypočteme střední hodnotu.

$$\overline{p}=\frac{1}{180-0}\int_0^{180}\left(1020+t\cdot\mathrm{e}^{0.002t}\right)\mathrm{d}t = \left[1020t+\frac{\mathrm{e}^{0.002t}}{0.00004}(0.002t-1)\right]_0^{180} \doteq 1135\ \text{Kč}.$$

**Příklad 6.** Užijte integrální kritérium ke zjištění, zda řady $A=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^2}$ a $B=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}$ konvergují nebo divergují.

*Řešení.*

$$\int_1^{+\infty}\frac{3}{x^2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{3}{x}\right]_1^{+\infty} = 3 \Rightarrow\ A\ \text{konverguje};\quad \int_1^{+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \left[4\sqrt{x}\right]_1^{+\infty} = +\infty \Rightarrow\ B\ \text{diverguje}.$$

## *SAMPLE EXERCISES*

**Example 1.** Evaluate $\displaystyle\int_2^4 \frac{6}{u^2+5u+6}\,\mathrm{d}u$.

*Solution.* $\displaystyle\int_2^4 \frac{6}{u^2+5u+6}\,\mathrm{d}u = 6\cdot\left[\ \ln\left|\frac{2u+4}{2u+6}\right|\ \right]_2^4 = 6\left(\ln\frac{6}{7}-\ln\frac{4}{5}\right) = 6\ln\frac{15}{14} \doteq 0.414.$

We used table integral [mt3] from Topic 9.A. The result is correct on 3 open intervals, i. e. $(-\infty,-3)$, $(-3,-2)$, $(-2,+\infty)$. The interval of integration $\langle 2,4\rangle$ is a part of one of them.

**Example 2.** Calculate the area of a region bounded above by the parabola $y=f(x)=4x-x^2$ and below by the parabola $y=g(x)=x^2-2x$.

*Solution.* Sketch a picture to see that we need the coordinates of two intersection points of two curves, i.e. $f(x)=g(x)\ \to\ 4x-x^2=x^2-2x\ \to\ 2x^2-6x=0\ \to\ a=0,\ b=3.$

$$\int_0^3\{f(x)-g(x)\}\,\mathrm{d}x=\int_0^3\left\{(4x-x^2)-(x^2-2x)\right\}\mathrm{d}x=\int_0^3\left(6x-2x^2\right)\mathrm{d}x=\left[3x^2-\frac{2}{3}x^3\right]_0^3=9.$$

**Example 3.** Find the volume (in liters) of the solid of revolution obtained by revolving the region under the hyperbola $y=\frac{1}{x}$ about the $x$-axis between $x=1$ and $x=3$, if $x$ is in dm.

*Solution.*

$$V=\pi\int_1^3\left(\frac{1}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_1^3 x^{-2}\mathrm{d}x=\pi\left[-x^{-1}\right]_1^3=\pi\left[-\frac{1}{x}\right]_1^3\doteq 2.09\ \mathrm{dm}^3\doteq 2.09\ \text{liters}.$$

**Example 4.** Water is pumped into a storage tank at a rate of $(0.36\sqrt{t}+0.4)$ gal/min ($t$ time in min after 9 a.m.). How many gallons will have been pumped into the tank at 1 p.m.?

*Solution.* We calculate the accumulated amount of water.

$$\int_0^{240}\left(0.36\sqrt{t}+0.4\right)\mathrm{d}t=\left[0.24\cdot\sqrt{t^3}+0.4t\right]_0^{240}\doteq 988.3\ \text{gal}.$$

**Example 5.** On the Prague Stock Exchange, the market price $p(x)$ of a share in Kč was modelled by $p(x)=1020+t\cdot\mathrm{e}^{0.002t}$ where $t$ is time in days from the begining of the year. Give the average price of the share in the first 6 months of the year, i.e. $t\in\langle 0,180\rangle$.

*Solution.* First, we find the antiderivative of $t\cdot\mathrm{e}^{0.002t}$ using [mt5] in the table of integrals.

$$\int t\cdot\mathrm{e}^{0.002t}\mathrm{d}t=\frac{t\cdot\mathrm{e}^{0.002t}}{0.002}-\frac{1}{0.002}\int\mathrm{e}^{0.002t}\mathrm{d}t=\frac{t\cdot\mathrm{e}^{0.002t}}{0.002}-\frac{1}{0.00004}\mathrm{e}^{0.002t}=\frac{\mathrm{e}^{0.002t}}{0.00004}(0.002t-1).$$

Now we calculate the average value.

$$\overline{p}=\frac{1}{180-0}\int_0^{180}\left(1020+t\cdot\mathrm{e}^{0.002t}\right)\mathrm{d}t=\left[1020t+\frac{\mathrm{e}^{0.002t}}{0.00004}(0.002t-1)\right]_0^{180}\doteq 1135\ \text{Kč}.$$

**Example 6.** Use the integral test to determine if the series $A=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^2}$ and $B=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}$ converge or diverge.

*Solution.*

$$\int_1^{+\infty}\frac{3}{x^2}\mathrm{d}x=\left[-\frac{3}{x}\right]_1^{+\infty}=3\Rightarrow A\text{ is convergent;}\quad\int_1^{+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\left[4\sqrt{x}\right]_1^{+\infty}=+\infty\Rightarrow B\text{ is divergent.}$$

## *ÚLOHY K ŘEŠENÍ*

**Úloha 9.B.1.** Určete hodnoty určitých integrálů (výsledky zaokrouhlete).

(a) $\int_1^{10} \left(1 - \ln^2 x\right)\,\mathrm{d}x$ (b) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+5x+6}\mathrm{d}x$ (c) $\int_{-2}^{2} \sqrt{x+5}\,\mathrm{d}x$ (d) $\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{2x-3}\mathrm{d}x$

**Úloha 9.B.2.** Najděte obsah oblasti mezi grafem a osou $x$ na $J$:

(a) $y = \mathrm{e}^{-x}$, $J = \langle -3, 1\rangle$ (b) $y = x^2 - 5x + 6$, $J = \langle 0, 6\rangle$

(c) $y = \frac{1}{x}$, $J = \langle 1, 2\rangle$ (d) $y = \frac{1}{x}$, $J = \langle -4, -1\rangle$

(e) $y = 2 + \sin x$, $J = \langle 0, \pi\rangle$ (f) $y = \sin x$, $J = \langle 0, 2\pi\rangle$

**Úloha 9.B.3.** Najděte obsah oblasti (využijte pomocné náčrtky).

(a) $x^2 \le y \le 1 + \frac{x^2}{2}$ (b) $\frac{1}{x} \le y \le 3$, and $1 \le x \le 5$

(c) $\frac{x}{2} \le y \le \sqrt{x}$, (d) $x \le y \le 1 + 3x^2$ , and $-1 \le x \le 2$

**Úloha 9.B.4.** Najděte objem tělesa získaného rotací kolem osy $x$ oblasti pod křivkou $y = f(x)$ na $J$:

(a) $y = \frac{1}{x^2}$, $J = \langle 1, 3\rangle$ (b) $y = \sqrt{2x+3}$, $J = \langle 10, 11\rangle$

(c) $y = \ln x$, $J = \langle 1, 2\rangle$ (d) $y = 3x$, $J = \langle 0, 2\rangle$

**Úloha 9.B.5.** Poptávková funkce $p(x) = 800 - 0.01\sqrt{x^3}$ vztahuje cenu $p(x)$ za kus k poptávce $x$ (počet kusů). Určete průměrnou cenu, jestliže poptávka je mezi 400 a 500 kusů.

**Úloha 9.B.6.** O výrobním stroji, který je $x$ let starý, předpokládejme, že generuje příjmy na úrovni $R(x) = 5\,000 - 20x^2$ dolarů ročně při nákladech na úrovni $C(x) = 2\,000 + 10x^2$ dolarů ročně. Použití stroje je ziskové, dokud $R(x) \ge C(x)$, tj. pro $0 \le x \le 10$. Jaký je celkový zisk vytvořený strojem za toto období? [HoBr, str. 383]

**Úloha 9.B.7.** Výrobce mikropočítačových systémů odhaduje, že prodej jeho produktu $t$ let od současnosti bude mít úroveň $\sqrt{1.2t + 10}$ tisíc jednotek ročně. Kolik prodaných jednotek je očekáváno za příštích 10 let, tj. $0 \le t \le 10$? [Bud, str. 924]

**Úloha 9.B.8.** Firma odhaduje, jak její zisk po určité odbobí bude ovlivněn náklady na reklamu v televizi. Funkce vyjadřující tento vztah je $P(x) = 42x^2\mathrm{e}^{-0.4x}$, kde $x$ jsou výdaje na televizní reklamu (v mil. EUR) a $P(x)$ je zisk (v mil. EUR). Jaký průměrný zisk mohou očekávat, jestliže plánují $0.5 \le x \le 1.5$? [Bud, str. 819]

**Úloha 9.B.9.** Stát předpokládá, že náklady na kompenzaci nezaměstnanosti až uplyne $t$ let od současnosti budou mít úroveň $5\mathrm{e}^{0.05t}$ mil. dolarů ročně. Vypočtěte celkové náklady na kompenzaci nezaměstnanosti za příštích 5 let ($0 \le t \le 5$). Jak dlouho od současnosti bude trvat, než tato suma dosáhne 200 milionů dolarů? [Bud, str. 924]

**Úloha 9.B.10.** Testujte konvergenci daných řad dvěma způsoby a sice pomocí odmocninového kritéria v případech (a), (b) (nebo podílového kritéria v případech (c), (d)) a kritéria integrálního.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} n\mathrm{e}^{-2n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{15}{n^4}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2+2n+2}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+2n+1}$

## *PROBLEMS TO SOLVE*

**Exercise 9.B.1.** Evaluate the definite integrals (round your results).

(a) $\displaystyle\int_1^{10}\left(1-\ln^2 x\right)\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+5x+6}\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int_{-2}^{2}\sqrt{x+5}\,\mathrm{d}x$ (d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{2x-3}\mathrm{d}x$

**Exercise 9.B.2.** Find the area of the region between the graph and the $x$-axis on $J$:

(a) $y=\mathrm{e}^{-x}$, $J=\langle -3,\,1\rangle$ (b) $y=x^2-5x+6$, $J=\langle 0,\,6\rangle$

(c) $y=\frac{1}{x}$, $J=\langle 1,2\rangle$ (d) $y=\frac{1}{x}$, $J=\langle -4,-1\rangle$

(e) $y=2+\sin x$, $J=\langle 0,\pi\rangle$ (f) $y=\sin x$, $J=\langle 0,2\pi\rangle$

**Exercise 9.B.3.** Find the area of the region (use helper sketches).

(a) $x^2\le y\le 1+\frac{x^2}{2}$ (b) $\frac{1}{x}\le y\le 3$, and $1\le x\le 5$

(c) $\frac{x}{2}\le y\le\sqrt{x}$, (d) $x\le y\le 1+3x^2$ , and $-1\le x\le 2$

**Exercise 9.B.4.** Find the volume of the solid of revolution formed by revolving the region under the curve $y=f(x)$ about the $x$-axis on $J$:

(a) $y=\frac{1}{x^2}$, $J=\langle 1,\,3\rangle$ (b) $y=\sqrt{2x+3}$, $J=\langle 10,\,11\rangle$

(c) $y=\ln x$, $J=\langle 1,\,2\rangle$ (d) $y=3x$, $J=\langle 0,\,2\rangle$

**Exercise 9.B.5.** The demand function $p(x)=800-0.01\sqrt{x^3}$ relates the price $p(x)$ per item to the demand $x$ (number of items). Determine the average price if the number of items demanded is between 400 and 500.

**Exercise 9.B.6.** Suppose when it is $x$ years old, an industrial machine generates revenue at the rate of $R(x)=5,000-20x^2$ dollars per year and results in costs that accumulate at the rate of $C(x)=2,000+10x^2$ dollars per year. The use of the machine is profitable as long as $R(x)\ge C(x)$, i. e. for $0\le x\le 10$. What are the net earnings generated by the machine during this period of time? [HoBr, pg. 383]

**Exercise 9.B.7.** A microcomputer manufacturer estimates that sales of its microcomputer systems will be at the rate of $\sqrt{1.2t+10}$ thousand units per year $t$ years from now. What are total sales expected to be over the next 10 years, i.e. $0\le t\le 10$? [Bud, pg. 924]

**Exercise 9.B.8.** A firm estimates that its profit for some time period is a function of the advertising expenditures for TV. The function expressing this retionship is $P(x)=42x^2\mathrm{e}^{-0.4x}$ where $x$ equals the amount spent on TV advertising (in mil. EUR), and $P(x)$ the profit (in mil. EUR). What average profit can they expect if they plan $0.5\le x\le 1.5$? [Bud, pg. 819]

**Exercise 9.B.9.** A state has projected that the cost of unemployment compensation will be at a rate of $5\mathrm{e}^{0.05t}$ million dollars per year $t$ years from now. Compute total unemployment compensation over the next 5 years. $(0\le t\le 5)$. How long does it be until total benefits paid out equal \$200 million? [Bud, pg. 924]

**Exercise 9.B.10.** Test the convergence of given series by means of both the root test in case (a), (b) (or the ratio test in case (c), (d)) and the integral test.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\mathrm{e}^{-2n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{15}{n^4}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^2+2n+2}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+2n+1}$

## Minitest MT9.B

**1.** Určete $\int_1^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$ a zaokrouhlete na 1 desetinné místo.

**(A)** 1.5 **(B)** 1.6 **(C)** 1.7 **(D)** 1.8 **(E)** 1.9.

**2.** Najděte výsledek provedení následujících příkazů v MAPLE:

```
f:= x -> 2*x: int(f(x),x = int(f(x),x=0..1)..int(f(x),x=2..3));
```

**(A)** 4 **(B)** 14 **(C)** 24 **(D)** 40 **(E)** 48

**3.** Vypočtěte objem rotačního tělesa tvořeného rotací oblasti pod křivkou $y = \ln x$ kolem osy $x$ mezi $x = 1$ a $x = 500$ ($x$ je v cm). Zaokrouhlete výsledek na nejbližší litr.

**(A)** 4 l **(B)** 44 l **(C)** 443 l **(D)** 4428 l **(E)** jiný výsledek.

**4.** Vypočtěte obsah oblasti omezené shora parabolou $y = 5 - x^2$ a zdola přímkou $y = 1$.

**(A)** $\frac{16}{3}$ **(B)** $\frac{8}{3}$ **(C)** $\frac{32}{3}$ **(D)** $\frac{64}{3}$ **(E)** jiný výsledek.

**5.** V roce 1991 činilo množství ropy spotřebované v určité části USA 5.4 miliard barelů ročně. Poptávka po ropě vzrůstala. Funkce popisující roční růst úrovně spotřeby $c(t)$ v čase $t$ je $c(t) = 5.4e^{0.1t}$, kde $t$ je měřeno v letech: $t = 0$ odpovídá 1. lednu 1991; a $c(t)$ je měřeno v miliardách barelů ročně. Pokud bude poptávka po ropě růst podle tohoto modelu, jaká spotřeba ropy se očekává ve 20-ti letém období od 1. ledna 1991 do 1. ledna 2011? [Bud, str. 924] (Zaokrouhlete na nejbližší miliardu barelů.)

**(A)** 342 **(B)** 343 **(C)** 344 **(D)** 345 **(E)** jiný výsledek.

**6.** Nechť $A$ je řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{17}{n^2 + 6n + 9}$ a nechť $B$ je řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2n + 3}$.
Jestliže užijeme na obě řady $A$ a $B$ integrální kritérium, dostaneme výsledek

**(A)** $A$ je konvergentní $\wedge$ $B$ je konvergentní **(B)** $A$ je konvergentní $\wedge$ $B$ je divergentní
**(C)** $A$ je divergentní $\wedge$ $B$ je konvergentní **(D)** $A$ je divergentní $\wedge$ $B$ je divergentní.

**7.** V řetězci supermarketů popisuje modelová poptávková funkce $p(x) = 80 - 2\sqrt{x}$ jak cena $p(x)$ v Kč/kg paprik závisí na poptávce $x$ v tunách. Vypočtěte průměrnou cenu za kg pro poptávku mezi 60 a 70 tunami (zaokrouhlete na desítky haléřů).

**(A)** 51.90 Kč **(B)** 55.90 Kč **(C)** 59.90 Kč **(D)** 63.90 Kč **(E)** jiný výsledek.

**8.** Porovnejte obsahy $A_1, A_2$ a $A_3$ tří oblastí mezi grafy funkcí $y = 0.3x^2$, $y = 6.22 \sin x$ a $y = 2\sqrt{x+1}$ a osou $x$ na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$.

**(A)** $A_1 < A_2 < A_3$ **(B)** $A_2 < A_1 < A_3$ **(C)** $A_2 < A_3 < A_1$
**(D)** $A_1 < A_3 < A_2$ **(E)** nic z nabídnutých není správně.

**9.** Najděte výsledek (zaokrouhlený na 2 desetinná místa) provedení příkazu v MAPLE

```
int(x^2*exp(-x),x=2..infinity); .
```

**(A)** 1.35 **(B)** 1.36 **(C)** 1.37 **(D)** 1.38 **(E)** 1.39

## Minitest MT9.B

**1.** Determine $\int\limits_1^2 \left(1+\frac{1}{x}\right) dx$ and round to 1 decimal place.

**(A)** 1.5 **(B)** 1.6 **(C)** 1.7 **(D)** 1.8 **(E)** 1.9.

**2.** Find the result of executing, in MAPLE, the following commands:

```
f:= x -> 2*x: int(f(x),x = int(f(x),x=0..1)..int(f(x),x=2..3));
```

**(A)** 4 **(B)** 14 **(C)** 24 **(D)** 40 **(E)** 48

**3.** Calculate the volume of the solid of revolution formed by revolving the region under the curve $y = \ln x$ about the $x$-axis between $x = 1$ and $x = 500$ ($x$ is in cm). Round your result to the nearest liter.

**(A)** 4 lt **(B)** 44 lt **(C)** 443 lt **(D)** 4428 lt **(E)** none of the above.

**4.** Calculate the area of a region bounded above by the parabola $y = 5 - x^2$ and below by the line $y = 1$.

**(A)** $\frac{16}{3}$ **(B)** $\frac{8}{3}$ **(C)** $\frac{32}{3}$ **(D)** $\frac{64}{3}$ **(E)** none of the above.

**5.** In 1991 the amount of oil used in particular region of the US was 5.4 billion barrels per year. The demand for oil was growing. The function describing annual rate of consumption $c(t)$ at time $t$ is $c(t) = 5.4e^{0.1t}$ where $t$ is measured in years; $t = 0$ corresponds to January 1, 1991; and $c(t)$ is measured in billions of barrels per year. If the demand for oil continues to grow at this rate, how much oil is expected to be consumed in the 20-year period from January 1, 1991, to January 1, 2011? [Bud, pg. 924] (Round your result to the nearest billion of barrels.)

**(A)** 342 **(B)** 343 **(C)** 344 **(D)** 345 **(E)** none of the above.

**6.** Let $A$ be the series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{17}{n^2+6n+9}$ and let $B$ be the series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2n+3}$.

If we apply the integral test on both series $A$ and $B$, we will get the following result

**(A)** $A$ is convergent $\wedge$ $B$ is convergent **(B)** $A$ is convergent $\wedge$ $B$ is divergent
**(C)** $A$ is divergent $\wedge$ $B$ is convergent **(D)** $A$ is divergent $\wedge$ $B$ is divergent.

**7.** In a chain of supermarkets a model demand function $p(x) = 80 - 2\sqrt{x}$ describes how the price $p(x)$ in Kč/kg of bell peppers depends on the demand $x$ in tons. For the demand between 60 and 70 tons, calculate the average price per kg (round to tens of hellers).

**(A)** 51.90 Kč **(B)** 55.90 Kč **(C)** 59.90 Kč **(D)** 63.90 Kč **(E)** none of the above.

**8.** Compare the areas $A_1, A_2$ and $A_3$ of 3 regions between the graphs of the functions $y = 0.3x^2$, $y = 6.22\sin x$, and $y = 2\sqrt{x+1}$ and the $x$-axis on the interval of $\langle 0, 2\pi\rangle$.

**(A)** $A_1 < A_2 < A_3$ **(B)** $A_2 < A_1 < A_3$ **(C)** $A_2 < A_3 < A_1$
**(D)** $A_1 < A_3 < A_2$ **(E)** none of the above is correct.

**9.** Find the result (round to 2 decimal places) of executing, in MAPLE, the command

```
int(x^2*exp(-x),x=2..infinity); .
```

**(A)** 1.35 **(B)** 1.36 **(C)** 1.37 **(D)** 1.38 **(E)** 1.39

# TÉMA 10. Obyčejné diferenciální rovnice

Obyčejná diferenciální rovnice je rovnice obsahující neznámou funkci, obvykle $y$, a jednu nebo více jejích derivací. Také může obsahovat symbol nezávisle proměnné, např. $x$.

| | |
|---|---|
| $y$ ... | neznámá funkce $y$ proměnné $x$, tj. $y = y(x)$ |
| řád $k$ dif. rovnice ... | je řád nejvyšší derivace funkce $y$ v rovnici |
| řešení ... | libovolná funkce $y(x)$ spolu s otevřeným intervalem $J$, na němž se funkce na levé rovná funkci na pravé straně rovnice |
| obecné řešení ... | obsahuje $k$ volitelných konstant |
| partikulární řešení ... | řešení splňující počáteční podmínku(y) |
| počáteční podmínka(y) ... | mají vliv na výběr konstant v obecném řešení |

*Poznámky*

- V diferenciální rovnici můžeme používat jiné symboly než $y$ a $x$.
- Někdy se dif. rovnice zapisují v tzv. *diferenciálním tvaru*, např. $dy - x^2\,dx = 0$.

## *Řešení některých dif. rovnic*

**Dif. rovnice tvaru** $y^{(k)} = f(x)$ ($f$ je lib. funkce, $k \geq 1$)

Užijeme integrování opakovaného $k$-krát. Výsledek má $k$-tici volitelných konstant $C_1, C_2, \dots, C_k \in \mathbf{R}$. K určení hodnot $C_i$ potřebujeme $k$ počátečních podmínek.

**Separovaná dif. rovnice** má tvar $y' = f(x)\cdot h(y)$ ($f, h$ libovolné funkce)

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\cdot h(y) \Rightarrow \frac{1}{h(y)}\,dy = f(x)\,dx \Rightarrow \int \frac{1}{h(y)}\,dy = \int f(x)\,dx \Rightarrow G(y)+C_1 = F(x)+C_2$$

Položíme $C = C_2 - C_1$ a máme $G(y) = F(x) + C$, tzv. *implicitně* popsané řešení.

**Lineární dif. rovnice 1. řádu** má tvar $y' + f(x)\cdot y = g(x)$ ($f, g$ lib. funkce)

Neprve definujeme *integrační faktor* $I(x) = \mathrm{e}^{F(x)}$, kde $F(x)$ je primit. funkce k $f(x)$.

Obecné řešení bude $y = \frac{1}{I(x)}\cdot \int I(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x$.

*Dva zvláštní případy lineárních dif. rovnic 1. řádu*

- $g(x) = 0$ (homogenní lineární dif. rovnice 1. řádu tvaru $y' + f(x)\cdot y = 0$):
  obecné řešení je $y = C\cdot \mathrm{e}^{-F(x)}$.
- $f(x) = b = \mathit{konstanta} \neq 0 \ \wedge\ g(x) = k = \mathit{konstanta} \neq 0$ (tj. $y' + b\cdot y = k$):
  obecné řešení je $y = C\cdot \mathrm{e}^{-b\cdot x} + \frac{k}{b}$.

**Homogenní lineární dif. rovnice 2. řádu** $ay'' + by' + cy = 0$ ($a\neq 0, b, c \in \mathrm{R}$)

**Charakteristická rovnice** je $az^2 + bz + c = 0$, přičemž $D = b^2 - 4ac$.

Obecné řešení má 2 volitelné konstanty $C_1, C_2$ a jeho tvar závisí na $D$:

$y = C_1\mathrm{e}^{z_1x} + C_2\mathrm{e}^{z_2x}$ ... je-li $D > 0$, $z_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ (2 různé reálné kořeny).

$y = C_1\mathrm{e}^{zx} + C_2x\mathrm{e}^{zx}$ ... je-li $D = 0$, $z = \frac{-b}{2a}$ (jeden dvojnásobný reálný kořen).

$y = \mathrm{e}^{px}(C_1\cos qx + C_2\sin qx)$ ... je-li $D < 0$, $z_{1,2}=\frac{-b\pm\mathrm{i}\sqrt{-D}}{2a}=p \pm qi$ (2 komplex. koř.).

**Nehomogenní lineární dif. rovnice 2. řádu** $ay'' + by' + cy = g(x)$, ($g\neq 0$ je funkce)

Obecné řešení je $y = y_{part} + y_{hom}$, kde $y_{part}$ je lib. partikulární řešení a $y_{hom}$ je obecné řešení *příslušné homog. dif. rovnice* (**princip superpozice**).

Speciálně, je-li $g(x)$ polynom, pak $y_{part}$ lze najít též ve tvaru polynomu.

# TOPIC 10. Ordinary differential equations (ODE's)

An ODE is an equation involving an unknown function, usually denoted by $y$, and one or more its derivatives. It can involve the symbol of the independent variable, e.g. $x$.

| | |
|---|---|
| $y$ ... | the unknown function $y$ of $x$, i.e. $y = y(x)$ |
| order $k$ of an ODE ... | the highest derivative of $y$ present in the equation |
| solution ... | any function $y(x)$ with an open interval $J$ on which the left side function of the equation equals the right side function |
| general solution ... | involves $k$ arbitrary constants |
| particular solution ... | the solution satisfying initial condition(s) |
| initial condition(s) ... | influence the selection of constants in the general solution |

*Notes*

- You can use other symbols than $y$ and $x$ in an ODE.
- Sometimes ODE's are written in so called *differential form*, e.g. $dy - x^2\,dx = 0$.

## *Solving some ODE's*

**The ODE of the form** $y^{(k)} = f(x)$ ($f$ is any fuction, $k \geq 1$)

We apply integration repeated $k$-times. In the result, there are $k$ arbitrary constants $C_1, C_2, \ldots, C_k \in \mathbf{R}$. We need $k$ initial conditions to determine the values of $C_i$.

**The Separable ODE** has a form of $y' = f(x) \cdot h(y)$ ($f, h$ are any functions)

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\cdot h(y) \;\Rightarrow\; \frac{1}{h(y)}\,dy = f(x)\,dx \;\Rightarrow\; \int \frac{1}{h(y)}\,dy = \int f(x)\,dx \;\Rightarrow\; G(y)+C_1 = F(x)+C_2$$

Now, let $C = C_2 - C_1$, and we have $G(y) = F(x) + C$, an *implicitly* given solution.

**The First-Order Linear ODE** has a form of $y' + f(x) \cdot y = g(x)$ ($f, g$ any functions)
First, define *the integrating factor* $I(x) = e^{F(x)}$ with $F(x)$ an antiderivative of $f(x)$.
The general solution will be $y = \dfrac{1}{I(x)} \cdot \displaystyle\int I(x)\cdot g(x)\,dx$.

*Two special cases of the First-Order Linear ODE*

- $g(x) = 0$ (the homogeneous 1st order linear differential equation $y' + f(x) \cdot y = 0$):
  the general solution is $y = C \cdot e^{-F(x)}$.
- $f(x) = b = constant \neq 0 \;\wedge\; g(x) = k = constant \neq 0$ (i.e. $y' + b \cdot y = k$):
  the general solution is $y = C \cdot e^{-b\cdot x} + \frac{k}{b}$.

**The Homogeneous 2nd-Order Linear ODE** $ay'' + by' + cy = 0$ ( $a{\neq}0, b, c \in \mathrm{R}$)
The **characteristic equation** is $az^2 + bz + c = 0$ with $D = b^2 - 4ac$.
The general solution has 2 arbitrary constants $C_1, C_2$ and its form depends on $D$:

$y = C_1 e^{z_1 x} + C_2 e^{z_2 x}$ ... if $D > 0$, $z_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ (2 distinct real roots),

$y = C_1 e^{zx} + C_2 x e^{zx}$ ... if $D = 0$, $z = \frac{-b}{2a}$ (a single repeated real root),

$y = e^{px}\,(C_1 \cos qx + C_2 \sin qx)$ ... if $D < 0$, $z_{1,2} = \frac{-b\pm i\sqrt{-D}}{2a} = p \pm qi$ (2 complex roots).

**The Nonhomogeneous 2nd-Order Linear ODE** $ay'' + by' + cy = g(x)$, ($g{\neq}0$ a function)
The general solution is $y = y_{part} + y_{hom}$ with $y_{part}$ any particular solution and $y_{hom}$ the general solution of the *associated homog. ODE* (**the principle of superposition**).
Especially, if $g(x)$ is a polynomial, then $y_{part}$ can also be found in a polynomial form.

## *ŘEŠENÉ PŘÍKLADY*

**Příklad 1.** Dokažte, že $y = 3e^{-x} + 2$ je řešením diferenciální rovnice $y'' + y = 2 - 2y'$.

*Řešení.* $y' = -3e^{-x}$, $y'' = (y')' = 3e^{-x}$. Funkce na levé ($L$) a pravé straně ($R$) jsou

$L = y'' + y = 3e^{-x} + 3e^{-x} + 2 = 6e^{-x} + 2$, $\quad R = 2 - 2y' = 2 - 2(-3e^{-x}) = 2 + 6e^{-x} = L$.

Předložená funkce je řešením dané dif. rovnice (na intervalu $(-\infty, +\infty)$).

**Příklad 2.** Pro dif. rovnici $y'' = 20x^3 + 6$ najděte partikulární řešení splňující
(a) $y(1) = 3$, $y(2) = 48$, (b) $y(1) = 3$, $y'(-1) = 0$.

*Řešení.* Nejdříve získáme obecné řešení pomocí opakovaného integrování:

$y' = \int y'' dx = \int (20x^3 + 6) dx = 20\frac{x^4}{4} + 6x + c_1 = 5x^4 + 6x + c_1$,

$y = \int y' dx = \int (5x^4 + 6x + c_1) dx = 5\frac{x^5}{5} + 6\frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2 = x^5 + 3x^2 + c_1 x + c_2$.

Obecné řešení je $y = x^5 + 3x^2 + c_1 x + c_2$ na $(-\infty, +\infty)$.

V obou případech vedou počáteční podmínky na soustavu rovnic o neznámých $c_1, c_2$:

(a) $3 = y(1) = 1^5 + 3 \cdot 1^2 + c_1 \cdot 1 + c_2$, $\quad 48 = y(2) = 2^5 + 3 \cdot 2^2 + c_1 \cdot 2 + c_2 \rightarrow$
$c_1 + c_2 = -1$, $2c_1 + c_2 = 4 \rightarrow c_1 = 5, c_2 = -6$. Partikulární řešení je $y = x^5 + 3x^2 + 5x - 6$.

(b) $3 = y(1) = 1^5 + 3 \cdot 1^2 + c_1 \cdot 1 + c_2$, $\quad 0 = y'(-1) = 5 \cdot (-1)^4 + 6 \cdot (-1) + c_1 \rightarrow$
$c_1 + c_2 = -1$, $c_1 = 1 \rightarrow c_1 = 1, c_2 = -2$. Partikulární řešení je $y = x^5 + 3x^2 + x - 2$.

**Příklad 3.** Řešte (a) separovanou dif. r. $y' = y^3 \cdot \ln x$, (b) lineární dif. r. $y' + 6xy = 0$.

*Řešení.* (a) $y' = y^3 \cdot \ln x \rightarrow \frac{dy}{dx} = y^3 \cdot \ln x \rightarrow y^{-3}\, dy = \ln x\, dx \rightarrow \int y^{-3}\, dy = \int \ln x\, dx \rightarrow$
$\frac{y^{-2}}{-2} = x \ln x - x + c$ (implicitní tvar). Explicitní tvar může být $y = \pm\sqrt{\frac{-1}{2(x \ln x - x + c)}}$.

(b) $y' + 6xy = 0 \rightarrow y = C \cdot e^{-3x^2}$ (speciální případ pro $g(x) = 0$, $f(x) = 6x$, $F(x) = 3x^2$).

**Příklad 4.** V továrně jsou marginální náklady $3(q-4)^2$ dolarů na jednotku při úrovni výroby $q$ jednotek. Jaké jsou náklady na produkci 14 jednotek, jsou-li fixní náklady 436 $?

*Řešení.* Máme $C'(q) = 3(q-4)^2$, $C(0) = 436$. Nejdříve dostaneme obecné řešení:
$C'(q) = 3(q-4)^2 \rightarrow C(q) = (q-4)^3 + M$, $M \in \mathbf{R}$. Nyní užijeme počáteční podmínku k získání partikulárního řešení: $C(0) = 436 \rightarrow 436 = (0-4)^3 + M \rightarrow M = 500$.
Nákladová funkce je $C(q) = (q-4)^3 + 500$ a $C(14) = (14-4)^3 + 500 = 1500$ dolarů.

**Příklad 5.** Při studiu některých trhů zahrnují ekonomové do dif. rovnic i druhou derivaci cenové funkce $p(t)$ ($t$ je čas), aby vystihli, zda je rychlost její změny, tj. $p'(t)$, rostoucí nebo klesající. Předpokládejme, že nabídka $S$ (supply) a poptávka $D$ (demand) splňují rovnice $S = 3 + 0.2p' - 0.05p - p''$ a $D = 2 + 0.8p' - 0.01p + p''$, a že $p(0) = 75$ a $p'(0) = -15$. Najděte rovnovážnou cenu v čase $t$. [BaZi, str. 584]

*Řešení.* Rovnovážná cena v čase $t$ je řešením rovnice $S = D$, tj.

$3 + 0.2p' - 0.05p - p'' = 2 + 0.8p' - 0.01p + p'' \quad \rightarrow \quad 2p'' + 0.6p' + 0.04p = 1 \quad (*)$.

(*) je nehomogenní lin. dif. rovnice 2. řádu. Nejdříve řešíme příslušnou rovnici homogenní:
$2p'' + 0.6p' + 0.04p = 0 \quad \rightarrow \quad 2z^2 + 0.6z + 0.04 = 0$, $D = 0.36 - 0.32 = 0.04 \quad \rightarrow$
$z_1 = -0.1, z_2 = -0.2$. Obecné řešení je $p_{hom}(t) = c_1 e^{-0.1t} + c_2 e^{-0.2t}$.

Nyní se vraťme k (*). Abychom dostali $p_{part}(t)$, položíme $p_{part}(t) = M = konstanta$ ve (*), neboť funkce na pravé straně = 1 (jen konstanta): $2M'' + 0.6M' + 0.04M = 1 \rightarrow M = 25$.

$p(t) = p_{hom}(t) + p_{part}(t) = c_1 e^{-0.1t} + c_2 e^{-0.2t} + 25$. Zbývá určit hodnoty $c_1, c_2$:

$p(0) = 75, p'(0) = -15 \rightarrow c_1 + c_2 + 25 = 75$, $-0.1c_1 - 0.2c_2 = -15 \rightarrow c_1 = -50, c_2 = 100$.

Funkce rovnovážné ceny je $p(t) = -50e^{-0.1t} + 100e^{-0.2t} + 25$.

*SAMPLE EXERCISES*

**Example 1.** Prove that $y = 3e^{-x} + 2$ is a solution of the ODE $y'' + y = 2 - 2y'$.

*Solution.* $y' = -3e^{-x}$, $y'' = (y')' = 3e^{-x}$. The left-side ($L$) and the right-side ($R$) functions are

$$L = y'' + y = 3e^{-x} + 3e^{-x} + 2 = 6e^{-x} + 2, \qquad R = 2 - 2y' = 2 - 2(-3e^{-x}) = 2 + 6e^{-x} = L.$$

The function is a solution of the ODE (on the interval $(-\infty, +\infty)$).

**Example 2.** For the ODE $y'' = 20x^3 + 6$ find the particular solution satisfying
(a) $y(1) = 3$, $y(2) = 48$, (b) $y(1) = 3$, $y'(-1) = 0$.

*Solution.* We apply repeated integration to get the general solution first:
$y' = \int y''dx = \int(20x^3 + 6)dx = 20\frac{x^4}{4} + 6x + c_1 = 5x^4 + 6x + c_1$,
$y = \int y'dx = \int(5x^4 + 6x + c_1)dx = 5\frac{x^5}{5} + 6\frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2 = x^5 + 3x^2 + c_1 x + c_2$.
The general solution is $y = x^5 + 3x^2 + c_1 x + c_2$ on $(-\infty, +\infty)$.

In both cases, the initial conditions lead to a system of two equations in unknowns $c_1, c_2$:
(a) $3 = y(1) = 1^5 + 3 \cdot 1^2 + c_1 \cdot 1 + c_2$, $48 = y(2) = 2^5 + 3 \cdot 2^2 + c_1 \cdot 2 + c_2$ $\rightarrow$
$c_1 + c_2 = -1$, $2c_1 + c_2 = 4$ $\rightarrow$ $c_1 = 5, c_2 = -6$. The particular solution is $y = x^5 + 3x^2 + 5x - 6$.
(b) $3 = y(1) = 1^5 + 3 \cdot 1^2 + c_1 \cdot 1 + c_2$, $0 = y'(-1) = 5 \cdot (-1)^4 + 6 \cdot (-1) + c_1$ $\rightarrow$
$c_1 + c_2 = -1$, $c_1 = 1$ $\rightarrow$ $c_1 = 1, c_2 = -2$. The particular solution is $y = x^5 + 3x^2 + x - 2$.

**Example 3.** Solve (a) the separable ODE $y' = y^3 \cdot \ln x$, (b) the linear ODE $y' + 6xy = 0$.

*Solution.* (a) $y' = y^3 \cdot \ln x$ $\rightarrow$ $\frac{dy}{dx} = y^3 \cdot \ln x$ $\rightarrow$ $y^{-3}dy = \ln x\, dx$ $\rightarrow$ $\int y^{-3}dy = \int \ln x\, dx$ $\rightarrow$
$\frac{y^{-2}}{-2} = x\ln x - x + c$ (an implicit form). An explicit form can be $y = \pm\sqrt{\frac{-1}{2(x\ln x - x + c)}}$ .
(b) $y' + 6xy = 0$ $\rightarrow$ $y = C \cdot e^{-3x^2}$ (a special case with $g(x) = 0$, $f(x) = 6x$, $F(x) = 3x^2$).

**Example 4.** At a certain factory, the marginal cost is $3(q-4)^2$ dollars per unit when the level of output is $q$ units. What is the cost of producing 14 units if the overhead is \$436?

*Solution.* We have $C'(q) = 3(q-4)^2$, $C(0) = 436$. First, we get the general solution:
$C'(q) = 3(q-4)^2$ $\rightarrow$ $C(q) = (q-4)^3 + M$, $M \in \mathbf{R}$. Now, we use the initial condition to get the particular solution: $C(0) = 436$ $\rightarrow$ $436 = (0-4)^3 + M$ $\rightarrow$ $M = 500$.
The cost function is $C(q) = (q-4)^3 + 500$ and $C(14) = (14-4)^3 + 500 = \$1500$.

**Example 5.** In studying certain markets, economists include the second derivative of the price function $p(t)$ ($t$ is time) in the differential equation to reflex whether the rate of change of the price, i.e. $p'(t)$, is increasing or decreasing. Suppose that $S$ (supply) and $D$ (demand) satisfy the equations $S = 3 + 0.2p' - 0.05p - p''$ and $D = 2 + 0.8p' - 0.01p + p''$, and that $p(0) = 75$ and $p'(0) = -15$. Find the equilibrium price at time $t$. [BaZi, pg. 584]

*Solution.* The equilibrium price at time $t$ is the solution of the equation $S = D$, i. e.
$3 + 0.2p' - 0.05p - p'' = 2 + 0.8p' - 0.01p + p''$ $\rightarrow$ $2p'' + 0.6p' + 0.04p = 1$ (*).
(*) is a nonhomogeneous 2-nd order linear ODE. First, we solve its associated homogeneous ODE: $2p'' + 0.6p' + 0.04p = 0$ $\rightarrow$ $2z^2 + 0.6z + 0.04 = 0$, $D = 0.36 - 0.32 = 0.04$ $\rightarrow$ $z_1 = -0.1, z_2 = -0.2$. The general solution is $p_{hom}(t) = c_1 e^{-0.1t} + c_2 e^{-0.2t}$.
Now, we go back to (*). To get $p_{part}(t)$ we simply put $p_{part}(t) = M = constant$ in (*) because the right-side function $= 1$ (a constant only): $2M'' + 0.6M' + 0.04M = 1$ $\rightarrow$ $M = 25$.
$p(t) = p_{hom}(t) + p_{part}(t) = c_1 e^{-0.1t} + c_2 e^{-0.2t} + 25$. It remains to determine the values of $c_1, c_2$:
$p(0) = 75, p'(0) = -15$ $\rightarrow$ $c_1 + c_2 + 25 = 75$, $-0.1c_1 - 0.2c_2 = -15$ $\rightarrow$ $c_1 = -50, c_2 = 100$.
The equilibrium price function is $p(t) = -50e^{-0.1t} + 100e^{-0.2t} + 25$.

## *ÚLOHY K ŘEŠENÍ*

**Úloha 10.1.** Dány 2 dif. rovnice $r_1 : y'' + 2y = 1 + 3y'$, $r_2 : y'' + y = 2 + 2y'$ a a dvě funkce $f_1 : y = 2e^x + 1$, $f_2 : y = xe^x + 2$. Mezi $f_1, f_2$ vyberte řešení pro rovnici $r_1$ nebo $r_2$.

**Úloha 10.2.** Najděte obecná řešení zadaných dif. rovnic.

(a) $y' = x \sin x$, (b) $y'' = x^2 - 2x + 6$, (c) $y'' = e^{-3x}$, (d) $y''' = \dfrac{48}{x^5}$.

**Úloha 10.3.** Najděte partikulární řešení daných dif. rovnic splňující zadané počáteční podmínky.

(a) $y' = x + 5$, $y(2) = 6$, (b) $y' = xe^x$, $y(0) = 10$,

(c) $y'' = e^x - 2$, $y(0) = 3$, $y(1) = e$, (d) $y'' = \ln x + 2$, $y(1) = 3$, $y'(1) = 4$.

**Úloha 10.4.** Řešte separabilní dif. rovnice (uveďte aspoň implicitní řešení).

(a) $y' = \dfrac{x^2}{y}$, (b) $y' = \dfrac{xe^x}{y^3}$, (c) $y' = \dfrac{xy^2}{x^2 - 3x + 2}$, (d) $y' = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{y}}$.

**Úloha 10.5.** Řešte lineární dif. rovnice 1. a 2. řádu.

(a) $y' + xy = 0$, (b) $y' - 2y = 0$, (c) $y' + 2y = x$,

(d) $y' + e^{3x}y = 0$, (e) $y' + y\sin^2 x = 0$, (f) $y' + y = e^x$,

(g) $y'' - 4y' + 4y = 0$, (h) $y'' - 2y' = 0$, (i) $y'' + y' + y = 0$,

(j) $y'' + 2y' + y = x - 3$, (k) $y'' - y = x^2 + 1$, (l) $y'' + 3y' = x + 5$.

**Úloha 10.6.** V určitém supermarketu je cena $p(x)$ za kuře 3 \$ za kg. Odhaduje se, že $x$ týdnů od nynějška cena poroste rychlostí $p'(x) = 3\sqrt{x+1}$ centů za týden. Kolik bude stát kuře za 8 týdnů? [HoBr, str. 445]

**Úloha 10.7.** Současná cena určitého domu je 200 000 EUR. Předpokládejme odhad, že po $t$ měsících bude cena $p(t)$ růst rychlostí $p'(t) = 0.01p(t) + 1\,000/$ EUR měsíčně. Kolik bude dům stát za 9 měsíců? [HoBr, str. 453] (NÁVOD: užijte metodu integračního faktoru)

**Úloha 10.8.** Výrobce sportovních oděvů udává, že marginální náklady při produkci $x$ kusů určitého kompletu jsou (v dolarech) $20 - 0.015x$. Jsou-li náklady na výrobu jednoho kompletu 25 \$, najděte nákladovou funkci a pak náklady na výrobu 50-ti kompletů. [Swo, str. 191]

**Úloha 10.9.** V ekonomice se nabídka a poptávka po určité komoditě často uvažují jako funkce nejen ceny $p(t)$, ale i změny ceny $p'(t)$. Rovnovážná cena v čase $t$ je řešením rovnice $S = D$. Jestliže nabídka $S$ a poptávka $D$ po určité komoditě splňují rovnice $S = 35 - 2p + 3p'$ a $D = 95 - 5p + 2p'$, a je-li $p(0) = 30$, najděte rovnovážnou cenu v čase $t$. [BaZi, str. 574]

**Úloha 10.10.** Je-li marginální příjmová funkce pro nějaký produkt $R'(x) = x + \frac{4}{\sqrt{x}}$ (a $R(0) = 0$), najděte příjmovou funkci a marginální poptávkovou funkci. [Swo, str. 191] (NÁVOD: $R(x) = x \cdot p(x) \longrightarrow p(x) = \frac{R(x)}{x}$. Pak *marginální poptávková funkce* je $p'(x)$.)

**Úloha 10.11.** Diferenciální rovnice $y'' + 5y' + 4y = 8$ je typická rovnice, která se vyskytuje při studiu křivek učení u pokusných krys v určitých psychologických experimentech. Najděte partikulární řešení splňující $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. [BaZi, str. 584]

## *PROBLEMS TO SOLVE*

**Exercise 10.1.** Given two ODE's $r_1 : y'' + 2y = 1 + 3y'$, $r_2 : y'' + y = 2 + 2y'$ and two functions $f_1 : y = 2\mathrm{e}^x + 1$, $f_2 : y = x\mathrm{e}^x + 2$. From $f_1, f_2$ choose a solution of $r_1$ or of $r_2$.

**Exercise 10.2.** Find the general solutions for the given ODE's.

(a) $y' = x \sin x$. (b) $y'' = x^2 - 2x + 6$, (c) $y'' = \mathrm{e}^{-3x}$, (d) $y''' = \dfrac{48}{x^5}$.

**Exercise 10.3.** Find particular the solutions of the given ODE's satisfying the given initial conditions.

(a) $y' = x + 5$, $y(2) = 6$, (b) $y' = x\mathrm{e}^x$, $y(0) = 10$,

(c) $y'' = \mathrm{e}^x - 2$, $y(0) = 3$, $y(1) = \mathrm{e}$, (d) $y'' = \ln x + 2$, $y(1) = 3$, $y'(1) = 4$.

**Exercise 10.4.** Solve the separable ODE's (give at least some implicit form solutions).

(a) $y' = \dfrac{x^2}{y}$, (b) $y' = \dfrac{x\mathrm{e}^x}{y^3}$. (c) $y' = \dfrac{xy^2}{x^2 - 3x + 2}$, (d) $y' = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{y}}$.

**Exercise 10.5.** Solve the first-order and the second-order linear ODE's.

(a) $y' + xy = 0$, (b) $y' - 2y = 0$, (c) $y' + 2y = x$,

(d) $y' + \mathrm{e}^{3x}y = 0$, (e) $y' + y\sin^2 x = 0$, (f) $y' + y = \mathrm{e}^x$,

(g) $y'' - 4y' + 4y = 0$, (h) $y'' - 2y' = 0$, (i) $y'' + y' + y = 0$,

(j) $y'' + 2y' + y = x - 3$, (k) $y'' - y = x^2 + 1$, (l) $y'' + 3y' = x + 5$.

**Exercise 10.6.** In a certain supermarket, the price $p(x)$ of chicken is currently \$3 per kg. It is estimated that $x$ weeks from now the price will be increasing at the rate of $p'(x) = 3\sqrt{x+1}$ **cents** per week. How much will chicken cost 8 weeks from now? [HoBr, pg. 445]

**Exercise 10.7.** The price of a certain house is currently 200,000 EUR. Suppose it is estimated that after $t$ months, the price $p(t)$ will be increasing at the rate $p'(t) = 0.01p(t) + 1{,}000t$ EUR per month. How much will the house cost 9 months from now? [HoBr, pg. 453] (HINT: use the integration factor method)

**Exercise 10.8.** A sportswear manufacturer determines that the marginal cost of producing $x$ warm-up suits is given in dollars by $20 - 0.015x$. If the cost of producing one suit is \$25, find the cost function and the cost of producing 50 suits. [Swo, pg. 191]

**Exercise 10.9.** In economics, the supply and the demand for a commodity can often je considered as functions of both the price, $p(t)$, and the rate of change of the price, $p'(t)$. The equilibrium price at time $t$ is the solution of the equation $S = D$. If the supply $S$ and the demand $D$ for a certain commodity satisfy the equations $S = 35 - 2p + 3p'$ and $D = 95 - 5p + 2p'$, and if $p(0) = 30$, find the equilibrium price at time $t$. [BaZi, pg. 574]

**Exercise 10.10.** If the marginal revenue function of a product is given by $R'(x) = x + \frac{4}{\sqrt{x}}$ (and $R(0) = 0$) find the revenue function and the marginal demand function. [Swo, pg. 191] (HINT: $R(x) = x \cdot p(x) \;\rightarrow\; p(x) = \frac{R(x)}{x}$. Then the *the marginal demand function* is $p'(x)$.)

**Exercise 10.11.** The differential equation $y'' + 5y' + 4y = 8$ is typical of the equations that occur in the study of learning curves of rats in certain types of psychological experiments. Find the particular solution satisfying $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. [BaZi, pg. 584]

## Minitest MT10

**1.** Kolik z následujících 4 funkcí $y = \mathrm{e}^{-x}$, $y = \cos x$, $y = x \ln x$, $y = 1 + x$ jsou řešeními dif. rovnice $yy''' - y'y'' = 0$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4.

**2.** Najděte obecné řešení dif. rovnice $y' = \dfrac{1}{x^2 - x - 2}$.

(A) $y = \frac{1}{3} \ln \left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C$ (B) $y = \frac{1}{3} \ln \left|\frac{x+1}{x-2}\right| + C$ (C) $y = \frac{1}{3} \ln \left|\frac{x+2}{x-1}\right| + C$

(D) $y = \frac{1}{3} \ln \left|\frac{x-2}{x+1}\right| + C$ (E) žádné z uvedených to není.

**3.** Řešením úlohy v MAPLE

```
> dsolve({diff(y(x),x) = sin(x) + 2*x, y(0) = 1}, y(x));
```
je

(A) $y = \cos x + x^2$ (B) $y = \cos x + x^2 + 1$ (C) $y = -\cos x + x^2 + 1$

(D) $y = -\cos x + x^2 + 2$ (E) není žádné z uvedených.

**4.** Cena produktu $p(t)$ splňuje dif. rovnici $p' = 10 - 0.5p$. Je-li $p(0) = 35$, pak

(A) $p(t) = 15\mathrm{e}^{-0.5t} + 35$ (B) $p(t) = 15\mathrm{e}^{0.5t} + 35$

(C) $p(t) = 15\mathrm{e}^{-0.5t} + 20$ (D) $p(t) = 15\mathrm{e}^{0.5t} + 20$.

**5.** Dána dif. rovnice $y'' = 2$. Najděte 2 partikulární řešení $f_1$ a $f_2$ splňující podmínky: pro $f_1$ je $y(1) = 4$, $y'(1) = 6$, a pro $f_2$ je $y(1) = 5$, $y'(1) = 3$.

Pak je hodnota $f_1(2) - f_2(2)$ rovna

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) jiný výsledek.

**6.** Separovaná dif. rovnice $y' = \dfrac{4}{(\cos y) \cdot \sqrt{x}}$ má *implicitní* řešení

(A) $\sin y = 4\sqrt{x} + C$ (B) $-\sin y = 4\sqrt{x} + C$ (C) $\sin y = 8\sqrt{x} + C$

(D) $-\sin y = 8\sqrt{x} + C$ (E) žádné z uvedených.

**7.** Je-li marginální nákladová funkce nějakého produktu $\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$ ($x$ je počet vyrobených jednotek) a jsou-li náklady na výrobu 8-mi jednotek 20 \$, najděte náklady na výrobu 64 jednotek. [Swo, str. 191]

(A) 48 \$ (B) 50 \$ (C) 52 \$ (D) 54 \$ (E) 56. \$

**8.** Obecné řešení dif. rovnice $2y'' - 8y' + 8y = 0$ je

(A) $y = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{-2x}$ (B) $y = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{2x}$ (C) $y = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2 x\mathrm{e}^{2x}$

(D) $y = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2 x\mathrm{e}^{-2x}$ (E) není žádné z uvedených.

**9.** Dána nehomogenní dif. rovnice $y'' - y' - 2y = 4x - 4$.

Nejdříve vyberte z následujících 4 funkcí jedno její partikulární řešení:

$y = 2x + 3$, $y = 2x - 3$, $y = -2x - 3$, $y = -2x + 3$.

Pak udejte její obecné řešení.

(A) $y = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{-x} + 2x - 3$ (B) $y = C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2\mathrm{e}^{x} + 2x - 3$.

(C) $y = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{-x} - 2x + 3$ (D) $y = C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2\mathrm{e}^{x} - 2x + 3$

# Minitest MT10

**1.** How many of the following 4 functions $y = e^{-x}$, $y = \cos x$, $y = x \ln x$, $y = 1+x$ are solutions of $yy''' - y'y'' = 0$?

**(A)** 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4.

**2.** Find the general solution of the equation $y' = \dfrac{1}{x^2 - x - 2}$.

**(A)** $y = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C$ **(B)** $y = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x+1}{x-2} \right| + C$ **(C)** $y = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x+2}{x-1} \right| + C$

**(D)** $y = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| + C$ **(E)** none of the above

**3.** In MAPLE, the solution of

```
> dsolve({diff(y(x),x) = sin(x) + 2*x, y(0) = 1}, y(x));
```
is

**(A)** $y = \cos x + x^2$ **(B)** $y = \cos x + x^2 + 1$ **(C)** $y = -\cos x + x^2 + 1$

**(D)** $y = -\cos x + x^2 + 2$ **(E)** none of the above.

**4.** The price $p(t)$ of a product satisfies the ODE $p' = 10 - 0.5p$. If $p(0) = 35$ then

**(A)** $p(t) = 15e^{-0.5t}+35$ **(B)** $p(t) = 15e^{0.5t}+35$

**(C)** $p(t) = 15e^{-0.5t}+20$ **(D)** $p(t) = 15e^{0.5t}+20$.

**5.** Given an ODE $y'' = 2$. Find 2 particular solutions $f_1$ and $f_2$ satisfying: for $f_1$ there is $y(1) = 4$, $y'(1) = 6$, and for $f_2$ there is $y(1) = 5$, $y'(1) = 3$. Then the value of $f_1(2) - f_2(2)$ equals

**(A)** 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** none of the above.

**6.** The separable ODE $y' = \dfrac{4}{(\cos y) \cdot \sqrt{x}}$ has an *implicitly* given solution

**(A)** $\sin y = 4\sqrt{x} + C$ **(B)** $-\sin y = 4\sqrt{x} + C$ **(C)** $\sin y = 8\sqrt{x} + C$

**(D)** $-\sin y = 8\sqrt{x} + C$ **(E)** none of the above.

**7.** If the marginal cost function of a product is given by $\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$ ($x$ is the number of units produced) and if the cost of producing 8 units is \$20, find the cost of producing 64 units. [Swo, pg. 191]

**(A)** \$48 **(B)** \$50 **(C)** \$52 **(D)** \$54 **(E)** \$ 56.

**8.** The general solution of the equation $2y'' - 8y' + 8y = 0$ is

**(A)** $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$ **(B)** $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{2x}$ **(C)** $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$

**(D)** $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{-2x}$ **(E)** none of the above.

**9.** Given a nonhomogenous equation $y'' - y' - 2y = 4x - 4$.
First, choose its particular solution from the following 4 functions:
$y = 2x + 3$, $y = 2x - 3$, $y = -2x - 3$, $y = -2x + 3$.
Then give the general solution of the ODE.

**(A)** $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + 2x - 3$ **(B)** $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x} + 2x - 3$

**(C)** $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} - 2x + 3$ **(D)** $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x} - 2x + 3$.

# TOPIC 11.A Funkce více proměnných

| | |
|---|---|
| $X = [x_1, \ldots, x_n]$ | bod v prostoru $\mathbf{E}_n$ všech $n$-tic reálných čísel |
| $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ | funkce $n$-proměnných; def. obor $D(f)$ je podmnožina $\mathrm{E}_n$ |
| $f(A) = f(a_1, \ldots, a_n)$ | hodnota funkce $f$ v bodě $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n] \in D(f)$ |
| $f_{x_i} = f'^{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ | parciální derivace funkce $f$ podle $x_i$; opět funkce $n$ proměnných |
| $f_{x_i}(A) = f'^{x_i}(A) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(A)$ | hodnota parciální derivace v bodě $A \in D(f)$ |
| $f_{x_i x_i} = f''^{x_i} = \frac{\partial f^2}{\partial x_i^2}$ | druhá derivace $f$ podle $x_i$; opět funkce $n$ proměnných |
| $f_{x_i x_j} = f'^{x_i}{}'^{x_j} = \frac{\partial f^2}{\partial x_j \partial x_i}$ | smíšená derivace $f$; opět funkce $n$ proměnných |
| $H_f = (h_{ij}) = f_{x_i x_j}$ | Hesseho matice funkce $f$; prvky jsou funkce $n$ prom. |
| $H_f(A) = f_{x_i x_j}(A)$ | Hesseho matice funkce $f$ v bodě $A \in D(f)$ |

*Poznámky*

- **Elementární funkce více proměnných** jsou dány vzorci získanými kombinováním operací sčítání, odčítání, násobení, dělení a skládání aplikovaných na všechny proměnné a funkcí základních sin, cos, ln atd.
- Když derivujeme podle $x_i$, chápeme ostatní $x_j$ jako konstantní.
- Parciální derivace vyšších řádů se získají opakováním parciálního derivování.

Pro značení pomocí "$\partial$" se užívá opačné pořadí, tj. $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$.
V případě elementárních funkcí nezáleží na pořadí derivování (např. $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$).

## *Aplikace parciálních derivací prvního řádu*

(Obvykle se požaduje splnění dalších podmínek, např. spojitost prvních a druhých derivací.)

**Stacionární bod** $A$ funkce $f$ musí splňovat $n$ podmínek:

$$f'^{x_1}(A) = 0 \ \wedge \ f'^{x_2}(A) = 0 \ \wedge \ \ldots \wedge \ f'^{x_n}(A) = 0$$

**Totální diferenciál** funkce $n$ proměnných $f$ v bodě $A = [a_1, \ldots, a_n]$:

$$\mathrm{d}f_A = f'^{x_1}(A) \cdot \mathrm{d}x_1 + f'^{x_2}(A) \cdot \mathrm{d}x_2 + \ldots + f'^{x_n}(A) \cdot \mathrm{d}x_n$$

Při užití totálního diferenciálu v bodě $A = [a_1, \ldots, a_n]$ k aproximaci hodnoty funkce $f$ v $X = [a_1 + h_1, a_2 + h_2, \ldots, a_n + h_n]$ nahradíme symboly $\mathrm{d}x_i$ hodnotami přírůstků $h_i$.
Vzorec je $\quad f(X) \doteq f(A) + f'^{x_1}(A) \cdot h_1 + f'^{x_2}(A) \cdot h_2 + \ldots + f'^{x_n}(A) \cdot h_n$.

## *Funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$*

- Definiční obor $D(f)$ je podmnožina roviny $xy$ se dvěma druhy bodů: vnitřními a hraničními; graf funkce $f$ je množina bodů $[x, y, f(x, y)]$, kde $[x, y] \in D(f)$ a je to plocha v prostoru. Může být načrtnuta v rovině pomocí geometrické projekce.
- **Tečná rovina** grafu $f$ v bodě $A = [a, b] \in D(f)$, tj. $z = k_1 x + k_2 y + q$,
je dána jako $\quad z - f(A) = f'^x(A) \cdot (x - a) + f'^y(A) \cdot (y - b)$.
- Stacionární bod $A$ funkce $f$ splňuje dvě podmínky: $f'^x(A) = 0 \ \wedge \ f'^y(A) = 0$.
- Hesseho matice funkce $z = f(x, y)$ je $H_f = \begin{bmatrix} f''^x & f'^x{}'^y \\ f'^y{}'^x & f''^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{bmatrix}$.

# TOPIC 11.A Multivariate Functions

| | |
|---|---|
| $X = [x_1, \ldots, x_n]$ | a point of the space $\mathbf{E}_n$ of all $n$-tuples of real numbers |
| $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ | an $n$-variable function; its domain $D(f)$ is a subset of $\mathrm{E}_n$ |
| $f(A) = f(a_1, \ldots, a_n)$ | the value of function $f$ at point $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n] \in D(f)$ |
| $f_{x_i} = f'^{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ | the partial derivative of function $f$ with respect to $x_i$; again a function of $n$ variables |
| $f_{x_i}(A) = f'^{x_i}(A) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(A)$ | the value of partial derivative at point $A \in D(f)$ |
| $f_{x_i x_i} = f''^{x_i} = \frac{\partial f^2}{\partial x_i^2}$ | second order partial of $f$ with respect to $x_i$; again a function of $n$ variables |
| $f_{x_i x_j} = f'^{x_i \prime x_j} = \frac{\partial f^2}{\partial x_j \, \partial x_i}$ | the mixed partial of $f$; again a function of $n$ variables |
| $H_f = (h_{ij}) = f_{x_i x_j}$ | the Hesse matrix of $f$; its entries are $n$-variable functions |
| $H_f(A) = f_{x_i x_j}(A)$ | the Hesse matrix of $f$ at point $A \in D(f)$ |

*Notes*

- **Elementary multivariate functions** are given by formulas obtained by combining the operations of addition, subtraction, multiplication, division, and composition applied on all the variables and the basic functions of sin, cos, ln etc.
- When we differentiate with respect to $x_i$ we hold the other $x_j$'s constant.
- The higher-order partials are obtained by repeated partial differentiation.

For the "$\partial$" notation, the reverse order is used, that is $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$. In the case of elementary functions, the order of differentiation does not matter (e. g. $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$).

## *Aplications of first-order partial derivatives*

(Some additional conditions are usually required to be satisfied, e. g. the continuity of the 1st and the 2nd order partials.)

**A stationary point** $A$ of function $f$ must satisfy $n$ simultaneous conditions:

$$f'^{x_1}(A) = 0 \ \wedge \ f'^{x_2}(A) = 0 \ \wedge \ \ldots \wedge \ f'^{x_n}(A) = 0$$

**The total differential** of $n$-variable function $f$ at point $A = [a_1, \ldots, a_n]$:

$$\mathrm{d}f_A = f'^{x_1}(A) \cdot \mathrm{d}x_1 + f'^{x_2}(A) \cdot \mathrm{d}x_2 + \ldots + f'^{x_n}(A) \cdot \mathrm{d}x_n$$

When using the total differential at point $A = [a_1, \ldots, a_n]$ to approximate the value of $f$ at $X = [a_1 + h_1, a_2 + h_2, \ldots, a_n + h_n]$ we replace the symbols of $\mathrm{d}x_i$ with the increment values $h_i$. The formula is $f(X) \doteq f(A) + f'^{x_1}(A) \cdot h_1 + f'^{x_2}(A) \cdot h_2 + \ldots + f'^{x_n}(A) \cdot h_n$.

## *Functions of 2 variables* $z = f(x, y)$

- The domain $D(f)$ is a subset of the $xy$-plane with two kinds of points: the internal and the boundary ones; the graph of $f$ is a set of points $[x, y, f(x, y)]$, where $[x, y] \in D(f)$, and it is a surface in space. It can be sketched in the plane using a geometric projection.
- **The tangent plane** of the graph of $f$ at point $A = [a, b] \in D(f)$, i.e. $z = k_1 x + k_2 y + q$, is given by $z - f(A) = f'^{x}(A) \cdot (x - a) + f'^{y}(A) \cdot (y - b)$.
- Stationary point $A$ of $f$ satisfies two conditions: $f'^{x}(A) = 0 \ \wedge \ f'^{y}(A) = 0$.
- The Hesse matrix of $z = f(x, y)$ is $H_f = \begin{bmatrix} f''^{x} & f'^{x \prime y} \\ f'^{y \prime x} & f''^{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{bmatrix}$.

## *ŘEŠENÉ PŘÍKLADY*

**Příklad 1.** Dána funkce 3 proměnných $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 + x_2\sqrt{x_3} + \ln(2 - x_2)$.

(a) Ukažte, že $A = [1, 3, 4] \notin D(f)$ a $B = [-1, 1, 4] \in D(f)$.

(b) Vypočtěte hodnoty prvních parciálních derivací funkce $F$ v bodě $B$.

*Řešení.* (a) Zkusíme vypočítat hodnoty funkce v daných bodech:

$F(A) = 1^4 + 3\sqrt{4} + \ln(2-3) = \ldots$ nemůžeme pokračovat kvůli $\ln(-1) \Rightarrow A \notin D(f)$.

$F(B) = (-1)^4 + 1\sqrt{4} + \ln(2-1) = 1 + 2 + 0 = 3 \Rightarrow B \in D(f)$.

(b) $F'^{x_1} = \left(x_1^4\right)'^{x_1} + 0 + 0 = 4x_1^3$, $\qquad F'^{x_1}(B) = 4(-1)^3 = -4$.

$F'^{x_2} = 0 + \sqrt{x_3} \cdot x_2'^{x_2} + \dfrac{1}{2-x_2} \cdot (2-x_2)'^{x_2} = \sqrt{x_3} - \dfrac{1}{2-x_2}$, $\qquad F'^{x_2}(B) = \sqrt{4} - \frac{1}{2-1} = 1$.

$F'^{x_3} = 0 + x_2 \cdot \left[x_3^{1/2}\right]'^{x_3} + 0 = \dfrac{x_2}{2\sqrt{x_3}}$, $\qquad F'^{x_3}(B) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$.

**Příklad 2.** Pro funkci $G(p, q) = p^4 + q^2 \ln p$ vypočtěte (a) $\dfrac{\partial^3 G}{\partial p^3}$, (b) $\dfrac{\partial^3 G}{\partial q \partial p^2}$.

*Řešení.*

(a) $G'^p = (p^4 + q^2 \ln p)'^p = 4p^3 + q^2 \cdot \frac{1}{p}$, $\qquad G'^{p'p} = (G'^p)'^p = (4p^3 + q^2 \cdot p^{-1})'^p = 12p^2 - q^2 \cdot p^{-2}$,

$G'^{p'p'p} = (G'^{p'p})'^p = (12p^2 - q^2 \cdot p^{-2})'^p = 24p + 2q^2 \cdot p^{-3} = 24p + \frac{2q^2}{p^3}$.

(b) Už máme $G'^{p'p}$; nyní $\frac{\partial^3 G}{\partial q \partial p^2} = G'^{p'p'q} = (12p^2 - q^2 \cdot p^{-2})'^q = -2q \cdot p^{-2} = -\frac{2q}{p^2}$.

**Příklad 3.** Pro funkci 2 proměnných $f : z = 4 + 3e^x(x^2 + y^2)$ a bod $A = [0, 1]$ najděte

(a) rovnici tečné roviny grafu v $A$ a odhadněte $f(0.3, 0.99)$ použitím diferenciálu v $A$,

(b) stacionární body $f$ a pak Hesseho matici pro každý z nich.

*Řešení.* (a) První derivace $z'^x = 0 + 3[e^x(x^2 + y^2) + e^x \cdot 2x] = 3e^x(x^2 + y^2 + 2x)$,
$z'^y = 0 + 3e^x \cdot 2y = 6e^x y$, a dále jejich hodnoty $k_1 = z'^x(A) = 3$, $k_2 = z'^y(A) = 6$.
Navíc je hodnota $z(A) = 4 + 3e^0 \cdot (0^2 + 1^2) = 7$.

Tečná rovina: $z - 7 = 3(x - 0) + 6(y - 1)$, tj. $z = 3x + 6y + 1$.

Odhad: $f(0.03, 0.99) \doteq f(A) + k_1 \cdot 0.3 + k_2 \cdot (-0.01) = 7 + 0.9 - 0.06 = 7.84$.

(b) K nalezení stacionárních bodů řešíme soustavu dvou rovnic: $z'^x = 0 \ \wedge \ z'^x = 0$, tj. $3e^x(x^2 + y^2 + 2x) = 0 \ \wedge \ 6e^x y = 0$; protože $e^x$ není nikdy rovno nule, máme nakonec $3(x^2 + y^2 + 2x) = 0 \ \wedge \ 6y = 0$. Z druhé rovnice $y = 0$; po substituci do první rovnice máme $x_1 = 0, x_2 = -2$. Existují 2 stacionární body $A_1 = [0, 0]$, $A_2 = [-2, 0]$.

Hesseho matice $H_f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (z'^x)'^x & (z'^x)'^y \\ (z'^y)'^x & (z'^y)'^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^x(x^2+y^2+4x+2) & 6ye^x \\ 6ye^x & 6e^x \end{bmatrix}$.

$H_f(A_1) = \begin{bmatrix} f_{xx}(A_1) & f_{xy}(A_1) \\ f_{yx}(A_1) & f_{yy}(A_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$, $\qquad H_f(A_2) = \begin{bmatrix} f_{xx}(A_2) & f_{xy}(A_2) \\ f_{yx}(A_2) & f_{yy}(A_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6e^{-2} & 0 \\ 0 & 6e^{-2} \end{bmatrix}$.

**Příklad 4.** $P(x, y) = 140x + 200y - 4x^2 + 2xy - 12y^2 - 700$ je zisková funkce malé firmy vyrábějící surfovací prkna ($x$ je počet standardních prken a $y$ počet soutěžních prken vyráběných týdně, $P(x, y)$ je týdenní zisk v \$). Najděte $P_x(15, 10)$ a interpretujte.

*Řešení.* $P_x(x, y) = 140 - 8x + 2y$, $P_x(15, 10) = 40$. Na úrovni produkce 15-ti standardních a 10-ti soutěžních prken týdně zvýšení produkce standardních prken o 1 a udržení produkce soutěžních prken na 10 způsobí vzrůst zisku o přibližně 40 \$. [BaZi, str. 453]

## *SAMPLE EXERCISES*

**Example 1.** Given function of 3 variables $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 + x_2\sqrt{x_3} + \ln(2 - x_2)$.

(a) Show that $A = [1, 3, 4] \notin D(f)$ and $B = [-1, 1, 4] \in D(f)$.

(b) Calculate the values of all first-order partial derivatives of function $F$ at point $B$.

*Solution.* (a) We try to calculate the values of the function at given points:

$F(A) = 1^4 + 3\sqrt{4} + \ln(2-3) = \ldots$ we can't continue because of $\ln(-1) \Rightarrow A \notin D(f)$,

$F(B) = (-1)^4 + 1\sqrt{4} + \ln(2-1) = 1 + 2 + 0 = 3 \Rightarrow B \in D(f)$.

(b) $F'^{x_1} = \left(x_1^4\right)'^{x_1} + 0 + 0 = 4x_1^3$, $\qquad F'^{x_1}(B) = 4(-1)^3 = -4$.

$$F'^{x_2} = 0 + \sqrt{x_3} \cdot x_2'^{x_2} + \frac{1}{2-x_2} \cdot (2-x_2)'^{x_2} = \sqrt{x_3} - \frac{1}{2-x_2}, \qquad F'^{x_2}(B) = \sqrt{4} - \tfrac{1}{2-1} = 1.$$

$$F'^{x_3} = 0 + x_2 \cdot \left[x_3^{1/2}\right]'^{x_3} + 0 = \frac{x_2}{2\sqrt{x_3}}, \qquad F'^{x_3}(B) = \tfrac{1}{2\sqrt{4}} = \tfrac{1}{4}.$$

**Example 2.** For the function $\quad G(p,q) = p^4 + q^2 \ln p \quad$ calculate (a) $\dfrac{\partial^3 G}{\partial p^3}$, $\quad$ (b) $\dfrac{\partial^3 G}{\partial q \partial p^2}$.

*Solution.*

(a) $G'^p = (p^4 + q^2 \ln p)'^p = 4p^3 + q^2 \cdot \frac{1}{p}$, $\qquad G'^{p\prime p} = (G'^p)'^p = (4p^3 + q^2 \cdot p^{-1})'^p = 12p^2 - q^2 \cdot p^{-2}$,

$G'^{p\prime p\prime p} = (G'^{p\prime p})'^p = (12p^2 - q^2 \cdot p^{-2})'^p = 24p + 2q^2 \cdot p^{-3} = 24p + \frac{2q^2}{p^3}$.

(b) We already have $G'^{p\prime p}$; now, $\frac{\partial^3 G}{\partial q \partial p^2} = G'^{p\prime p\prime q} = (12p^2 - q^2 \cdot p^{-2})'^q = -2q \cdot p^{-2} = -\frac{2q}{p^2}$.

**Example 3.** For a bivariate function $f : z = 4 + 3e^x(x^2 + y^2)$ and point $A = [0, 1]$ find

(a) the tangent plane equation at $A$, and estimate $f(0.3, 0.99)$ using the differential at $A$,

(b) the stationary points of $f$, and then the Hesse matrix at each of them.

*Solution.* (a) The first-order derivatives $z'^x = 0 + 3[e^x(x^2+y^2) + e^x \cdot 2x] = 3e^x(x^2 + y^2 + 2x)$, $z'^y = 0 + 3e^x \cdot 2y = 6e^x y$, and further their values $k_1 = z'^x(A) = 3$, $k_2 = z'^y(A) = 6$. Moreover, the value of $z(A) = 4 + 3e^0 \cdot (0^2 + 1^2) = 7$.

The tangent plane: $z - 7 = 3(x - 0) + 6(y - 1)$, i.e. $z = 3x + 6y + 1$.

The estimation: $f(0.03, 0.99) \doteq f(A) + k_1 \cdot 0.3 + k_2 \cdot (-0.01) = 7 + 0.9 - 0.06 = 7.84$.

(b) To find the stationary points we solve a system of 2 equations: $z'^x = 0 \ \wedge \ z'^x = 0$, i.e. $3e^x(x^2 + y^2 + 2x) = 0 \ \wedge \ 6e^x y = 0$; because $e^x$ never equals zero, we finally have $3(x^2 + y^2 + 2x) = 0 \ \wedge \ 6y = 0$. From the second equation $y = 0$; after substitution into the first one we have $x_1 = 0, x_2 = -2$. There are 2 stationary points $A_1 = [0, 0]$, $A_2 = [-2, 0]$.

The Hesse matrix $H_f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (z'^x)'^x & (z'^x)'^y \\ (z'^y)'^x & (z'^y)'^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^x(x^2+y^2+4x+2) & 6ye^x \\ 6ye^x & 6e^x \end{bmatrix}$.

$$H_f(A_1) = \begin{bmatrix} f_{xx}(A_1) & f_{xy}(A_1) \\ f_{yx}(A_1) & f_{yy}(A_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, \qquad H_f(A_2) = \begin{bmatrix} f_{xx}(A_2) & f_{xy}(A_2) \\ f_{yx}(A_2) & f_{yy}(A_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6e^{-2} & 0 \\ 0 & 6e^{-2} \end{bmatrix}.$$

**Example 4.** $P(x, y) = 140x + 200y - 4x^2 + 2xy - 12y^2 - 700$ is the profit function of a small surfboard company ($x$ is the number of standard boards, and $y$ the number of competition boards produced weekly, $P(x, y)$ is the weekly profit in \$). Find $P_x(15, 10)$ and interpret.

*Solution.* $P_x(x, y) = 140 - 8x + 2y$, $P_x(15, 10) = 40$. At a production level of 15 standard and 10 competition boards per week, increasing the production of standard boards by 1 and holding the production of competition boards fixed at 10 will increase the profit by approx. \$40. [BaZi, pg. 453]

## *ÚLOHY K ŘEŠENÍ*

**Úloha 11.A.1.** Určete zda bod **patří** do definičního oboru funkce 3 proměnných - pište "ANO" nebo "NE" do políček.

| | $[0,0,0]$ | $[-1,-5,10]$ | $[1,2,0]$ | $[-2,1,1]$ | $[1,0,1]$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y = 2x_1 - x_2 + \sqrt{x_3 - 1}$ | | | | | |
| $y = \ln(x_1 + x_2 + x_3)$ | | | | | |
| $y = x_1^{-1} + x_2^{-1} + \ln x_3$ | | | | | |

**Úloha 11.A.2.** Pro každou ze zadaných funkcí udejte její Hesseho matici.

(a) $z = x^2 - y^3$, (b) $z = \ln(x - y)$, (c) $f(u,v,w) = uw^3 + \sqrt{2v}$,

(d) $z = x \cdot \ln(xy)$, (e) $f(u,v,w) = e^{u^2+vw}$, (f) $f(u,v,w) = \cos(u-v+w)$.

**Úloha 11.A.3.** Pro $F(p,q,r) = q^3 - \dfrac{p^2}{q} + pqr^2$ vypočtěte hodnoty parciálních derivací třetího řádu.

(a) $\dfrac{\partial^3 F}{\partial q^3}(2,-1,1)$, (b) $\dfrac{\partial^3 F}{\partial q^2 \partial p}(1,-1,2)$, (c) $\dfrac{\partial^3 F}{\partial q \partial p \partial r}(-1,1,2)$.

**Úloha 11.A.4.** Udejte tečnou rovinu grafu funkce $z = g(x,y)$ v bodě $A$.

(a) $z = x^2 + y^3$, $A = [-1,1]$, (b) $z = \sqrt{x - y}$, $A = [10,1]$,

(c) $z = e^{xy}$, $A = [0,1]$, (d) $z = \ln(3x + 2y)$, $A = [1,-1]$.

**Úloha 11.A.5.** Užijte diferenciál funkce $f$ v bodě $A$ k aproximaci hodnoty $f(X)$.

(a) $f(x_1,x_2) = x_1^3\sqrt{x_2}$, $A = [5,1]$, $X = [5.11, 0.9]$,

(b) $f(x_1,x_2,x_3) = \ln x_1 + \dfrac{x_1 x_2}{x_3}$, $A = [1,4,-1]$, $X = [0.9, 4.3, -1.02]$,

(c) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \sqrt{x_1} + \dfrac{x_3 + x_4}{x_2^2}$, $A = [9,1,-1,4]$, $X = [8.7, 0.93, -1.02, 4.012]$.

**Úloha 11.A.6.** Najděte stacionární body daných funkcí. Pak pro každý z nich vypočtěte hodnotu determinantu Hesseho matice.

(a) $f(p,q) = -p^2 + pq - q^2 + 6p$, (b) $z = x^3 - 3x + y^2$, (c) $z = \ln(x^2 + y^2 + 1)$,

(d) $f(u,v,w) = u^2 - v^2 + w^2 + 2uv - 3v$, (e) $z = e^{x^2 - y^2}$, (f) $z = x^2 - 8xy + y^2 + x$.

**Úloha 11.A.7.** V příkladu 5 (předchozí strana) najděte $P_x(30,10)$, $P_y(25,10)$, $P_y(25,15)$ a interpretujte.

## *PROBLEMS TO SOLVE*

**Exercise 11.A.1.** Determine whether a point **belongs** into the domain of the function of 3 variables - write "YES" or "NO" in the boxes.

| | $[0,0,0]$ | $[-1,-5,10]$ | $[1,2,0]$ | $[-2,1,1]$ | $[1,0,1]$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y = 2x_1 - x_2 + \sqrt{x_3 - 1}$ | | | | | |
| $y = \ln(x_1 + x_2 + x_3)$ | | | | | |
| $y = x_1^{-1} + x_2^{-1} + \ln x_3$ | | | | | |

**Exercise 11.A.2.** For each of the functions give its Hesse matrix.

(a) $z = x^2 - y^3$, (b) $z = \ln(x - y)$, (c) $f(u, v, w) = uw^3 + \sqrt{2v}$,

(d) $z = x \cdot \ln(xy)$, (e) $f(u, v, w) = e^{u^2+vw}$, (f) $f(u, v, w) = \cos(u-v+w)$.

**Exercise 11.A.3.** For $F(p, q, r) = q^3 - \dfrac{p^2}{q} + pqr^2$ calculate the values of third-order partials.

(a) $\dfrac{\partial^3 F}{\partial q^3}(2, -1, 1)$, (b) $\dfrac{\partial^3 F}{\partial q^2 \partial p}(1, -1, 2)$, (c) $\dfrac{\partial^3 F}{\partial q \partial p \partial r}(-1, 1, 2)$.

**Exercise 11.A.4.** Give the tangent plane of the graph of function $z = g(x, y)$ at point $A$.

(a) $z = x^2 + y^3$, $A = [-1, 1]$, (b) $z = \sqrt{x - y}$, $A = [10, 1]$.

(c) $z = e^{xy}$, $A = [0, 1]$, (d) $z = \ln(3x + 2y)$, $A = [1, -1]$.

**Exercise 11.A.5.** Use differential of $f$ at point $A$ to approximate the value of $f(X)$.

(a) $f(x_1, x_2) = x_1^3\sqrt{x_2}$, $A = [5, 1]$, $X = [5.11, 0.9]$,

(b) $f(x_1, x_2, x_3) = \ln x_1 + \dfrac{x_1 x_2}{x_3}$, $A = [1, 4, -1]$, $X = [0.9, 4.3, -1.02]$,

(c) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sqrt{x_1} + \dfrac{x_3 + x_4}{x_2^2}$, $A = [9, 1, -1, 4]$, $X = [8.7, 0.93, -1.02, 4.012]$.

**Exercise 11.A.6.** For the given functions, find their stationary points. Then, for each stationary point, calculate the value of determinat of the Hesse matrix.

(a) $f(p, q) = -p^2 + pq - q^2 + 6p$, (b) $z = x^3 - 3x + y^2$, (c) $z = \ln(x^2 + y^2 + 1)$,

(d) $f(u, v, w) = u^2 - v^2 + w^2 + 2uv - 3v$, (e) $z = e^{x^2-y^2}$, (f) $z = x^2 - 8xy + y^2 + x$.

**Exercise 11.A.7.** In Example 5 (the previous page), find $P_x(30, 10)$, $P_y(25, 10)$, $P_y(25, 15)$ and interpret.

## Minitest MT11.A

**1.** Dána funkce $f(x,y,z) = x^2 + y^3 + 2z^2$.
Porovnejte hodnoty $P = f(1,-1,0)$, $Q = f(1,-1,1)$ a $R = f(1,1,-1)$.

**(A)** $P < Q < R$ **(B)** $P < R < Q$ **(C)** $R < Q < P$ **(D)** $Q < R < P$)
**(E)** žádný z uvedených vztahů není správný.

**2.** Dáno $g(x_1,x_2) = \sqrt{8 - x_1^3 - x_2^2}$. Kolik z bodů $A_1 = [-2,1]$, $A_2 = [-1,3]$, $A_3 = [2,-1]$, $A_4 = [2,-2]$ patří do definičního oboru funkce $g$?

**(A)** 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4.

**3.** Který z následujících bodů je stacionární bod funkce $z = e^x(x + y^2)$?

**(A)** $[0,-1]$ **(B)** $[0,1]$ **(C)** $[1,0]$ **(D)** $[-1,0]$ **(E)** žádný.

**4.** Dána funkce $f(x_1,x_2) = \ln(x_1 - x_2)$. Najděte hodnotu $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(2,1)$.

**(A)** 0 **( B)** 1 **(C)** $-1$ **(D)** 2 **(E)** $-2$

**5.** Udejte rovnici tečné roviny grafu funkce $z = -x^2 + 2x - y^2 + 6y - 5$ v bodě $A = [2,0]$.

**(A)** $z = 2x + 6y - 9$ **(B)** $z = -2x + 6y - 1$ **(C)** $z = -2x - 6y - 1$
**(D)** $z = 2x - 6y - 9$ **(E)** jiný výsledek.

**6.** Užijte diferenciál v bodě $A = [8,1,-1]$ k aproximaci hodnoty $f(8.4, 0.98, -1.11)$, je-li $f(x,y,z) = x \cdot \ln y + 9 \cdot \sqrt[3]{x} - 2z^{15}$

**(A)** 23.41 **(B)** 23.42 **(C)** 23.43 **(D)** 23.44 **(E)** jiný výsledek.

**7.** Determinant Hesseho matice funkce $f(p,q) = p^3 - 3pq + 2q^2$ je

**(A)** $24p - 9$ **(B)** $24p + 9$ **(C)** $24p$ **(D)** 0 **(E)** jiný výsledek.

**8.** Produktivita v jedné zemi třetího světa je dána přibližně funkcí $f(x,y) = 10x^{0.75}y^{0.25}$, s využitím $x$ jednotek práce a $y$ jednotek kapitálu. Jestliže v současnosti tato země využívá 600 jednotek práce a 80 jednotek kapitálu, najděte marginální produktivitu kapitálu (zaokrouhlete na 1 desetinné místo). [BaZi, str. 469]

**(A)** 4.5 **(B)** 9.4 **(C)** 11.3 **(D)** 15.2 **(E)** jiný výsledek.

## Minitest MT11.A

**1.** Given function $f(x,y,z) = x^2 + y^3 + 2z^2$.
Compare the values of $P = f(1,-1,0)$, $Q = f(1,-1,1)$, and $R = f(1,1,-1)$.

**(A)** $P < Q < R$ **(B)** $P < R < Q$ **(C)** $R < Q < P$ **(D)** $Q < R < P$)
**(E)** none of the above is correct.

**2.** Given $g(x_1,x_2) = \sqrt{8 - x_1^3 - x_2^2}$. How many of points $A_1 = [-2,1]$, $A_2 = [-1,3]$, $A_3 = [2,-1]$, $A_4 = [2,-2]$ belong to the domain of $g$?

**(A)** 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4.

**3.** Which of the following points is a stationary point of function $z = e^x(x + y^2)$?

**(A)** $[0,-1]$ **(B)** $[0,1]$ **(C)** $[1,0]$ **(D)** $[-1,0]$ **(E)** none of the above.

**4.** Given function $f(x_1,x_2) = \ln(x_1 - x_2)$. Find the value of $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(2,1)$.

**(A)** 0 **( B)** 1 **(C)** $-1$ **(D)** 2 **(E)** $-2$.

**5.** Give the tangent plane equation of the graph of $z = -x^2 + 2x - y^2 + 6y - 5$ at point $A = [2,0]$.

**(A)** $z = 2x + 6y - 9$ **(B)** $z = -2x + 6y - 1$ **(C)** $z = -2x - 6y - 1$
**(D)** $z = 2x - 6y - 9$ **(E)** none of the above.

**6.** Use the total differential at $A = [8,1,-1]$ to approximate the value of $f(8.4, 0.98, -1.11)$ if $f(x,y,z) = x \cdot \ln y + 9 \cdot \sqrt[3]{x} - 2z^{15}$

**(A)** 23.41 **(B)** 23.42 **(C)** 23.43 **(D)** 23.44 **(E)** none of the above.

**7.** The determinant of the Hesse matrix of function $f(p,q) = p^3 - 3pq + 2q^2$ is

**(A)** $24p - 9$ **(B)** $24p + 9$ **(C)** $24p$ **(D)** 0 **(E)** none of the above.

**8.** The productivity of a third-world country is given approximately by the function $f(x,y) = 10x^{0.75}y^{0.25}$ with utilization of $x$ units of labor and $y$ units of capital.
If the country is now using 600 units of labor and 80 units of capital, find the marginal productivity of capital (round to one decimal place). [BaZi, pg. 469]

**(A)** 4.5 **(B)** 9.4 **(C)** 11.3 **(D)** 15.2 **(E)** none of the above.

# TÉMA 11.B Extrémy funkcí více proměnných

Níže u funkcí $n$ proměnných $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ předpokládáme, že mají spojité parciální derivace druhého řádu v každém bodě, o nějž se zajímáme (např. elementární funkce).

$H_{f,k} = (h_{ij})_{i=1}^{k}\,_{j=1}^{k}$   $k$-tá hlavní submatice Hesseho matice funkce $f$

$H_{f,k}(A) = (h_{ij}(A))_{i=1}^{k}\,_{j=1}^{k}$   $k$-tá hlavní submatice Hesseho matice $H_f$ v bodě $A$

$\Delta_k(A) = \det H_{f,k}(A)$   $k$-tý hlavní minor Hesseho matice $H_f$ v bodě $A$

• *Poznámka:* $H_{f,k}$ je čtvercová submatice matice $H_f$ řádu $k$ v jejím levém horním rohu; speciálně $H_{f,1} = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1} \end{bmatrix}$, $H_{f,2} = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} \end{bmatrix}$, $H_{f,3} = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & f_{x_1x_3} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & f_{x_2x_3} \\ f_{x_3x_1} & f_{x_3x_2} & f_{x_3x_3} \end{bmatrix}$, atd.

## *Lokální extrémy funkce $n$ proměnných $y = f(x_1, \ldots, x_n)$*

*Nutná podmínka* pro lokální extrém v bodě $A$:

$f'^{x_1}(A) = 0 \;\wedge\; f'^{x_2}(A) = 0 \;\wedge\; \ldots \;\wedge f'^{x_n}(A) = 0$, tj. $A$ je stacionární bod funkce $f$.

*Postačující podmínka* pro lokální extrém v bodě $A$:

$[\Delta_k(A) > 0$ pro každé $k \leq n$ sudé$] \;\wedge\; [\Delta_k(A) < 0$ pro každé $k \leq n$ liché$] \Rightarrow$ lok. max.

$[\Delta_k(A) > 0$ pro každé $k \leq n$ sudé$] \;\wedge\; [\Delta_k(A) > 0$ pro každé $k \leq n$ liché$] \Rightarrow$ lok. min.

• *Poznámka:* Pro lokální extrém funkce $f$ v $A$ musí být splněna <u>nutná</u> podmínka; není-li splněna podmínka <u>postačující</u>, funkce přesto může mít lokální extrém v $A$.

## *Vyhodnocení stacionárního bodu $A$ funkce 2 proměnných $z=f(x,y)$*

$\Delta_2(A) = \det H_f(A) > 0 \;\wedge\; \Delta_1(A) = f''^{x}(A) < 0 \quad \Rightarrow\; f$ má lokální maximum v $A$.

$\Delta_2(A) = \det H_f(A) > 0 \;\wedge\; \Delta_1(A) = f''^{x}(A) > 0 \quad \Rightarrow\; f$ má lokální minimum v $A$.

$\Delta_2(A) = \det H_f(A) < 0 \quad \Rightarrow\; f$ má sedlový bod v $A$.

$\det H_f(A) = 0 \quad \Rightarrow\; f$ může mít lokální max., lokální min. nebo sedlový bod v $A$.

## *Lokální extrémy funkce 2 proměnných $z = f(x,y)$ vzhledem k vazbové podmínce $g(x,y) = 0$* (rovnice $g(x,y)=0$ definuje křivku v rovině $xy$)

**Metoda přímá:** Z rovnice $g(x,y) = 0$ získáme $y = \phi(x)$ [nebo $x = \psi(y)$], pak zkoumáme lok. extrémy funkce 1 proměnné $\Phi(x) = f(x, \phi(x))$ [nebo $\Psi(y) = f(\psi(y), y)$].

**Metoda Lagrangeova multiplikátoru:** $L(x,y) = f(x,y) + \lambda \cdot g(x,y)$ je **Lagrangeova funkce**. Nejdřív řešíme soustavu $L'^{x} = 0 \;\wedge\; L'^{y} = 0 \;\wedge\; g(x,y) = 0$ o neznámých $x, y, \lambda$. Pro každé řešení $[x_i, y_i, \lambda_i]$ buď $A_i = [x_i, y_i]$. Pak pro každý **Lagrangeův multiplikátor** $\lambda_i$ hodnotíme stacionární bod $A_i$ funkce 2 proměnných $L_i(x,y) = f(x,y) + \lambda_i \cdot g(x,y)$.

• *Poznámka:* Je-li $g'^{x}(A)=0 \;\wedge\; g'^{y}(A)=0$, nelze v $A$ použít Lagrangeovu metodu.

## *Absolutní extrémy funkce 2 proměnných $z=f(x,y)$ spojité na kompaktní oblasti $\mathcal{K}$* ($g_j(x,y)=0$ jsou hraniční křivky oblasti $\mathcal{K}$ s koncovými body $C_1, C_2, \ldots$)

Podle **Weierstrassovy věty** má taková funkce absolutní maximum a absolutní minimum na $\mathcal{K}$. Tato lze najít vyhodnocením funkce $f$ v následujících bodech:

$A_i \ldots$ stacionární body funkce $f$, které patří do $\mathcal{K}$ (tj. $A_i \in \mathcal{K}$),

$B_i \ldots$ ke každé podmínce $g_j$ body v $\mathcal{K}$, kde jsou lok. extrémy $f$ vzhledem ke $g_j(x,y)=0$,

$C_i \ldots$ koncové body všech hraničních křivek v $\mathcal{K}$ (tj. $C_i \in \mathcal{K}$).

# TOPIC 11.B The Extrema of Multivariate Functions

Below, the $n$-variable functions $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ used are supposed to have their second-order partials continuous at each point of the interest (e.g. elementary functions).

| | |
|---|---|
| $H_{f,k} = (h_{ij})_{i=1}^{k}\,_{j=1}^{k}$ | the $k$-th principal submatrix of the Hesse matrix $H_f$ |
| $H_{f,k}(A) = (h_{ij}(A))_{i=1}^{k}\,_{j=1}^{k}$ | the $k$-th principal submatrix of $H_f$ at point $A$ |
| $\Delta_k(A) = \det H_{f,k}(A)$ | the $k$-th principal minor of $H_f$ at point $A$ |

• *Note:* $H_{f,k}$ is the upper-left-corner $k \times k$ square submatrix of the Hesse matrix $H_f$;

especially, $H_{f,1} = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1} \end{bmatrix}$, $H_{f,2} = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} \end{bmatrix}$, $H_{f,3} = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & f_{x_1x_3} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & f_{x_2x_3} \\ f_{x_3x_1} & f_{x_3x_2} & f_{x_3x_3} \end{bmatrix}$, etc.

## *The local (relative) extrema of an $n$-variable function $y = f(x_1, \ldots, x_n)$*

*The necessary condition* for a local extremum at $A$:

$f'^{x_1}(A) = 0 \;\wedge\; f'^{x_2}(A) = 0 \;\wedge\; \ldots \;\wedge f'^{x_n}(A) = 0$, i.e. $A$ is a stationary point of $f$.

*The sufficient condition* for a local extremum at $A$:

$[\Delta_k(A) > 0$ for every $k \leq n$ even$] \;\wedge\; [\Delta_k(A) < 0$ for every $k \leq n$ odd$] \Rightarrow$ local max.

$[\Delta_k(A) > 0$ for every $k \leq n$ even$] \;\wedge\; [\Delta_k(A) > 0$ for every $k \leq n$ odd$] \Rightarrow$ local min.

• *Note:* For a local extremum of $f$ at $A$ the necessary condition must be satisfied; if the sufficient condition isn't satisfied yet the function can have an extremum at $A$.

## *Classification of a stationary point $A$ of function of 2 variables $z=f(x,y)$*

$\Delta_2(A)= \det H_f(A) > 0 \;\wedge\; \Delta_1(A)=f''^{x}(A) < 0 \quad \Rightarrow$ $f$ has a local maximum at $A$.

$\Delta_2(A)= \det H_f(A) > 0 \;\wedge\; \Delta_1(A)=f''^{x}(A) > 0 \quad \Rightarrow$ $f$ has a local minimum at $A$.

$\Delta_2(A)= \det H_f(A) < 0 \quad \Rightarrow$ $f$ has a saddle point at $A$.

$\det H_f(A) = 0 \quad \Rightarrow$ $f$ may have a local max., a local min., or a saddle point at $A$.

## *The local (relative) extrema of a 2-variable function $z = f(x, y)$ subject to the constraint $g(x, y) = 0$* (the equation $g(x,y)=0$ defines a curve in the $xy$-plane.)

**The direct method:** From $g(x, y) = 0$ get $y = \phi(x)$ [or $x = \psi(y)$], and then investigate the local extrema of univariate function $\Phi(x) = f(x, \phi(x))$ [or $\Psi(y) = f(\psi(y), y)$].

**The Lagrange Multiplier Method:** $L(x, y) = f(x, y) + \lambda \cdot g(x, y)$ is **the Lagrange function**. First, solve the system $L'^{x} = 0 \;\wedge\; L'^{y} = 0 \;\wedge\; g(x, y) = 0$ for $x, y, \lambda$.
For each solution $[x_i, y_i, \lambda_i]$ let $A_i = [x_i, y_i]$. Now, for each **Lagrange multiplier** $\lambda_i$ classify the stationary point $A_i$ of 2-variable function $L_i(x, y) = f(x, y) + \lambda_i \cdot g(x, y)$.

• *Note:* If $g'^{x}(A)=0 \wedge g'^{y}(A)=0$ then the Lagrange method can not be used for $A$.

## *The absolute extrema of a 2-variable function $z=f(x, y)$ continuous on a compact region $\mathcal{K}$* ($g_j(x,y)=0$ are boundary curves of $\mathcal{K}$ with endpoints $C_1, C_2, \ldots$)

According to **the Weierstrass' theorem** such a function has its absolute maximum and absolute minimum on $\mathcal{K}$. These can be found when evaluating $f$ at the following points:

$A_i \ldots$ stationary points of $f$ which belong to $\mathcal{K}$, (i.e. $A_i \in \mathcal{K}$),
$B_i \ldots$ local extrema points of $f$ subject to each constraint $g_j(x, y)=0$ belonging to $\mathcal{K}$,
$C_i \ldots$ endpoints of all boundary curves belonging to $\mathcal{K}$ (i.e. $C_i \in \mathcal{K}$).

## *ŘEŠENÉ PŘÍKLADY*

**Příklad 1.** Najděte lokální extrémy funkce $F(a,b,c) = a^3 - 3a^2 + b^2 - 2bc + 4c^2 + 6b + 2$.

*Řešení.* $F'^a = 3a^2 - 6a = 0 \ \wedge \ F'^b = 2b - 2c + 6 = 0 \ \wedge \ F'^c = -2b + 8c = 0 \ \Rightarrow$
$\Rightarrow \ A_1 = [2, -4, -1]$, $A_2 = [0, -4, -1]$. Našli jsme stacionární body funkce $F$.

$$H_F = \begin{bmatrix} 6a{-}6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 8 \end{bmatrix},\ H_F(A_1) = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 8 \end{bmatrix},\ H_F(A_2) = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Bod $A_1 = [2,-4,-1]$ : $\Delta_1(A_1) = 6,\ \Delta_2(A_1) = 12, \Delta_3(A_1) = 72 \Rightarrow$ lokál. max. v $A_1$.
Bod $A_2 = [0,-4,-1]$ : $\Delta_1(A_2) = -6, \Delta_2(A_2) = -12, \Delta_3(A_2) = -72 \Rightarrow$ neumíme určit.

**Příklad 2.** Vyhodnoťte stacionární body funkce $f(x,y) = x^4 + 12xy + 2y^2$.

*Řešení.* $f'^x = 4x^3 + 12y = 0 \ \wedge \ f'^y = 12x + 4y = 0 \ \Rightarrow \ A_1 = [0,0]$, $A_{2,3} = [\pm 3, \mp 9]$.

$$H_f = \begin{bmatrix} 12x^2 & 12 \\ 12 & 4 \end{bmatrix},\quad H_f(A_1) = \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 4 \end{bmatrix},\quad H_f(A_2) = H_f(A_3) = \begin{bmatrix} 108 & 12 \\ 12 & 4 \end{bmatrix}.$$

Bod $A_1 = [0,0]$ : $\Delta_2(A_1) = -144 \Rightarrow$ sedlový bod,
Body $A_{2,3} = [\pm 3, \mp 9]$ : $\Delta_2(A_{2,3}) = 288 \ \wedge \ \Delta_1(A_{2,3}) = 108 > 0 \Rightarrow$ oba lok. minima.

**Příklad 3.** Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = 12x - 2y - 7$ vzhledem k podmínce
(a) $y = x^2$, tj. $g(x,y) = y{-}x^2 = 0$, (b) $x^2 + 13y^2 = 1$, tj. $g(x,y) = x^2{+}13y^2{-}1 = 0$.

*Řešení.* (a) Užijeme přímou metodu, tj. položíme přímo $y = \phi(x) = x^2$ v předpise $f(x,y)$: $\Phi(x) = f(x,\phi(x)) = 12x - 2\cdot(x^2) - 7 = -2x^2 + 12x - 7$. Funkce 1 proměnné $\Phi(x)$ má jeden stacionární bod $x_1 = 3$. Užitím druhé derivace zjistíme, že $\Phi(x)$ má lokální maximum v $x_1$. Nyní $y_1 = \phi(x_1) = x_1^2 = 9$ a konečně $f(x_1, y_1) = 12\cdot 3 - 2\cdot 9 - 7 = 11$.
Funkce $f$ má lok. maximum vzhledem k podmínce $g$ v $B = [3,9]$ s hodnotou $f(B) = 11$.

(b) Užijeme Lagrangeův multiplikátor pro $L(x,y) = 12x{-}2y{-}7 + \lambda(x^2{+}13y^2{-}1)$,

$L'^x{=}12 + 2x\lambda,\ L'^y{=} - 2 + 2y\lambda,\quad L''^x{=}2\lambda,\ L''^y{=}2\lambda,\ L'^{x'y}{=}L'^{y'x}{=}0,\quad H_L{=}\begin{bmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{bmatrix}.$

Podmínky jsou: $12 + 2x\lambda = 0 \ \wedge \ -2 + 2y\lambda = 0 \ \wedge \ x^2 + 13y^2 - 1 = 0$.
Z prvních dvou podmínek máme $x = \frac{-6}{\lambda} \wedge y = \frac{1}{\lambda}$, což užijeme ve třetí rovnici:
$\frac{36}{\lambda^2} + \frac{13}{\lambda^2}{=}1 \Rightarrow \ 49{=}\lambda^2 \Rightarrow \lambda_1{=}7, \lambda_2{=} - 7$ (dvě možné hodnoty Lagrangeova multiplikátoru).

$\lambda_1{=}7 \ \Rightarrow \ x_1{=}\frac{-6}{7},\ y_1{=}\frac{1}{7},\ H_L{=}\begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 14 \end{bmatrix},\quad \lambda_2{=} - 7 \Rightarrow x_1{=}\frac{6}{7},\ y_1{=}\frac{-1}{7},\ H_L{=}\begin{bmatrix} -14 & 0 \\ 0 & -14 \end{bmatrix}.$

*Odpověď.* Podmíněné lok. minimum funkce $f$ je v $B_1{=}[\frac{-6}{7}, \frac{1}{7}]$ s hodnotou $f(B_1){=}\frac{-123}{7}$ a podmíněné lok. maximum funkce $f$ je v $B_2{=}[\frac{6}{7}, \frac{-1}{7}]$ s hodnotou $f(B_2){=}\frac{25}{7}$.

**Příklad 4.** Najděte absolutní extrémy funkce $f(x,y) = 2x^2 - xy + 2y^2 - 2x + y$ na kompaktním trojúhelníku $\mathcal{K}$ s vrcholy $C_1 = [0,0]$, $C_2 = [2,0]$, $C_3 = [0,4]$.

*Řešení.* Stac. body pro $f$: $f'^x = 4x - y - 2 = 0 \wedge f'^x = -x + 4y + 1 = 0 \Rightarrow A{=}[\frac{7}{15}, \frac{-2}{15}] \notin \mathcal{K}$.
Pro 3 křivky stran (přímky) oblasti $\mathcal{K}$ najdeme vázané stacionární body (metoda přímá):
pro $g_1(x,y){=}x{=}0$ (přímka horizontální strany) máme $\Psi(y) = 2y^2 + y \Rightarrow B_1{=}[0, \frac{-1}{4}] \notin \mathcal{K}$,
pro $g_2(x,y){=}y{=}0$ (přímka vertikální strany) máme $\Phi(x) = 2x^2 - 2x \Rightarrow B_2{=}[\frac{1}{2}, 0] \in \mathcal{K}$,
pro $g_3(x,y){=}2x - y - 4{=}0$ (přímka šikmé strany) $\Phi(x) = 12x^2{-}40x{+}36 \Rightarrow B_3{=}[\frac{5}{3}, \frac{2}{3}] \in \mathcal{K}$.

Absolutní minimum funkce $f$ na $\mathcal{K}$ je $f(B_2) = -\frac{1}{2}$
a absolutní maximum funkce $f$ na $\mathcal{K}$ je $f(C_3) = 36$.

| $X$ | $B_2$ | $B_3$ | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(X)$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{24}{9}$ | 0 | 4 | 36 |

## *SAMPLE EXERCISES*

**Example 1.** Find the local extrema of $F(a,b,c) = a^3 - 3a^2 + b^2 - 2bc + 4c^2 + 6b + 2$.

*Solution.* $F'^a = 3a^2 - 6a = 0 \ \wedge \ F'^b = 2b - 2c + 6 = 0 \ \wedge \ F'^c = -2b + 8c = 0 \ \Rightarrow$
$\Rightarrow \ A_1 = [2,-4,-1], \ A_2 = [0,-4,-1]$. We have found two stationary points of $F$.

$$H_F = \begin{bmatrix} 6a-6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 8 \end{bmatrix}, \ H_F(A_1) = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 8 \end{bmatrix}, \ H_F(A_2) = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Point $A_1 = [2,-4,-1]: \ \Delta_1(A_1) = 6, \ \Delta_2(A_1) = 12, \Delta_3(A_1) = 72 \Rightarrow$ a local max. at $A_1$.
Point $A_2 = [0,-4,-1]: \ \Delta_1(A_2) = -6, \ \Delta_2(A_2) = -12, \Delta_3(A_2) = -72 \Rightarrow$ we can't decide.

**Example 2.** Classify the stationary points of the function $f(x,y) = x^4 + 12xy + 2y^2$.

*Solution.* $f'^x = 4x^3 + 12y = 0 \ \wedge \ f'^y = 12x + 4y = 0 \ \Rightarrow \ A_1 = [0,0], A_{2,3} = [\pm 3, \mp 9]$.

$$H_f = \begin{bmatrix} 12x^2 & 12 \\ 12 & 4 \end{bmatrix}, \quad H_f(A_1) = \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 4 \end{bmatrix}, \quad H_f(A_2) = H_f(A_3) = \begin{bmatrix} 108 & 12 \\ 12 & 4 \end{bmatrix}.$$

Point $A_1 = [0,0]: \ \Delta_2(A_1) = -144 \Rightarrow$ a saddle point,
Points $A_{2,3} = [\pm 3, \mp 9]: \ \Delta_2(A_{2,3}) = 288 \ \wedge \ \Delta_1(A_{2,3}) = 108 > 0 \Rightarrow$ both local minima.

**Example 3.** Find the local extrema of $f(x,y) = 12x - 2y - 7$ subject to the constraint
(a) $y = x^2$, i.e. $g(x,y) = y - x^2 = 0$, (b) $x^2 + 13y^2 = 1$, i.e. $g(x,y) = x^2 + 13y^2 - 1 = 0$.

*Solution.* (a) We use the direct method, i.e. we put directly $y = \phi(x) = x^2$ in $f(x,y)$: $\Phi(x) = f(x,\phi(x)) = 12x - 2\cdot(x^2) - 7 = -2x^2 + 12x - 7$. The 1-variable function $\Phi(x)$ has one stationary point $x_1 = 3$. Using the second deriative test we find out that $\Phi(x)$ has a local maximum at $x_1$. Now, $y_1 = \phi(x_1) = x_1^2 = 9$ and, finally, $f(x_1,y_1) = 12\cdot 3 - 2\cdot 9 - 7 = 11$. The function $f$ has a local max. subject to the constraint $g$ at $B = [3,9]$ with $f(B) = 11$.

(b) We use the Lagrange multiplier method with $L(x,y) = 12x - 2y - 7 + \lambda(x^2 + 13y^2 - 1)$,

$$L'^x = 12 + 2x\lambda, \ L'^y = -2 + 2y\lambda, \quad L''^x = 2\lambda, \ L''^y = 2\lambda, \ L'^{x'y} = L'^{y'x} = 0, \quad H_L = \begin{bmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{bmatrix}.$$

The conditions are: $12 + 2x\lambda = 0 \ \wedge \ -2 + 2y\lambda = 0 \ \wedge \ x^2 + 13y^2 - 1 = 0$.
From the first two conditions we have $x = \frac{-6}{\lambda} \wedge y = \frac{1}{\lambda}$ which we use in the third equation:
$\frac{36}{\lambda^2} + \frac{13}{\lambda^2} = 1 \Rightarrow \ 49 = \lambda^2 \Rightarrow \lambda_1 = 7, \lambda_2 = -7$ (two possible values of the Lagrange multiplier).

$$\lambda_1 = 7 \ \Rightarrow \ x_1 = \tfrac{-6}{7}, \ y_1 = \tfrac{1}{7}, \ H_L = \begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 14 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = -7 \Rightarrow \ x_1 = \tfrac{6}{7}, \ y_1 = \tfrac{-1}{7}, \ H_L = \begin{bmatrix} -14 & 0 \\ 0 & -14 \end{bmatrix}.$$

*Answer.* The constrained local minimum of $f$ is at $B_1 = [\frac{-6}{7}, \frac{1}{7}]$ with $f(B_1) = \frac{-123}{7}$, and the constrained local maximum of $f$ is at $B_2 = [\frac{6}{7}, \frac{-1}{7}]$ with $f(B_2) = \frac{25}{7}$.

**Example 4.** Find the absolute extrema of $f(x,y) = 2x^2 - xy + 2y^2 - 2x + y$ on the compact triangle $\mathcal{K}$ with vertices $C_1 = [0,0]$, $C_2 = [2,0]$, $C_3 = [0,4]$.

*Solution.* Stat. points of $f$: $f'^x = 4x - y - 2 = 0 \wedge f'^x = -x + 4y + 1 = 0 \Rightarrow A = [\frac{7}{15}, \frac{-2}{15}] \notin \mathcal{K}$.
For 3 side curves (lines) of $\mathcal{K}$ we find the constrained stationary points (the direct method):
for $g_1(x,y) = x = 0$ (the horizontal side line) we have $\Psi(y) = 2y^2 + y \Rightarrow B_1 = [0, \frac{-1}{4}] \notin \mathcal{K}$,
for $g_2(x,y) = y = 0$ (the vertical side line) we have $\Phi(x) = 2x^2 - 2x \Rightarrow B_2 = [\frac{1}{2}, 0] \in \mathcal{K}$,
for $g_3(x,y) = 2x - y - 4 = 0$ (the oblique side line) $\Phi(x) = 12x^2 - 40x + 36 \Rightarrow B_3 = [\frac{5}{3}, \frac{2}{3}] \in \mathcal{K}$.

The absolute minimum of $f$ on $\mathcal{K}$ is $f(B_2) = -\frac{1}{2}$
and the absolute maximum of $f$ on $\mathcal{K}$ is $f(C_3) = 36$.

| $X$ | $B_2$ | $B_3$ | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(X)$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{24}{9}$ | 0 | 4 | 36 |

## *ÚLOHY K ŘEŠENÍ*

**Úloha 11.B.1.** Najděte lokální extrémy funkcí více proměnných

(a) $f(p,q,r) = p^2 + q^2 + r^2 - pq + qr + 2r$, (b) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1^3 + 3x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$,

(c) $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_1 + 2x_3$, (d) $f(a,b,c,d) = a^2 + b^2 + c^3 - 3c + d^3 - 6d^2$.

**Úloha 11.B.2.** Pro dané funkce najděte stacionární body a vyhodnoťte je.

(a) $f(p,q) = -p^2 + pq - q^2 + 6p$, (b) $z = x^3 - 3x + y^2$, (c) $z = \ln(x^2 + y^2 + 1)$,

(d) $f(u,v) = u^2 - v^2 + 2uv - 3v$, (e) $z = e^{-x^2 - y^2}$, (f) $z = x^3 - 3x + y^3 + 3y^2$.

**Úloha 11.B.3.** Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y)$ vzhledem k vazbové podmínce $g(x,y) = 0$. Užijte přímou metodu.

(a) $f(x,y) = x^2 - y^2 + 8x - 1$, $g(x,y) = x - 5$,

(b) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 8x - 13$, $g(x,y) = y - 5$,

(c) $f(x,y) = x^2 - 2y^2 + 8x$, $g(x,y) = x + y - 5$,

(d) $f(x,y) = x^2 - xy - 2y + 3$, $g(x,y) = 2x^2 - y$.

**Úloha 11.B.4.** Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y)$ vzhledem k vazbové podmínce $g(x,y) = 0$. Užijte metodu Langrangeova multiplikátoru.

(a) $f(x,y) = x - y$, $g(x,y) = x^2 + y^2 - 2$,

(b) $f(x,y) = 2x + 4y + 5$, $g(x,y) = 2x^2 + y^2 - \dfrac{1}{2}$,

(c) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 2y$, $g(x,y) = x + y - 1$,

(d) $f(x,y) = \ln(xy)$, $g(x,y) = x^2 + y^2 - 2$.

**Úloha 11.B.5.** Najděte absolutní extrémy na kompaktní oblasti $\mathcal{K}$.

(a) $f(x,y) = x^3 + 3xy - y^3$, $\mathcal{K}$: kompaktní $\triangle$ s vrcholy $[1,2], [1,-2], [-1,-2]$,

(b) $f(x,y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$, $\mathcal{K}$: kompaktní $\triangle$ s vrcholy $[-1,-1], [7,-1], [7,7]$,

(c) $f(x,y) = x^2 - 4x + 2y^2$, $\mathcal{K}$: $(-1 \le x \le 1) \wedge (-4 \le y \le 4)$,

(d) $f(x,y) = x^2 + 2y^2$, $\mathcal{K}$: $(-1 \le x \le 2) \wedge (-1 \le y \le 2)$,

(e) $f(x,y) = 3x - y$, $\mathcal{K}$ : kompaktní kruh $x^2 + y^2 \le 2.5$.

**Úloha 11.B.6.** Spotřebitel má utratit 600 \$ za dvě komodity, první má cenu 20 \$ za jednotku a druhá 30 \$ za jednotku. Předpokládejme, že užitek pro konzumenta odvozený z $x$ jednotek první komodity a $y$ jednotek druhé komodity je dán **Cobb-Douglasovou užitkovou funkcí** $U(x,y) = 10x^{0.6}y^{0.4}$. Kolik jednotek od každé komodity má spotřebitel nakoupit, aby maximalizoval užitek? [HoBr, str. 556]

(Návod: Optimalizujte užitkovou funkci $U(x,y)$ vzhledem k podmínce $20x + 30y - 600 = 0$. Protože $x \ge 0$ a $y \ge 0$, jsou koncové body vazbové podmínky $C_1 = [0, 20]$ a $C_2 = [30, 0]$.)

## *PROBLEMS TO SOLVE*

**Exercise 11.B.1.** Find the local extrema of multivariate functions

(a) $f(p,q,r) = p^2 + q^2 + r^2 - pq + qr + 2r$, (b) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = -x_1^3 + 3x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$,

(c) $f(x_1,x_2,x_3) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_1 + 2x_3$, (d) $f(a,b,c,d) = a^2 + b^2 + c^3 - 3c + d^3 - 6d^2$.

**Exercise 11.B.2.** For given functions, find their stationary points and classify them.

(a) $f(p,q) = -p^2 + pq - q^2 + 6p$, (b) $z = x^3 - 3x + y^2$, (c) $z = \ln(x^2 + y^2 + 1)$,

(d) $f(u,v) = u^2 - v^2 + 2uv - 3v$, (e) $z = e^{-x^2-y^2}$, (f) $z = x^3 - 3x + y^3 + 3y^2$.

**Exercise 11.B.3.** Find the local extrema of function $f(x,y)$ subject to the constraint $g(x,y) = 0$. Use the direct method.

(a) $f(x,y) = x^2 - y^2 + 8x - 1$, $g(x,y) = x - 5$,
(b) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 8x - 13$, $g(x,y) = y - 5$,
(c) $f(x,y) = x^2 - 2y^2 + 8x$, $g(x,y) = x + y - 5$,
(d) $f(x,y) = x^2 - xy - 2y + 3$, $g(x,y) = 2x^2 - y$.

**Exercise 11.B.4.** Find the local extrema of function $f(x,y)$ subject to the constraint $g(x,y) = 0$. Use the Langrange multiplier method.

(a) $f(x,y) = x - y$, $g(x,y) = x^2 + y^2 - 2$,
(b) $f(x,y) = 2x + 4y + 5$, $g(x,y) = 2x^2 + y^2 - \frac{1}{2}$,
(c) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 2y$, $g(x,y) = x + y - 1$,
(d) $f(x,y) = \ln(xy)$, $g(x,y) = x^2 + y^2 - 2$.

**Exercise 11.B.5.** Find absolute extrema on a compact region $\mathcal{K}$.

(a) $f(x,y) = x^3 + 3xy - y^3$, $\mathcal{K}$: the compact $\triangle$ with vertices $[1,2], [1,-2], [-1,-2]$,
(b) $f(x,y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$, $\mathcal{K}$: the compact $\triangle$ with vertices $[-1,-1], [7,-1], [7,7]$,
(c) $f(x,y) = x^2 - 4x + 2y^2$, $\mathcal{K}$: $(-1 \le x \le 1) \wedge (-4 \le y \le 4)$,
(d) $f(x,y) = x^2 + 2y^2$, $\mathcal{K}$: $(-1 \le x \le 2) \wedge (-1 \le y \le 2)$,
(e) $f(x,y) = 3x - y$, $\mathcal{K}$ : the compact circle $x^2 + y^2 \le 2.5$.

**Exercise 11.B.6.** A consumer has \$600 to spend on two commodities, the first of which cost \$20 per unit and the second \$30 per unit. Suppose that the utility derived by the consumer from $x$ units of the first commodity and $y$ units of the second commodity is given by the **Cobb-Douglas utility function** $U(x,y) = 10x^{0.6}y^{0.4}$. How many units of each commodity should the consumer buy to maximize utility? [HoBr, pg. 556]

(Hint: Optimize the utility function $U(x,y)$ subject to the constraint $20x + 30y - 600 = 0$. Since $x \ge 0$ and $y \ge 0$, the end-points of the constraint curve are $C_1 = [0,20]$ and $C_2 = [30,0]$.)

## Minitest MT11.B

**1.** Nechť $F(a,b,c) = a^2 + 2a + b^3 + ab + c^2b + b + 2$ a nechť $P = [1,-1,2]$.
Pak $\Delta_1(P) + \Delta_2(P) + \Delta_3(P) =$

**(A)** $-19$ **( B)** $-17$ **(C)** $17$ **(D)** $19$ **(E)** jiný výsledek.

**2.** Dána funkce $f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2x_3 - x_3^2$. V libovolném bodě $[x_1,x_2,x_3]$ určete hodnotu determinantu Hesseho matice funkce $f$. Výsledek je

**(A)** $2x_1x_3$ **( B)** $-2x_1x_3$ **(C)** $2x_1x_2$ **(D)** $-2x_2x_3$ **(E)** jiný výsledek.

**3.** $A = [0, \frac{\pi}{2}]$ je stacionární bod funkce $f(x,y) = x \cdot \cos y$. Potom

**(A)** $f$ má lokální maximum v $A$ **(B)** $f$ má lokální minimum v $A$
**(C)** $f$ má sedlový bod v $A$ **(D)** $\Delta_2(A) = 0$, **(E)** jiná odpověď.

**4.** Najděte stacionární bod funkce $z = e^x(x + y^2)$ a vyhodnoťte ho.

**(A)** $[0,-1]$ lok. min. **(B)** $[0,-1]$ lok. max. **(C)** $[-1,0]$ lok. min.
**(D)** $[-1,0]$ lok. max. **(E)** jiná odpověď.

**5.** John použil Langrangeův multiplikátor k optimalizaci funkce $f(x,y) = x^2 - xy - y^2$ vzhledem k podmínce $x + y - 1 = 0$. Hodnota Langrangeova multiplikátoru byla

**(A)** $-2.5$ **( B)** $-1.5$ **(C)** $1.5$ **(D)** $2.5$ **(E)** jiný výsledek.

**6.** Najděte absolutní minimum $z_{min}$ a absolutní maximum $z_{max}$ funkce $z = x + 2y + 3$ vzhledem k podmínce $g(x,y) = x^2 + y^2 - 5 = 0$. Výsledek je

**(A)** $z_{min} = -4, z_{max} = 4$ **( B)** $z_{min} = -2, z_{max} = 4$ **(C)** $z_{min} = -4, z_{max} = 8$
**(D)** $z_{min} = -2, z_{max} = 8$ **(E)** jiný výsledek.

**7.** Funkce $z = x^3 - 3x + y^3 - 27y + 2$ má právě 4 stacionární body:
$[1,3]$, $[1,-3]$, $[-1,3]$, $[-1,-3]$. Počet jejích sedlových bodů je

**(A)** 0 **( B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4.

**8.** Dána funkce $f(x,y) = x^2 + 2xy + py^2 + x - y + 3$, kde $p$ je parameter.
Najděte všechny hodnoty parametru $p$, pro něž $f$ má lokální minimum.

**(A)** $(-\infty,-1)$ **(B)** $(-\infty,1)$ **(C)** $(-1,\infty)$ **(D)** $(1,\infty)$ **(E)** jiný výsledek.

**9.** Firma plánuje 60 000 \$ měsíčně na práci a materiál. Je-li $x$ tisíc dolarů vynaloženo na práci a $y$ tisíc dolarů na materiál (tj. $x + y = 60$) a je-li měsíční počet vyrobených jednotek $z$ dán jako $z = 4xy - 8x$, rozdělte 60 000 \$ na práci a materiál tak, abyste dostali maximální $z$. Hodnota maxima $z$ je [BaZi, str. 490]

**(A)** 3363 **(B)** 3364 **(C)** 3365 **(D)** 3366 **(E)** jiný výsledek.

## Minitest MT11.B

**1.** Let $F(a,b,c) = a^2 + 2a + b^3 + ab + c^2b + b + 2$ and let $P = [1, -1, 2]$. Then $\Delta_1(P) + \Delta_2(P) + \Delta_3(P) =$

**(A)** $-19$ **( B)** $-17$ **(C)** $17$ **(D)** $19$ **(E)** none of the above.

**2.** Given function $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 - x_3^2$. At any point $[x_1, x_2, x_3]$ evaluate the determinant of the Hesse matrix of $f$. The result is

**(A)** $2x_1x_3$ **( B)** $-2x_1x_3$ **(C)** $2x_1x_2$ **(D)** $-2x_2x_3$ **(E)** none of the above.

**3.** $A = [0, \frac{\pi}{2}]$ is one of the stationary points of the function $f(x,y) = x \cdot \cos y$. Then

**(A)** $f$ has a local maximum at $A$ **(B)** $f$ has a local minimum at $A$
**(C)** $f$ has a saddle point at $A$ **(D)** $\Delta_2(A) = 0$. **(E)** none of the above is correct.

**4.** Find the stationary point of the function $z = e^x(x + y^2)$ and classify it.

**(A)** $[0, -1]$ loc. min. **(B)** $[0, -1]$ loc. max. **(C)** $[-1, 0]$ loc. min.
**(D)** $[-1, 0]$ loc. max. **(E)** none of the above.

**5.** John used the Langrange multiplier method to optimize $f(x,y) = x^2 - xy - y^2$ subject to the constraint $x + y - 1 = 0$. The value of the Langrange multiplier was

**(A)** $-2.5$ **( B)** $-1.5$ **(C)** $1.5$ **(D)** $2.5$ **(E)** none of the above.

**6.** Find the absolute minimum $z_{min}$ and the absolute maximum $z_{max}$ of the function $z = x + 2y + 3$ subject to the constraint $g(x,y) = x^2 + y^2 - 5 = 0$. The result is

**(A)** $z_{min} = -4, z_{max} = 4$ **( B)** $z_{min} = -2, z_{max} = 4$ **(C)** $z_{min} = -4, z_{max} = 8$
**(D)** $z_{min} = -2, z_{max} = 8$ **(E)** none of the above.

**7.** The function $z = x^3 - 3x + y^3 - 27y + 2$ has exactly 4 stationary points: $[1,3]$, $[1,-3]$, $[-1,3]$, $[-1,-3]$. The number of saddle points of this function is

**(A)** 0 **( B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4.

**8.** Given function $f(x,y) = x^2 + 2xy + py^2 + x - y + 3$ where $p$ is a parameter. Find all the values of parameter $p$ for which $f$ has a local minimum.

**(A)** $(-\infty, -1)$ **(B)** $(-\infty, 1)$ **(C)** $(-1, \infty)$ **(D)** $(1, \infty)$ **(E)** none of the above.

**9.** A firm has budgeted \$60,000 monthly per labor and per materials. If $x$ thousand dollars is spent on labor a $y$ thousand dollars on materials (i.e. $x + y = 60$) and if the monthly output $z$ in units is given by $z = 4xy - 8x$ allocate the \$60,000 to labor and materials to get maximum $z$. The value of maximum $z$ is [BaZi, pg. 490]

**(A)** 3,363 **(B)** 3,364 **(C)** 3,365 **(D)** 3,366 **(E)** none of the above

# ODKAZY - REFERENCES


[BaZi] Barnett, R. A., Ziegler, M. R. *Applied Calculus for Business and Economics, Life Sciences, and Social Sciences.* San Francisco: Dellen Publ. Co., 1990.

[Bud] Budnick, F. S. *Applied Mathematics for Business, Economics, and Social Sciences.* New York: Mc Graw - Hill, Inc., 1993.

[HoBr] Hoffman, L. D., Bradley, G. L. *Calculus for Business, Economics, and Social Sciences.* New York: Mc Graw - Hill, Inc., 1992.

[LaHo] Larson, R. E., Hostetler, R. P. *Precalculus.* Toronto: D. C. Heath and Co. 1985.

[NýLe] Nýdl, V., Klufová, R. *Matematika (Část 2 - Matematická analýza).* skriptum JU, České Budějovice, 1998.

[Rub] Rubenstein, R. N. et al. *Functions, Statistics, and Trigonometry.* Glenview: Scott, Foresman and Co., 1992.

[Swo] Swokowski, E. W. *Calculus with Analytic Geometry.* 4th ed., Boston: PWS - Kent Publ. Comp., 1992.

# VÝSLEDKY - RESULTS

## TÉMA - TOPIC T8.A

**8.A.1.** (a) $x = -1, 3$, (b) $x = -1, 0, 1$, (c) $x = -\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}$, (d) žádný - none.

**8.A.2.** (a) $2-3x^2$, (b) $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\cos^2 x}$, (c) $\frac{x}{2}+\frac{22}{x^3}$, (d) $\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$, (e) $12\mathrm{e}^x-\frac{5}{2\sqrt{x^3}}$, (f) $-\frac{4}{x^2}-\frac{3}{x}$.

**8.A.3.** (a) $\cos^2 x-\sin^2 x$, (b) $\mathrm{e}^x\sqrt{x}+\frac{\mathrm{e}^x}{2\sqrt{x}}$, (c) $-\frac{10}{(x-7)^2}$, (d) $\mathrm{e}^x(2x\tan x+x^2\tan x+\frac{x^2}{\cos^2 x})$, (e) $\frac{x^2\cos x+5\sin x+5x\cos x}{(x+5)^2}$, (f) $\frac{8x}{(x^2+2)^2}$. **8.A.4.** (a) $2\cos(2x+1)$, (b) $-\frac{\sin x}{\cos x}$, (c) $\frac{1}{\sqrt{2x-3}}$, (d) $(2x-2)\mathrm{e}^{x^2-2x}$, (e) $-7\cos(\cos(7x))\cdot(\sin 7x)$, (f) $\frac{3}{1+9x^2}$. **8.A.5.** (a) 1, (b) 3, (c) $-4$.

**8.A.6.** (a) 68.20° (b) 45°, (c) −71.57°. **8.A.7.** (a) $1, -1$, (b) $1, 2$, (c) žádný - none.

**8.A.8.** 270\$ měsíční pokles - monthly decrease. **8.A.9.** $d(5)=500$, $d'(5)=-100$; při $x$=5\$ je poptávka 500 ks a při zvýšení $x$ o 1\$ se sníží poptávka o 100 ks - if $x$=\$5 then 500 items is demanded and if $x$ is increased by \$1 then the demand decreases by 100 items. **8.A.10.** $C(10)\doteq$2539.5\$(náklady - cost), $C'(10)$=180\$/jedn. - unit (marg. náklady - marginal cost).

## TÉMA - TOPIC T8.B

**8.B.1.** (a) rostoucí - increasing, konvexní - concave up, $y=\frac{9}{2}x-2, y=-\frac{2}{9}x+\frac{152}{9}$, (b) rost. - incr., konkávní - concave down, $y=x+6, y=-x+6$, (c) rost. - incr., konkáv. - concave down, $y=3x+1, y=-\frac{1}{3}x-\frac{7}{3}$. **8.B.2.** (a) 1, (b) $-\frac{3}{2}$, (c) 1, (d) 1, (e) $\frac{1}{2}$, (f) $-3$.

**8.B.3.** (a) 44.0235, (b) −0.39. **8.B.4.** (a) $T(x)=1-7(x-1)-3(x-1)^2+(x-1)^3$, (b) $T(x)=12+2(x-4)-\frac{(x-4)^2}{16}+\frac{(x-1)^3}{128}$, (c) $T(x)=x^2-\frac{x^4}{6}$, (d) $T(x)=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}$.

**8.B.5.** (a) none, (b) $x=-2$, (c) $x=\pm 1$, (d) $x=1\pm\sqrt{2}/2$, (e) none, (f) $x=1$.

**8.B.6.** (a) $t=-1$ …l. max., $t=1$ …l. min., (b) $w=1$ …l. max., $w=2$ …l. min., (c) $u=-1$ …l. min., (d) $x=2$ …infl. bod - point of infl. **8.B.7.** (a) abs. max. $=-5$, abs. min. $=-32$, (b) abs. max. $=0$, abs. min. $=-7$, (c) abs. max. $=0$, abs. min. $=-32$, (d) abs. max. $\doteq 2981$, abs. min. $=1$, (e) abs. max. $\doteq 2981$, abs. min. $\doteq 0.368$, (f) abs. max. $\doteq 2981$, abs. min. $\doteq 0.368$. **8.B.8.** $Q$ poklesne o 12 000 jednotek - $Q$ will decrease by 12,000 units. **8.B.9.** abs. max.: $x=32, P=\$61,964$. **8.B.10.** $x\doteq 0.909$, $p\doteq 3.68$, $R\doteq 3.344$.

## TÉMA - TOPIC T9.A

**9.A.1.** $f_1 \to F_5, f_2 \to F_4, f_3 \to F_3, f_4 \to F_1, f_5 \to F_2$. **9.A.2.** (a) $3p-p^2/2+C$; R, (b) $\sin t+C$; R, (c) $11z+C$; R, (d) $s^3/3+2\sqrt{s^3}/3+C$; $(0,\infty)$, (e) $10\ln|q|-20/q+C$; $(-\infty,0),(0,\infty)$, (f) $3\sqrt[3]{m^2}/2+C$; $(-\infty,0),(0,\infty)$. **9.A.3.** $g_1:(0,\infty)$, $g_2:(-\infty,-1),(-1,1),(1,\infty)$, $g_3:$ R, $g_4:(-\infty,1)$ $g_5:(-\infty,-3),(-3,-2),(-2,0),(0,\infty)$, $g_6:(-1,\infty)$. **9.A.4.** (a) $-\cos(3x+2)/3+C$, (b) $(2t-7)^6/12+C$, (c) $\ln|\sin x|+C$, (d) $\ln|a^2-113a+2|+C$, (e) $-\sqrt{(1-4p)^3}/6+C$, (f) $\ln|\ln(q+1)|+C$. **9.A.5.** (a) $x/2-3\ln|2x+3|/4+C$, (b) $\ln(t^2+1)/2+\arctan t+C$, (c) $x\ln^3 r-3\ln^2 r+6\ln r-6r+C$, (d) $-2p\mathrm{e}^{-0.5p}+-4\mathrm{e}^{-0.5p}+C$, (e) $-10/(s+1)+C$, (f) $\ln|x^2+5x+6|-6\ln|(x+2)/(x+3)|+C$, (g) $\mathrm{e}^{5z}(z^2/5-2z/25+2/125)+C$, (h) $3\sqrt[3]{(2s-11)^4}/8+C$, (i) $\ln^4 x/4+C$.

## TÉMA - TOPIC T9.B

**9.B.1.** (a) $\doteq -15.97$, (b) $\doteq 0.118$, (c) $\doteq 8.88$, (d) $\doteq 0.18$. **9.B.2.** (a) $\doteq 19.7$, (b) $\doteq 18.33$, (c) $\doteq 0.69$, (d) $\doteq 1.39$, (e) $\doteq 8.28$, (f) $\doteq 4$. **9.B.3.** (a) $\doteq 1.89$, (b) $\doteq 10.39$, (c) $\doteq 1.33$, (d) $\doteq 10.5$. **9.B.4.** (a) $\doteq 1.008$, (b) $\doteq 75.4$, (c) $\doteq 0.59$, (d) $\doteq 75.4$. **9.B.5.** $\doteq 704.4$. **9.B.6.** \$20,000. **9.B.7.** $\doteq 39.76$ tisíc - thousand. **9.B.8.** $\doteq 28.83$ mil. EUR. **9.B.9.** $\doteq 26.315$ mil. \$, 36.46 let - years. **9.B.10.** (a) odm. k. - root t.:

conv., int. t.: conv., (b) odm. k.- root t.: neroz. - not decided. int. t.: conv., (c) podíl. k. - ratio t.: neroz. - not decided, int. t.: conv., (d) podíl. k. - ratio t.: neroz. - not decided, int. t.: div.

## TÉMA - TOPIC T10

**10.1.** Pouze $f_2$ je řešením $r_2$ - Only $f_2$ is a solution of $r_2$. **10.2.** (a) $y = x\cos x + \sin x + C$, (b) $y = x^4/12 - x^3/3 + 3x^2 + C$, (c) $y = e^{-3x}/9 + C$, (d) $y = -2/x^2 + C$. **10.3.** (a) $y = x^2/2+5x-6$, (b) $y = xe^x-e^x+11$, (c) $y = e^x-x^2-x+2$, (d) $y = (x^2\ln x)/2+x^4/4+3x-1/4$. **10.4.** (a) $y^2/2 = x^3/3+C$, (b) $y^4/4 = xe^x-e^x+C$, (c) $-1/y = 2\ln(x-2)-\ln(x-1)+C$, (d) $(2/3)y^{3/2} = (3/4)x^{4/3}+C$. **10.5.** (a) $y = Ce^{-x^2/2}$, (b) $y = Ce^{2x}$, (c) $y = Ce^{-2x}+x/2-1/4$, (d) $y = Ce^{-e^{3x}/3}$, (e) $y = Ce^{(x-\sin x\cos x)/2}$, (f) $y = Ce^{-x}+e^x/2$, (g) $y = C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}$, (h) $y = C_1+C_2e^{2x}$, (i) $y = e^{x/2}\left(C_1\cos(\sqrt{3}x/2) + C_2\sin(\sqrt{3}x/2)\right)$, (j) $y = C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+x-5$, (k) $y = C_1e^x + C_2e^{-x} - x^2 - 3$, (l) $y = C_1e^{-3x} + C_2 + x^2/6 + 14/9$.

**10.6.** \$3.52. **10.7.** 260,578 EUR. **10.8.** \$950.02. **10.9.** $p(t) = 10e^{-3x} + 20$.
**10.10.** $R(x) = x^2/2 + 8\sqrt{x}$, $p'(x) = 1/2 - 4/\sqrt{x^3}$, **10.11.** $y = -e^{-x} + 2$.

## TÉMA - TOPIC T11.A

**11.A.1.** Řádka - row 1: NO, YES, NO, YES, YES, ř.-row 2: NO, YES, YES, NO, YES, ř.- row 3: NO, YES, NO, YES, NO. **11.A.2.** (a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6y \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{(x-y)^2} & \frac{1}{(x-y)^2} \\ \frac{1}{(x-y)^2} & \frac{-1}{(x-y)^2} \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3w^2 \\ 0 & -(2w)^{-3/2} & 0 \\ 3w^2 & 0 & 6uw \end{bmatrix}$, (d) $\begin{bmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \end{bmatrix}$, (e) $e^{u^2+vw}\cdot\begin{bmatrix} 2+4u^2 & 2uw & 2uv \\ 2uw & w^2 & vw \\ 2uv & vw & v^2 \end{bmatrix}$, (f) $\begin{bmatrix} -\cos(u-v+w) & \cos(u-v+w) & -\cos(u-v+w) \\ \cos(u-v+w) & -\cos(u-v+w) & \cos(u-v+w) \\ -\cos(u-v+w) & \cos(u-v+w) & -\cos(u-v+w) \end{bmatrix}$.

**11.A.3.** (a) 30, (b) 4, (c) 4. **11.A.4.** (a) $z = -2x+3y-3$, (b) $z = 1/6x-1/6y+1.5$, (c) $z = x+1$. **11.A.5.** (a) 127, (b) $-3.92$, (c) 6.362. **11.A.6.** (a) $A=[4,2], H(A)=3$, (b) $A_1=[1,0], H(A_1)=12$, $A_2=[-1,0], H(A_2)=-12$, (c) $A=[0,0], H(A)=4$, (d) $A=[\frac{3}{4}, \frac{-3}{4}, 0]$, $H(A)=-16$, (f) $A=[1/30, 4/30], H(A)=-60$. **11.A.7.** $P_x(30,10)=-80 \rightarrow$ Na úrovni produkce 30 standardních a 10 závodních surfovacích prken týdně zvýšení produkce standardních prken o 1 a udržení produkce závodních prken na 10 sníží týdenní zisk přibližně o 80 \$ - At a production level of 30 standard and 10 competition boards per week, increasing the production of standard boards by 1 and holding the weekly production of competition boards fixed at 10 will decrease the profit by approx. \$80; $P_y(25,10)=10$ (resp. $P_y(25,15)=-110$) $\rightarrow$ Na úrovni týdenní produkce $[x,y]=[25,10]$ (resp. $=[25,15]$) zvýšení produkce $y$ o 1 a udržení $x$ na 25 zvýší (resp. sníží) zisk přibližně o 10 \$ (resp. 110 \$). - At a production level of $[x,y]=[25,10]$ ($=[25,10]$, respectively) per week, increasing the production of $y$ by 1 and holding the production of $x$ fixed at 25 will increase (decrease. respectively) the profit by approx. \$10 (\$110, respectively).

## TÉMA - TOPIC T11.B

**11.B.1.** (a) $A=[\frac{1}{2}, 1, -\frac{3}{2}], f(A) = -\frac{3}{2}\ldots$ l. min., (b) $A_1=[2,0,0,0]$, $f(A_1)=4\ldots$ l. max., $A_2=[0,0,0,0]\ldots$ neumíme rozhodnout - we can't decide. (c) $A=[1,0,1], f(A)=2\ldots$ l. max., (d) $A_1=[O,0,1,4], f(A_1)=-34\ldots$ l. min.; $A_2=[0,0,-1,4]$, $A_{3,4}=[0,0,\pm1,0]\ldots$ neumíme rozhodnout - we can't decide.
**11.B.2.** (a) $A=[4,-2], f(A)=12\ldots$ l. max., (b) $A_1=[1,0], z(A_1)=-2\ldots$ l. min., $A_2=[-1,0]\ldots$ sedlový b. - saddle point, (c) $A=[0,0], z(A)=0\ldots$ l. min., (d) $A=[\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}]\ldots$ sedlový b. - saddle point, (e) $A=[0,0], z(A)=1\ldots$ l. max., (f) $A_1=[1,0], z(A_1)=-2\ldots$ l. min., $A_2=[-1,-2], z(A_2)=6\ldots$ l. max., $A_3=[-1,0], A_4=[1,2]\ldots$ sedlové b. - saddle points.
**11.B.3.** (a) $A=[5,0], f(A)=64\ldots$ l. max., (b) $A=[-4,5], f(A)=-4\ldots$ l. min., (c) $A=[14,-9]$, $f(A)=146\ldots$ l. max., (d) $A_1=[0,0], f(A_1)=3\ldots$ l. max., $A_2=[-1,2], f(A_2)=2\ldots$ l. min.
**11.B.4.** (a) $\lambda_1=\frac{1}{2}, A_1=[-1,1], f(A_1)=-2\ldots$ l. min., $\lambda_2=-\frac{1}{2}, A_2=[1,-1], f(A_2)=2\ldots$ l. max., (b) $\lambda_1=3, A_1=[-\frac{1}{6}, -\frac{2}{3}], f(A_1)=2\ldots$ l. min., $\lambda_2=-3, A_2=[\frac{1}{6}, \frac{2}{3}], f(A_2)=8\ldots$ l. max.,

(c) $\lambda=-\frac{5}{2}$, $A=[\frac{3}{2},-\frac{1}{2}]$, $f(A)=\frac{3}{4}\ldots$ l. min., (d) $\lambda=-\frac{1}{2}$, $A_1=[1,1]$, $A_2=[-1,-1]$, $f(A_1)=f(A_2)=0$ $\ldots$ l. max.

**11.B.5.** (a) $A_1=[-1,-2]$, $f(A_1)=-6\ldots$ abs. min., $A_2=[1,-1]$, $f(A_2)=5\ldots$ abs. max., (b) $A_1=[-1,-1]$, $f(A_1)=-8\ldots$ abs. min., $A_2=[7,7]$, $f(A_2)=224\ldots$ abs. max., (c) $A_1=[1,0]$, $f(A_1)=-3\ldots$ abs. min., $A_2=[-1,\pm 4]$, $f(A_2)=37\ldots$ abs. max., (d) $A_1=[0,0]$, $f(A_1)=0\ldots$ abs. min., $A_2=[2,2]$, $f(A_2)=12\ldots$ abs. max., (e) $A_1=[-\frac{3}{2},\frac{1}{2}]$, $f(A_1)=-5\ldots$ abs. min., $A_2=[\frac{3}{2},-\frac{1}{2}]$, $f(A_2)=5\ldots$ abs. max.

**11.B.6.** $[x,y]=[18,8]$, $U_{max}=10\cdot 18^{0.6}8^{0.4}\doteq 130.1$.

## MINITESTY - MINITESTS

| | MT8A | MT8B | MT9A | MT9B | MT10 | MT11A | MT11B |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | D | A | B | C | D | A | B |
| 2 | C | A | E | C | D | C | E |
| 3 | D | A | B | B | D | D | C |
| 4 | B | D | A | C | C | B | C |
| 5 | B | B | D | D | B | B | D |
| 6 | E | D | E | B | C | D | D |
| 7 | B | A | D | D | E | A | C |
| 8 | D | B | - | D | C | C | D |
| 9 | B | C | - | A | C | - | B |
| 10 | C | A | - | - | - | - | - |
| 11 | - | D | - | - | - | - | - |

## Modelové cvičení z matematiky: Základy programu Maple

Maple lze zjednodušeně charakterizovat jako matematický manipulační jazyk. Jednotlivé příkazy se ukončují středníkem nebo dvojtečkou a po stisku klávesy ENTER jsou ihned vykonány.

### Lineární algebra

Na modelovém příkladu řešení soustavy lin. rovnic si ukážeme základní příkazy používané lineární algebrou. Dříve než začneme pracovat, musíme si otevřít knihovnu lin. algebry zadáním příkazu **with(linalg);** nebo **with(linalg):** .

Použijeme tuto pracovní soustavu

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 &= 9 \\ 5x_1 - 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 &= 8 \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 3x_4 &= -5 \\ 7x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -2 \end{aligned}$$

Soustavu můžeme např. chápat jako maticovou rovnici $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 & -5 \\ 5 & -7 & 8 & 2 \\ 4 & 5 & -7 & 3 \\ 7 & 8 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix}$

Ověření Frobeniovy podmínky: příkazem **A:=matrix(4,4,[3,3,4,-5,5,-7,8,2,4,5,-7,-3,7,8,3,4]);** zadáme do počítače matici soustavy a příkazem **b:=vector(4,[9,8,-5,-2]);** si zadáme vektor pravých stran. Hodnost matice soustavy zjistíme příkazem **rank(A);**. Rozšířenou matici soustavy (pojmenujeme si ji třeba **Aroz**) získáme např. tímto způsobem: **Aroz:=concat(A,b);** spojí matici $A$ a vektor $\vec{b}$ (jako sloupec). Hodnost matice **Aroz** zjistíme příkazem **rank(Aroz);**. Je-li Frobeniova podmínka ověřena, příkazy **linsolve(A,b);** či **leastsqrs(A,b);** najdou řešení maticové rovnice $A \cdot \vec{x}^T = \vec{b}^T$. Soustavu můžeme také řešit použitím inverzní matice: příkaz **Ainv:=inverse(A);** vypočítá matici $A^{-1}$, a pak užijeme příkaz **X:=multiply(Ainv,b);**.

Jiný způsob, jak řešit soustavu lin. rovnic, je použití Cramerova pravidla. Vložíme matici soustavy $A$ a příslušné matice $A_1, A_2, A_3, A_4$ a pomocí příkazu pro výpočet determinantu postupě vypočteme jednotlivé neznámé:

```
x1:=det(A1)/det(A);
x2:=det(A2)/det(A);
x3:=det(A3)/det(A);
x4:=det(A4)/det(A);
```

V programu Maple lze řešit soustavy lin. rovnic také pomocí Gaussovy a Jordanovy eliminace. Máme-li vloženu rozšířenou matici soustavy **Aroz**, pak příkaz **gausselim(Aroz);** provede úpravu na Gaussův tvar a příkaz **gaussjord(Aroz);** Jordanovu eliminaci.

Na **jiné** soustavě lin. rovnic o neznámých y1, y2, y3 si předvedeme ještě další způsob řešení - totiž přímé vložení jednotlivých rovnic (tj. r1, r2, r3) a pak užití příkazu "solve": **reseni:=solve({r1,r2,r3},{y1,y2,y3});**

```
r1:=y1+3*y2+4*y3=9:
r2:=6*y1-7*y2+8*y3=10:
r3:=4*y1+5*y2-5*y3=-5:
```

---

Přehled příkazů (otestujte je na vektorech $\vec{u} = (-1, 5, 15)$, $\vec{v} = (-7, 8, 9)$ a nějakých maticích $A, B$):

**norm(u,2);** vypočítá normu vektoru $\vec{u}$
**angle(u,v);** určí úhel vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ (v radiánech!)
**dotprod(u,v);** provede skalární součin $\vec{u} \cdot \vec{v}$
**crossprod(u,v);** provede vektorový součin $\vec{u} \times \vec{v}$
**transpose(A);** transponuje matici $A$
**det(A);** počítá $\det(A)$ **inverse(A);** počítá $A^{-1}$
**adj(A);** počítá $\overline{A}$ **rank(A);** počítá $h(A)$
**evalm(A+B);** počítá $A + B$
**multiply(A,B);** počítá $A \cdot B$
**evalm(A&*B - 3*A);** počítá $A \cdot B - 3C$.

POZOR, na součin čísla a matice užijeme znak *, ale na součin dvou matic "dvojznak" &*

---

### Posloupnosti a řady

Limitu posloupnosti $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n+3}{n^2-4n+6}$ určíme příkazem **limit((n+3)/(n^2-4*n+6),n=infinity);**.

Součty posloupností a řad zajišťuje "sum". Např. **sum(1/k^2,k=1..infinity);** vypočte $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Příkaz **taylor(cos(x),x=0,15);** dá Taylorův mnohočlen 15. stupně funkce $\cos x$ v bodě $x = 0$ .

---

### Funkce

Funkci $f : y = xe^x$ vložíme pomocí funkčního operátoru -> takto **f:= x -> x*exp(x);**

Chceme-li určit funkční hodnotu funkce $f$ v bodě $x = 2$, stačí zadat **f(2);**. Analogicky vkládáme funkce více proměnných. Např. **g:=(x,y) -> (x-5*y)/(5*x+y);** vloží funkci $g : z = \frac{x-5y}{5x+y}$.

K výpočtu limit funkcí slouží stejný příkaz jako u posloupností, např. **limit(sin(x),x=Pi/3,right);** najde limitu funkce $\sin x$ v bodě $x = \frac{\pi}{3}$ zprava.

# Model seminar in mathematics: Getting started with Maple

Maple can be simply characterized as a procedural mathematical language. Any particular command must be ended by a semicolon or a colon. Then press the ENTER key.

## Linear algebra

On a model example of solving the system of linear equations, we show basic commands in linear algebra. Before starting, it is important to open the linear algebra library by inserting the command **with(linalg);** or **with(linalg):**.

We use the sample system of equations

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & - & 5x_4 & = & 9 \\ 5x_1 & - & 7x_2 & + & 8x_3 & + & 2x_4 & = & 8 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & - & 7x_3 & - & 3x_4 & = & -5 \\ 7x_1 & + & 8x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -2 \end{array}$$

The corresponding matrix form of this system is

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 & -5 \\ 5 & -7 & 8 & 2 \\ 4 & 5 & -7 & -3 \\ 7 & 8 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Verify the Frobenius condition: **A:=matrix(4,4,[3,3,4,-5,5,-7,8,2,4,5,-7,-3,7,8,3,4]);** inserts the augmented matrix into the computer memory and **b:=vector(4,[9,8,-5,-2]);** inserts the right side vector. The command **rank(A);** computes the rank of the system matrix. The augmented matrix (let us denote it by **Aaug**) can be created as follows: **Aroz:=concat(A,b);** will join matrix $A$ and vector $\vec{b}$ (as a column). The rank of **Aaug** is found by **rank(Aaug);**. If the Frobenius condition holds, the commands **linsolve(A,b);** or **leastsqrs(A,b);** will compute the solution of matrix equation $A \cdot \vec{x}^T = \vec{b}^T$. The inverse matrix can be used as well: the command **Ainv:=inverse(A);** computes matrix $A^{-1}$, and then **X:=multiply(Ainv,b);**.

Another way, how to solve our system of equations, is the utilization of the Cramer rule. Matrices $A, A_1, A_2, A_3, A_4$ must be inserted and then, using the determinant command, the values of particular unknowns are obtained.

x1:=det(A1)/det(A);
x2:=det(A2)/det(A);
x3:=det(A3)/det(A);
x4:=det(A4)/det(A);

In Maple, the system of equations can be solved by means of the Gauss or the Jordan elimination. If we have the augmented matrix **Aaug**, we directly use the command **gausselim(Aaug);** which gives the Gauss form or the command **gaussjord(Aaug);** which performes the Jordan elimination.

On a different system in unknowns y1, y2, y3 we show yet another method. We simply insert the particular equations (i. e. r1, r2, r3) and then we use the command "solve": **reseni:=solve({r1,r2,r3},{y1,y2,y3});**

r1:=y1+3*y2+4*y3=9:
r2:=6*y1-7*y2+8*y3=10:
r3:=4*y1+5*y2-5*y3=-5:

---

The list of commands (experiment with vectors $\vec{u}=(-1,5,15)$, $\vec{v}=(-7,8,9)$ and some matrices $A, B$):

**norm(u,2);** computes the norm of vector $\vec{u}$
**dotprod(u,v);** does the dot product $\vec{u}\cdot\vec{v}$
**transpose(A);** creates the transpose of $A$
**adj(A);** computes $\overline{A}$ **rank(A);** gives $h(A)$
**multiply(A,B);** computes $A \cdot B$
**angle(u,v);** yields the angle between $\vec{u}, \vec{v}$ (in rad)
**crossprod(u,v);** does the cross product $\vec{u}\times\vec{v}$
**det(A);** gives $\det(A)$ **inverse(A);** gives $A^{-1}$
**evalm(A+B);** computes $A+B$
**evalm(A&*B - 3*A);** computes $A \cdot B - 3C$.

WARNING, the symbol * is used for multiplication of a number and a matrix, for multiplication of two matrices the doublesymbol &* is necessary.

---

## Sequences and series

The limit $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+3}{n^2-4n+6}$ is computed by the command **limit((n+3)/(n^2-4*n+6),n=infinity);**.

The command "sum" finds the sums. For example, **sum(1/k^2,k=1..infinity);** computes $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.
**taylor(cos(x),x=0,15);** shows Taylor polynomial of degree 15 of the function $\cos x$ at $x=0$.

---

## Functions

The function $f : y = xe^x$ is inserted using the special operator -> as **f:= x -> x*exp(x);** If we want the value $f(2)$ we simply insert **f(2);**. Functions of more variables are inserted analogously. For example, **g:=(x,y) -> (x-5*y)/(5*x+y);** inserts the function $g : z = \frac{x-5y}{5x+y}$.
The limit of function command is simple, e. g. **limit(sin(x),x=Pi/3,right);** finds the limit of function $\sin x$ as $x$ approaches $\frac{\pi}{3}$ from the right.

## Derivace, integrály, diferenciální rovnice

Derivování má 2 možnosti: *(1)* Povel "diff". Ukázka: **diff(sqrt(x^2+1),x);** určí první derivaci funkce $\sqrt{x^2+1}$, kdežto **diff(ln(1-x),x$5);** určí pátou derivaci funkce $\ln(1-x)$.
Příkaz **diff(tan(x-y),y);** určí první parciální derivaci funkce $\mathrm{tg}\,(x-y)$ podle proměnné $y$.
*(2)* Povel D u první a (D@@$k$) u $k$-té derivace. Ukázka: nejdříve definujeme funkci, např. **f:= x -> sqrt(x^2+1);** a pak **D(f)** určí její první a **(D@@3)(f)** její třetí derivaci. Pokud chceme s těmito derivacemi dále pracovat jako s funkcemi, zadáme rovnou **g:=D(f);** a **h:=(D@@3)(f);** a pak např. jejich hodnoty v $a$=13 zjistíme příkazy **g(13);** a **h(13);**.
Příkazy "maximize", "minimize" naleznou absolutní maximum a minimum: např. pro $y=1-x^2$ na uz. intervalu $\langle -2,5\rangle$ užijeme: **maximize(1 - x^2,x,-2..5);** a **minimize(1 - x^2,x,-2..5);**.

Integrál $\int x^2dx$ počítáme jako **int(x^2,x);** zatímco $\int_{-3}^{3} x^2dx$ jako **int(x^2,x=-3..3);**.

K řešení diferenciálních rovnic slouží příkaz "dsolve". Nejprve vložíme danou dif. rovnici. Např. pro rovnici $y'(x)-2\cdot y(x)=e^x$ (rovnice se bude jmenovat R) je to **R:=diff(y(x),x)-2*y(x)=exp(x);**.
Následně zadáním **dsolve(R,y(x));** získáme *obecné řešení* $y(x)$ této dif. rovnice. K získání partikulárního řešení dif. rovnice vložíme např. počáteční podmínku **pp:=y(1)=7;** a pak *partikulární řešení* rovnice R splňující podmínku pp nalezneme příkazem **dsolve({R,pp},y(x));**.
Lze užít jediný příkaz. Např. příkaz **dsolve({diff(y(x),x$2)=6*x, y(1) = 3, y(2) = 7}, y(x));** řeší rovnou dif. rovnici 2. řádu $y''=6x$ s dvěma počátečními podmínkami $y(1)=3, y(2)=7$.
Pokud chceme s řešením dif. rovnice dále pracovat jako s funkcí, použijeme speciální postup – např. u předchozí rovnice (s pomocnou proměnnou "reseni", která dál nemá žádný význam) to bude:
**reseni:=dsolve({diff(y(x),x$2)=6*x, y(1) = 3, y(2) = 7}, y(x)); assign(reseni): g:=unapply(y(x),x): unassign('y(x)'):** a dále pak již pracujeme s řešením jako s funkcí $g$ (třeba si ji můžeme nakreslit příkazem plot, zjišťovat její funkční hodnoty apod).

## Grafika

Grafy funkcí lze vykreslit užitím příkazu "plot". Např. **plot(x^3 - 4*x + 7,x=-3.15..2);** vykreslí část grafu funkce $y=x^3-4x+7$ pro rozmezí hodnot $x\in\langle -3.15,2\rangle$. Dále **plot({x^3,2*x},x=-5..5);** kreslí dva grafy dvou funkcí $y=x^3$ a $y=2x$ pro $x\in\langle -5,5\rangle$ do jednoho obrázku.
Příkaz **plot3d(x^2-x*y+y^2,x=-4..4,y=-2..2);** nakreslí část grafu funkce 2 proměnných $z=x^2-xy+y^2$ v uvedených rozmezích hodnot $x\in\langle -4,4\rangle$ a $y\in\langle -2,2\rangle$.

## Poznámka

Nápovědy mají hypertextovou strukturu a vyvolají se poklepáním myší na nápis HELP. Další možnost nápovědy je zadání z příkazového řádku: `?<příkaz>;`, např.: `?vector;`.
Ještě jedna rada: jestliže se Maple začne chovat "divně", zadejte příkaz **restart;** a začněte znovu.

## Syntaxe povelů v Maple

Příkazy mohou končit středníkem nebo dvojtečkou. Pokud příkaz končí dvojtečkou, příkaz se sice provede, ale jeho výsledek se nezobrazí na obrazovce. V případě, že příkaz končí středníkem, povel se provede i zobrazí na obrazovce. Maple používá klasické operační znaky $+,-,*,\backslash,\wedge$. Podobně jako v programovacích jazycích je rozdíl mezi := a = . Totiž := je klasický přiřazovací příkaz, = se používá např. u podmínek či při zadávání rovnic (např. if $a=b$ znamená: jestliže $a=b$). Jestliže v příkazu s parametrem zadáme místo parametru %, pak se za parametr dosadí výsledek předchozího příkazu.

| operátor | význam | operátor | význam |
|---|---|---|---|
| + | sčítání | < | menší než |
| − | odčítání | <= | menší nebo rovno |
| * | násobení | > | větší než |
| / | dělení | >= | větší nebo rovno |
| ** | umocňování | = | rovnost |
| ^ | umocňování | <> | nerovnost |
| $ | sekvenční operátor | -> | funkční operátor |
| . | desetinná čárka | and | logická spojka ∧ |
| , | oddělovač výrazů | or | logická spojka ∨ |
| := | přiřazovací příkaz | % | odkaz na předcházející výraz |
| %% | odkaz na druhý předcházející výraz | %%% | odkaz na třetí předch. výraz |

## Derivatives, integrals, differential equations

There are two ways of differentiation: *(1)* The command "diff". Example: **diff(sqrt(x^2+1),x);** gives the 1st derivative of $\sqrt{x^2+1}$, while **diff(ln(1-x),x$5);** gives the 5th derivative of $\ln(1-x)$. The command **diff(tan(x-y),y);** calculates the partial derivative of $\operatorname{tg}(x-y)$ with respect to $y$.

*(2)* The command D for the 1st and (D@@$k$) for the $k$th order derivative.

Example: given function, e. g. **f:= x -> sqrt(x^2+1);** and then **D(f)** gives its 1st and **(D@@3)(f)** its 3rd order derivative. If we need these derivatives as new functions $g$ and $h$, respectively, we introduce **g:=D(f);** and **h:=(D@@3)(f);**. Then we can get their values at $a$=13 as **g(13);** and **h(13);** etc. We also use the commands "maximize" and "minimize". If we want to determine the values of absolute maximum and minimum of function $y = 1 - x^2$ on the closed interval $\langle -2, 5 \rangle$ we apply: **maximize(1 - x^2,x,-2..5);** and **minimize(1 - x^2,x,-2..5);**.

The integral $\int x^2dx$ is obtained as **int(x^2,x);** the integral $\int_{-3}^{3} x^2dx$ as **int(x^2,x=-3..3);**.

Differential equations are solved by means of the command "dsolve". First, insert the given ODE. For example, **R:=diff(y(x),x)-2*y(x)=exp(x);** inserts the equation of $y'(x) - 2 \cdot y(x) = e^x$ (denoted by R). Then the command **dsolve(R,y(x));** calculates *the general solution* $y(x)$ of this ODE. The particular solution matching a given condition: first insert the condition, e. g. **ini:=y(1)=7;**, and then get *the particular solution* of R satisfying ini : **dsolve({R,pp},y(x));**.

We can use a single command only: **dsolve({diff(y(x),x$2)=6*x, y(1) = 3, y(2) = 7}, y(x));** gives the solution of the 2nd order ODE $y'' = 6x$ matching two conditions $y(1) = 3, y(2) = 7$.

To get the solution of an ODE as a function, say $F$, a special procedure is necessary to apply (here "var" is a helper variable): **var:=dsolve({diff(y(x),x$2)=6*x, y(1) = 3, y(2) = 7}, y(x)); assign(var): F:=unapply(y(x),x): unassign('y(x)'):** and now you have the solution as function $F$ (e. g. you can calculate its values, plot its graph etc.).

## Graphics

To plot the graph of a function use the "plot" command. E. g. **plot(x^3 - 4*x + 7,x=-3.15..2);** shows the graph of $y=x^3-4x+7$ for $x \in \langle -3.15, 2 \rangle$.
**plot({x^3,2*x},x=-5..5);** shows the graphs of two functions $y = x^3$ and $y = 2x$ for $x \in \langle -5, 5 \rangle$ in one picture. The command **plot3d(x^2-x*y+y^2,x=-4..4,y=-2..2);** plots the graph of the 2-variable function $z = x^2 - xy + y^2$ for $x \in \langle -4, 4 \rangle$ and $y \in \langle -2, 2 \rangle$.

## Note

Clicking on HELP gives you a hypertext structure of Maple helps. Another possibility for a help is inserting the question mark before the command symbol: ?<command>;, for example: ?vector;.

An advice: if you observe a "strange" behaviour of the program, insert the **restart;** command.

## The syntax of Maple commands

Any command ends by a semicolon or by a colon. In both the cases the command is executed after pressing the ENTER key, but only in the case of semicolon the result is shown on the screen. Maple uses the usual operation symbols like $+, -, *, \backslash, \wedge$. Be careful with the symbols := and = . The symbol := is the assignment symbol used for introducing a new object, while = is a comparison symbol only (typically used in equations). In Maple, percentage signs are used to refer to previously computed expressions. specifically, the % operator reevaluates the last expression computed.

| operator | interpretation | operator | interpretation |
|---|---|---|---|
| + | addition | < | less than |
| − | subtraction | <= | less or equal |
| * | multiplication | > | greater than |
| / | division | >= | greater or equal |
| ** | power | = | equality |
| ^ | power | <> | inequality |
| $ | sequential operator | − > | function operator |
| . | decimal point | and | logical ∧ |
| , | expression delimiter | or | logical ∨ |
| := | assignment command | % | last expression reference |
| %% | second last expression reference | %%% | third last expression reference |

| | |
|---|---|
| Název: | MATEMATIKA II – MATHEMATICS II, CVIČENÍ – SEMINAR<br>Matematická analýza – Differential and Integral Calculus<br>Bilingvní text – bilingual text |
| Autor: | doc. RNDr. Václav Nýdl, CSc.<br>PhDr. Marek Šulista<br>Vivian White-Baravalle, M. A. |
| Vydavatel: | Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích<br>Ekonomická fakulta |
| Tisk: | Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích<br>Ekonomická fakulta, ediční středisko |
| Vydání: | 1. vydání, 2007 |
| Počet stran: | 67 |
| Náklad: | 400 výtisků |
| AA: | 4,19 |

**Tato publikace neprošla jazykovou úpravou v redakci nakladatelství.**
**Za věcnou a jazykovou správnost díla odpovídají autoři.**

**ISBN 978-80-7394-040-9**

ISBN 978-80-7394-040-9